Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 1

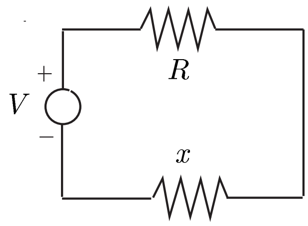
Ejercicios básicos

1. (a) Encuentra la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2 siendo $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$.
   (b) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Halla los puntos de la gráfica de f en los cuales la tangente es horizontal.
   (c) Sea $f(x) = L|2x + 1|$. Halla los puntos en los que la tangente a la gráfica de f es paralela a la recta de ecuación $2x - 3y + 20 = 0$.
   (d) Encuentra los valores de a y b para que $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x^2 + ax + b$ tengan tangente común en el punto de abscisa 0.

2. En cada uno de los siguientes casos investiga la continuidad y la derivabilidad de la función f:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0. \\ -x^2 + x + 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x < 1. \\ -x^2 + ax + b, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3. (a) Encuentra los extremos absolutos de $f(x) = (x+2)^3(3-x)$ en $[-1, 2]$, y de $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en $[-1, 4]$.
   (b) Durante varias semanas se ha registrado el flujo de tráfico más allá de cierta salida del centro de Montevideo. Los datos señalan que entre la $1:00$ y las $6:00$ p.m., en un día normal de la semana, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $V(t) = t^3 - 10,5\, t^2 + 30t + 20$ kilómetros por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. ¿En qué momento entre la $1:00$ y las $6:00$ p.m. es más rápido el tráfico y en qué momento es más lento?
   (c) En el circuito de la figura el voltaje de la fuente es V volts y la resistencia de R ohms. El "resistor" puede tener un valor x (también en ohms) variable.



   Se sabe que la potencia disipada en el resistor es $P(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}$. Encuentra el valor de x para el cual la dicha potencia sea máxima.

Ejercicios de nivel medio

4. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; sen \, \frac{1}{x} \, , & \text{si } x \neq 0. \\ \lambda, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ así:

$$h\,(x) = \begin{cases} f\,(x)\,, & \text{si } f\,(x) \geq g\,(x) \\ g\,(x)\,, & \text{si } f\,(x) < g\,(x) \end{cases}$$

en otras palabras, $h(x)$ coincide con: $h(x) \;=\; máx\ \{\ f(x)\ ,\ g(x)\ \}$.

   (a) Demuestra que si f y g son continuas en x_0, entonces h también lo es. (Se te sugiere comprobar y usar que $máx(u, v) = \frac{|u-v|+u+v}{2}$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$).

   (b) ¿Es válido el recíproco del resultado anterior?

6. (a) Demuestra que si f es continua en x_0 y g es discontinua en x_0 entonces $f + g$ es discontinua en x_0. ¿Qué sucede si ambas funciones son diacontinuas en x_0?

   (b) ¿Qué ocurre si se trata del producto $f.g$ en lugar de la suma?

   (c) Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x \leq 0. \\ |4 - x|, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Estudia la continuidad en 0 de f, g, fog y gof.

   (d) Encuentra dos funciones F y G tales que F sea discontinua en x_0, G discontinua en $F(x_0)$ y que GoF sea continua en x_0.

   (e) Discute todos los puntos anteriores cambiando continuidad por derivabilidad.

7. Un teorema sobre puntos fijos:
Sea f una función continua en $[0, 1]$ tal que $f(x) \in [0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$. En estas condiciones te pedimos que demuestres que f tiene algún punto fijo en el intervalo $[0, 1]$, es decir: existe al menos un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Para ello te sugerimos que intentes aplicar el teorema de Bolzano a la función $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = x - f(x)$.

8. Una fábrica de cerveza desea constuir latas de forma cilíndrica (cilindro circular recto) que contengan un volumen V del producto. ¿Qué relación debe haber entre la altura de la lata y el radio de su base para que se minimicen los costos debidos al material usado?

9. (a) Demuestra que $x\ (1 - x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Demuestra que $x^{\alpha} \leq \alpha\, x + (1 - \alpha)$, $\forall x \geq 0$.

   (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. ¿Es cierto que $e^x > x^a$, $\forall x \geq 0$?

10. (a) Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos además que existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in (a, b)$.
Demuestra que $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M\ |x_2 - x_1|$, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

   (b) Demuestra que $|sen\ x - sen\ y| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicios optativos

11. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}\,, & \text{si } x = \frac{p}{q},\ \ D(p,q) = 1. \\ 0\,, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

12. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \; sen^2\left(\frac{1}{x}\right)\,, & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Demuestra que f presenta un mínimo relativo en 0.
   (b) Prueba que $f'(0) = f''(0) = 0$.
   (c) ¿Es f creciente en algún intervalo de la forma $[0, \delta]$? ¿Es f decreciente en algún intervalo a la izquierda de 0?

13. **Propiedad de Darboux para la derivada y consecuencias**
En todo este ejercicio, f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I (no se supondrá que f' sea continua).

   (a) Sean a y b dos puntos de I con $a < b$. Demuestra que si $f'(a) < \mu < f'(b)$ entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \mu$. (Sugerencia: probar que la función $\varphi(x) = f(x) - \mu x$ tiene un mínimo en (a, b)). Este resultado está diciendo que la función derivada, aun no siendo continua, tiene la propiedad de Darboux.
   (b) Demuestra que si f' no tiene ceros entonces f es monótona.
   (c) Sea $x_0 \in I$. Demuestra que si existe $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ entonces $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$.
   (d) f' NO puede tener discontinuidades de primera especie en I. O sea, si x_0 es un punto de discontinuidad de f' entonces no pueden existir al mismo tiempo sus límites laterales en x_0. (Un ejemplo de una función derivable con derivada no continua lo encuentras en el ejercicio 4 de este mismo repartido. Observa que, en ese caso, la discontinuidad de f' es de "segunda especie").

14. Sea f una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$. Demuestra que existe algún punto $c \in [0, 1]$ tal que $|f''(c)| > 4$. (es decir, una partícula que recorre una distancia unidad en un tiempo unidad y que empieza y termina con velocidad 0, tiene en algún momento una aceleración mayor que 4).

Repaso sobre cálculo de derivadas

1. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

   1) $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{-2x}$ 2) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+1}{x^3+1}$ 3) $f(x) = L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

   4) $f(x) = 5-3x+L\left|\frac{3x-1}{x+1}\right|$ 5) $f(x) = L\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 6) $f(x) = \left(x^2+2x\right)e^{\frac{2}{x+2}}$

   7) $f(x) = 2(x-1)+\sqrt{x^2-6x+5}$ 8) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}+L\left|1-x^2\right|$ 9) $f(x) = \frac{x-1}{x}\ e^{1/x}$

   Respuestas:

   1) $f'(x) = -2\left(x^2-x+1\right)e^{-2x}$ 2) $f'(x) = \frac{4x\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$ 3) $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$

   4) $f'(x) = \frac{-9x^2-6x+7}{(3x-1)(x+1)}$ 5) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 6) $f'(x) = 2\ \frac{\left(x^2+2x+2\right)}{x+2}e^{\frac{2}{x+2}}$

   7) $f'(x) = \frac{x-3+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ 8) $f'(x) = -\ \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^2(1-x)}$ 9) $f'(x) = \frac{1}{x^3}\ e^{1/x}$

2. Encuentra la función derivada de las siguientes funciones:

   1) $f(x) = x-L|1+x|-Arctgx$ 2) $f(x) = Arctg(senx)$ 3) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{2x}{\sqrt{3}}$

   4) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}+(Arctgx)\ \left(\frac{2x}{x^2+1}+Arctgx\right)$

   5) $f(x) = Arctg(x-1)+Arctg\left(\frac{1}{x-1}\right)+L|x|-\frac{1}{2}L\left(x^2-2x+2\right)$

   Respuestas:

   1) $f'(x) = \frac{x^3-1}{(x+1)(x^2+1)}$ 2) $f'(x) = \frac{cosx}{1+sen^2x}$ 3) $f'(x) = \frac{-15x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2(4x^2+3)}$

   4) $f'(x) = \frac{4}{\left(x^2+1\right)^2}\ Arctgx$ 5) $f'(x) = \frac{-x+2}{x(x^2-2x+2)}$