1 Funciones reales de n variables

En este capítulo estudiaremos funciones definidas en algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que toman valores reales. Nos interesa fundamentalmente extender el concepto de *derivada*, una de cuyas finalidades es determinar los extremos absoulutos en un conjunto compacto, cuya existencia asegura el teorema de Weierstrass.

1.1 Derivadas direccionales

Definición 1 (Derivadas parciales). *Sea $f\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbf{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y consideremos un punto $a \in \mathbf{U}$. Para $i = 1, \dots, n$, la i-*ésima derivada parcial* de f en el punto a es el valor del límite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

cuando este lmite exite, que designamos indistintamente mediante

$$\partial f_i(a) \quad \textit{o también} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

En el caso particular en el que $n = 2$, decimos *derivada parcial respecto de x o de y*. En este caso, si $a = (x, y)$, tenemos:

$$\partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t},$$
$$\partial_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}.$$

que también designamos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. Una situación análoga obtenemos cuando $n = 3$: en este caso $a = (x, y, z)$, y designamos la tercer derivada parcial mediante $\frac{\partial f}{\partial z}$ o f_z.

Interpretación geométrica

Consideremos $f\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, con $\mathbf{U}$ abierto en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbf{U}$. Supongamos que existe $\partial_i f(a)$ para algún $i = 1, \dots, n$. Consideremos la recta (en $\mathbb{R}^n$) que pasa por el punto a y es paralela al vector e_i, esto es, la función $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida mediante

$$\lambda(t) = a + te_i \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Como $\mathbf{U}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda(t) \in \mathbf{U}$ cuando $-\varepsilon < t < \varepsilon$. La función resultante de la composición de f con λ, con dominio en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, a valores reales, es decir, la función

$$(f \circ \lambda)(t) = f\big(\lambda(t)\big) = f(a + te_i), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

es una función de una variable real, cuya derivada en el origen vale

$$(f \circ \lambda)'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \lambda)(t) - (f \circ \lambda)(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \partial_i f(a).$$

Esto prueba que $f \circ \lambda$ es una función derivable en $t = 0$, y que el valor de su derivada es el de la derivada parcial de la función f en el punto a.

Consideremos el caso $n = 2$, y representemos gráficamente a la función $z = f(x, y)$ un un sistema de ejes coordenados $Oxyz$. Para la derivada parcial respecto de x (es decir, $i = 1$), el recorrido de la recta λ es el intervalo $(a - \varepsilon e_1, a + \varepsilon e_1)$, por lo que la función compuesta $f \circ \lambda$ se puede representar gráficamente tomando como eje el paralelo a Ox con origen en el punto a, obteniendo el gráfico de la función compuesta como intersección del gráfico de la función original $f(x, y)$ con el plano perpendicular a $0xy$, paralelo a Ox por el punto a. La derivada parcial con respecto a x es entonces el ángulo que forma este gráfico obtenido como intersección, con el eje Ox.

Sin hipótesis adicionales de regularidad sobre la función f, las derivadas parciales apenas dan información sobre el comportamiento de la función en las direcciones de los ejes coordenados, y no permiten obtener conclusiones acerca del comportamiento global de la función en un punto. Esto es una diferencia muy importante con el caso $n = 1$, de las funciones reales de variable real.

Ejemplo 1. Consideremos $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que existen ambas derivadas parciales, tenemos $f_x(0, 0) = f_y = (0, 0) = 0$, pero la función no es continua en el punto $(0, 0)$.

Ejemplo 2. Consideremos $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si}(x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

En todo punto distinto de $(0,0)$ la función tiene derivadas parciales, dadas por

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

En el origen, tenemos

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0,$$

y análogamente (o intercambiando la x con la y) obtenemos $f_y(0,0) = 0$. Sin embargo, y aunque existen ambas derivadas parciales en todos los puntos, la función $f(x,y)$ no es continua $(0,0)$ como resulta de observar, que el límite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no existe: tenemos $f(x,x) = 1/2$ $(x \neq 0)$, pero $f(x,0) = 0$.

Definición 2 (Derivadas direccionales). *Sean* $f\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, *donde* $\mathbf{U}$ *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$, *y un punto* $a \in \mathbf{U}$. *Consideremos un vector* v *de* $\mathbb{R}^n$, *no nulo. La* derivada direccional *de* f *con respecto de* v *en el punto* a, *es el valor del límite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

cuando este límite exite, que designamos $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Observemos primero, que si $v = e_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$, la derivada direccional es la derivada parcial de la definición anterior. Estamos entonces generalizando la defínción de derivada parcial.

Análogamente al caso de las derivadas parciales, obtenemos que la derivada direccional es la derivada de la función real que resulta de componer f con la recta de ecuación $\lambda(t) = a + tv$, definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$. Es decir

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$$

La existencia de todas las derivadas parciales de una función en un punto, (si bien es una condición mas fuerte que la existencia de las derivadas parciales) tampoco asegura la continuidad de la función, como vemos a continuación.

Ejemplo 3. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Consideremos un vector $v = (h,k)$, y estudiemos la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{th^3 k}{t^4 h^6 + k^2} = 0$$

Obtenemos entonces, que existen todas las derivadas direccionales de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$, y toman el valor 0, sin embargo, la función no es continua en $(0,0)$: tenemos $f(x,x^3) = 1/2$ $(x \neq 0)$, pero $f(x,0) = 0$.

Nos proponemos ahora generalizar el teorema de Lagrange para una función de n variables.

Teorema 1 (Teorema del valor medio). *Sea $f\colon \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, consideremos un punto $a \in \mathbf{U}$ y un vector v de $\mathbb{R}^n$, tal que el intervalo $[a, a+v]$ está contenido en $\mathbf{U}$. Supongamos que f es continua en los puntos del intervalo $[a, a+v]$, y que existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo $x \in (a, a+v)$. Entonces, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

Demostración. La demostración se basa en el teorema del valor medio de funciones reales. Para eso definimos la función compuesta $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, mediante $\phi(t) = f(a+tv)$, que es continua en el intervalo $[0,1]$ (por ser composición de funciones continuas) y derivable en $(0,1)$, dado que, como hemos visto, la derivada de ϕ es la derivada parcial de f. Existe entonces $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\phi'(\theta) = \phi(1) - \phi(0).$$

La conclusión del teorema se obtiene de escribir la identidad anterior en términos de la función f. Sabemos que $\phi(1) - \phi(0) = f(a+v) - f(a)$. Por otra parte,

$$\phi'(\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(\theta + t) - \phi(\theta)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + \theta v + tv) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v),$$

concluyendo la demostración. $\square$