Notas de Cálculo Diferencial e Integal II (2002) - Clase 9

Generalizamos ahora el teorema que, para funciones reales de variable real, afirma que si la derivada es nula en un intervalo, la función es constante.

Teorema 1. *Sea $f\colon \mathbf{U}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, donde $\mathbf{U}$ es un conjunto abierto y convexo. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial v}(x)=0$ para todo vector $v\in\mathbb{R}^n$, y para todo punto $x\in\mathbf{U}$. Entonces, f es constante en $\mathbf{U}$.*

Demostración. Tomemos un punto $a\in\mathbf{U}$ de referencia, y, eligiendo $x\in\mathbf{U}$ arbitrario, veamos que $f(x)=f(a)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. En efecto, ponienedo $v=x-a$, si $\lambda(t)=a+tv$ $(0\leq t\leq 1)$, la función compuesta $\phi(t)=f(\lambda(t))$ está bien definida (porque el dominio $\mathbf{U}$ es convexo) y, como vimos en el teorema anterior, $\phi'(\theta)=\frac{\partial f}{\partial v}(a+\theta v)=0$. Luego $f(a)=\phi(0)=\phi(1)=f(x)$, completando la demostración. □

Observación. Es sencillo de verificar que el teorema vale en dominios abiertos $\mathbf{U}$ mas generales, por ejemplo, los llamados *poligonalmente conexos*, que verifican la siguiente propiedad: dados dos puntos de $\mathbf{U}$, existe una poligonal de puntos de $\mathbf{U}$ que los une.

Funciones diferenciables

Si bien la noción de derivada direccional nos permitió demostrar el teorema del valor medio, no es una generalización suficiente de la noción de derivada de funciones reales, en particular, porque existen funciones que no son continuas en un punto, pero poseen todas las derivadas direccionales en ese punto.

Nos proponemos definir la *diferenciabilidad* de una función en un punto, generalizando la noción de derivada de funciones reales, como sigue. Recordemos, que dada $f\colon\mathbf{U}\to\mathbb{R}$, donde $\mathbf{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ (por ejemplo un intervalo abierto) y $a\in\mathbf{U}$, definimos la derivada de f en el punto a como el valor del límite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a), \tag{1}$$

cuando existe y es finito. Supongamos que f es derivable en el punto a, Y definamos la función $p(t)$, en un entorno $(-\varepsilon,\varepsilon)$ suficientemente pequeño, mediante

$$p(t)=\frac{f(a+t)-f(a)}{t}-f'(a)\quad (t\neq 0),\quad p(0)=0.$$

Es claro que $\lim_{t\to 0} p(t) = 0$, y podemos escribir, despejando,

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + tp(t), \quad \text{con} \quad \lim_{t\to 0} p(t) = p(0) = 0.$$

Mas aún, podemos *definir* función derivable y derivada, diciendo que f es derivable en un punto a si existen una constante A y una función $p(t)$ definida en un entorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, tal que se verifica

$$f(a+t) = f(a) + At + tp(t), \tag{2}$$
$$\lim_{t\to 0} p(t) = p(0) = 0. \tag{3}$$

Es sencillo verificar que esta definición es equivalente a la anterior, despejando $p(t)$ de (2) y observando entonces, que (3) es la definición (1), donde obtenemos que $f'(a) = A$.

En sínitesis, escribiendo $x = a + t$, una función es derivable en un punto, cuando $f(x)$ se puede aproximar por una recta, de ecuación $y = A(x - a)$ (decimos *aproximar*, dado que la diferencia entre la función y la recta, $tp(t)$ es un infinitésimo de mayor orden).

Geométricamente, una función es diferenciable cuando su gráfico se puede "aproximar" (en un sentido intuitivo) por una recta, que resulta ser la recta tangente. La derivada es la pendiente de esta recta.

La siguiente definición generaliza, para funciones de n variables, la segunda definición de derivada.

Definición 1 (Funciones diferenciables). *Sea $f\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. La función f es* diferenciable *en un punto $a \in \mathbf{U}$, cuando existen números reales $A_1, \dots, A_n$ y una función p definida en una bola $B(0, \varepsilon)$ con radio $\varepsilon > 0$, tal que, para todo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a + v \in B(0, \varepsilon)$, se verifica*

$$f(a+v) = f(a) + A_1 v_1 + \cdots + A_n v_n + \|v\| p(v), \tag{4}$$
$$\lim_{v\to 0} p(v) = p(0) = 0. \tag{5}$$

Observemos, que si introducimos el vector $A = (A_1, \dots, A_n)$, la ecuación (4) se puede escribir como

$$f(a+v) = f(a) + \langle A, v\rangle + \|v\| p(v),$$

Estamos entonces definiendo que una función es diferenciable cuando se puede "aproximar" por un "plano" (un polinomio de grado 1 en n variables). A continuación, el resultado que estábamos buscando.

Teorema 2. *Sea* $f\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}$*, donde* $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto abierto, y* $a \in \mathbf{U}$*. Si* f *es diferenciable en el punto* a*, entonces es continua en* a*, y, dado un vector* v_0 *cualquiera, existe la derivada direccional respecto de* v_0 *en* a*. En particular, existen las derivadas parciales, y se verifica* $\partial f_1(a) = A_1, \ldots, \partial f_n(a) = A_n$*.*

Demostración. La continuidad es inmediata, dado que

$$\lim_{v\to 0} \big(f(a+v) - f(a)\big) = \lim_{v\to 0} \big(\langle A, v\rangle + \|v\| p(v)\big) = 0.$$

Respecto de la derivada direccional, dado un vector v_0, si ponemos $v = tv_0$ en la definicón, tenemos

$$f(a+tv_0) = f(a) + t\langle A, v_0\rangle + |t|\|v_0\|p(tv_0),$$

Dividiendo por t y tomando límite si $t \to 0$, como $p(tv_0) \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial v_0}(a) = \langle A, v_0\rangle.$$

lo que demuestra que existe la derivada direccional y da su valor. En particular, si $v_0 = e_i$, obtenemos

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \langle A, e_i\rangle = A_i,$$

concluyendo la demostración. □

Observación. En la definición utilizamos la norma euclideana usual. Escribiendo el límite en (5) en términos de (4), resulta la condición

$$\lim_{v\to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(a+v) - f(a) - \langle A, v\rangle\big) = 0.$$

Como este límite no depende de la norma en $\mathbb{R}^n$ (porque todas las normas son equivalentes), la definición no depende de la norma elegida.