

TRABAJO MONOGRÁFICO

Homeomorfismos de S^2 sin entropía:

Una descripción de la dinámica

Por: Magdalena Rubio Colucci

Orientadora: Juliana Xavier Saavedra

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

2018

Agradecimientos

Imposible no comenzar agradeciéndole a mi orientadora Juliana Xavier, quien fue una excelente fuente de inspiración al compartir conmigo su forma de ver y entender la matemática.

A mi toda mi familia por haber estado siempre a mi lado.

A mi novio Pablo Caitano por todo el amor y apoyo que me da día a día.

A Matilde Martínez y Alejandro Passeggi por aceptar formar parte del tribunal. A Matilde en particular por haberme bancado la cabeza en numerosas ocasiones.

A Juan Alonso y Rafael Potrie a quienes cada vez que intercepté en los pasillos del IMERL estando estancada con algún problema, con mucha paciencia me ayudaron resolver mis dudas. Estas instancias contribuyeron en gran medida a mi gusto y comprensión de la matemática y estoy profundamente agradecida por esto.

A mis amigas que me acompañaron durante todo el proceso.

Finalmente, a mis amigos y compañeros de carrera Nacho, Nico, Maxi, Adriana, Seba por todos estos años de amistad, charlas interminables, días y noches de estudio, risas y más.

Resumen

La teoría de forcing basada en isotopías maximales y foliaciones transversas ha tenido un fuerte impacto en el estudio de homeomorfismos en superficies. En particular, en esta monografía expondremos la prueba de un teorema que describe la dinámica de los homeos de la esfera con entropía nula, que se centra en estos conceptos.

Índice

1. Introducción	5
2. Isotopías maximales, foliación por líneas de Brower y caminos admisibles	7
2.1. Introducción	7
2.2. Isotopías maximales	8
2.3. Foliaciones transversas	11
2.4. Caminos admisibles	15
3. Homeomorfismos de entropía positiva	17
3.1. Entropía topológica	17
3.2. Intersecciones \mathcal{F} -transversas	19
3.3. Entropía en superficies compactas	21
4. Homeomorfismos conservativos de \mathbb{S}^2 sin entropía	25
4.1. Introducción	25
4.2. El conjunto fdrec	26
4.3. Versión local del teorema	29
4.4. Demostración del teorema 4.1.1.	30
4.5. Resultados previos	33
4.6. Demostración del teorema 4.3.1.	39

1. Introducción

La existencia de órbitas periódicas es claramente un tema de suma importancia para los Sistemas Dinámicos. No son pocos los matemáticos que han trabajado en el desarrollo de teorías de forzamiento de órbitas periódicas. Por citar algún caso, existe una que está relacionada a la clasificación de superficies de Nielsen-Thurston con interesantes aplicaciones como se puede ver en [Bo] o [Mo].

Por otro lado, M.Handel introdujo -y luego desarrolló junto a J. Franks- la teoría homotópica de Brouwer, que resultó ser una herramienta de gran utilidad para probar existencia de órbitas periódicas para homeomorfismos de superficies. Dentro de estos trabajos se destaca [FH], en donde prueban un teorema de estructura para difeomorfismos de entropía nula que preservan área en la esfera.

Posteriormente, Le Calvez hace surgir la teoría de Brouwer foliada, otra conocida técnica eficiente a la hora de estudiar la dinámica de superficies.

Esta monografía se centrará en el trabajo [LC], en el cual F. Tal y P. Le Calvez realizan un estudio de las trayectorias transversas a la foliación por líneas de Brouwer obteniendo numerosos resultados de interés para el análisis de los homeomorfismos de superficies.

En la primer sección, introduciremos la temática y probaremos algunos resultados claves. Luego, pasaremos a presentar el concepto de entropía, y explicar como esto se relaciona con la teoría de forzamiento. Estas dos secciones son simplemente preliminares para el capítulo central, por lo cual se omitirán los detalles que no sean de mayor relevancia para avanzar en la teoría.

Finalmente, presentaremos el contexto en el que se enmarca el objetivo central de la monografía, a saber, el estudio de los homeomorfismos de la esfera con entropía nula. En concreto, se probará el siguiente teorema:

Teorema 1.0.1 (Le Calvez - Tal). *Si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$ y $h(f) = 0$, entonces existe una familia de abiertos (A_α) disjuntos dos a dos y cuya unión es densa tales que:*

1. *Cada A_α es un anillo abierto invariante, y a su vez, los A_α son maximales dentro del conjunto de los anillos abiertos invariantes sin puntos fijos.*
2. *Todo punto de $\mathbb{S}^2 \setminus \cup A_\alpha$ es heteroclínico (i.e. su ω y α límite están*

contenidos en componentes conexas de $\text{Fix}(f)$.

- 3. Si C es una componente conexa de la frontera de un A_α en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$, la componente conexa de $\text{Fix}(f)$ que contiene a $\omega(z)$ (resp. $\alpha(z)$) no depende de $z \in C$.*

2. Isotopías maximales, foliación por líneas de Brower y caminos admisibles

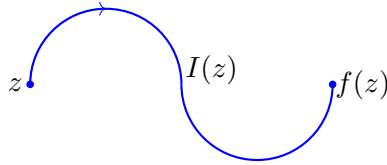
2.1. Introducción

En esta sección introduciremos los conceptos básicos para la lectura de esta monografía, entre los que se encuentran los de isotopía maximal, foliación por líneas de Brower y caminos admisibles. Todo a lo largo de la misma, M será una superficie orientada, y $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo.

Definición 2.1.1 (Isotopía). Una *isotopía* de la identidad a f es un camino continuo de la identidad a f en $\text{Homeo}(M)$ con la topología C^0 . (Es decir, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}(M) / \gamma(t) = f_t$, siendo γ continua)

Decimos que f es isotópico a la identidad si existe una isotopía de la identidad a f (es decir $\gamma(0) = Id$, $\gamma(1) = f$), y designamos como \mathcal{I} al conjunto de dichas isotopías.

Dada $I = (f_t)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{I}$, $I(z) : t \mapsto f_t(z)$ denotará la trayectoria de un punto $z \in S$.



Definición 2.1.2. Sea f un homeomorfismo en una superficie orientable S e I una *isotopía* de f . $\text{Fix}(I)$ es el conjunto de puntos tales que $f_t(z) = z$, $\forall t \in [0, 1]$.

Sea I una isotopía de la identidad a f . Como \mathbb{S}^2 es simplemente conexo, dado un punto fijo $z_0 \in \mathbb{S}^2$ de f , podemos intuitivamente deformar la isotopía I en una isotopía I' para la cual $z_0 \in \text{Fix}(I')$. A su vez, como $\mathbb{S}^2 \setminus \{z_0\}$ también es simplemente conexo, dado otro punto fijo z_1 de f , podemos deformar I' homotópicamente en $\mathbb{S}^2 \setminus \{z_0\}$ de tal manera de obtener una isotopía I'' para la cual tanto z_0 como z_1 son puntos fijos.

Aún más, dados tres puntos fijos de f , z_0 , z_1 y z_2 , componiendo, $\forall t \in [0, 1]$, f_t con una transformación de Moebius h_t que lleve $f_t(z_i)$ en z_i para $t = 0, 1, 2$, obtenemos una isotopía I' homotópica a I que verifica que $z_0, z_1, z_2 \in \text{Fix}(I')$.

Dado $X \subset \text{Fix}(f)$, decimos que X es *desenlazado* si existe una isotopía I' de la identidad a f , homotópica a I , y tal que $X \subset \text{Fix}(I')$. Si además X es maximal (considerando la inclusión como orden parcial) entre los conjuntos desenlazados, entonces decimos que X es un *desenlazado maximal*.

Acabamos de ver que si X contiene solo tres puntos, siempre es desenlazado. No obstante, si $\sharp X \geq 4$, esto no será siempre posible. Pero lo que sí es claro, es que si $\sharp \text{Fix}(f) < \infty$, siempre es posible obtener un desenlazado maximal, ya que al ser finita la cantidad de puntos fijos, el proceso que describimos anteriormente de agregar puntos al conjunto desenlazado ($x_0 \in \text{Fix}(f)$ tal que $f_t(x_0)$ es trivial en $\mathbb{S}^2 \setminus X$) en algún momento termina.

2.2. Isotopías maximales

En esta subsección, nos dedicaremos al estudio de las isotopías, enfocándonos en formalizar las ideas previas que fueron presentadas de forma intuitiva.

Definimos $I^n(z)$ como la concatenación de los caminos $I(f^i(z))$, con $0 \leq i \leq n-1$. A su vez, definimos $I^{\mathbb{N}}(z)$ concatenando los caminos $I(f^i(z))$ para $0 \leq i < \infty$, y de forma análoga, $I^{-\mathbb{N}}(z)$ para $-\infty < i \leq 0$, y $I^{\mathbb{Z}}(z)$ para $-\infty < i < \infty$ (a este último lo llamamos *trayectoria completa* de f).

Definición 2.2.1 (Isotopía singular). Decimos que I es una *isotopía singular* si es una isotopía de la identidad a f definida en algún abierto invariante por f (al cual llamaremos dominio de la isotopía), cuyo complemento (que llamaremos conjunto singular) está incluido en $\text{Fix}(f)$.

En lo que sigue, dada una isotopía singular I , $\text{dom}(I)$ denotará el dominio de I , y $\text{sing}(I)$ su conjunto singular.

Nos detendremos aquí a hacer algunas observaciones, pues comprender y manipular este objeto nos permitirá construir el concepto de isotopía maximal y entender su interés.

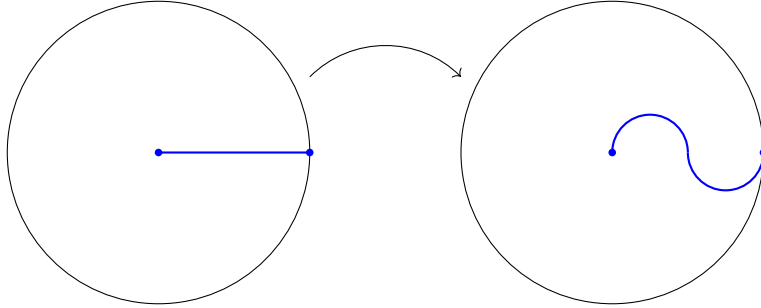
Empecemos tratando un ejemplo de lo más trivial: dada S , consideramos $f = \text{Id}_S$ y $f_t = \text{Id}_S \forall t \in [0, 1]$, es decir, todo punto tiene trayectoria trivial. Es obvio que en este caso cualquier abierto $U \subset S$ es invariante y la restricción de I a U está bien definida. Luego podemos tomar U como $\text{dom}(I)$, teniendo así una isotopía singular.

Es claro que lo que nos permitió tal arbitrariedad en la elección de $\text{dom}(I)$ fue que $\text{Fix}(I) = S$. De hecho, dada una isotopía I de un homeomorfismo f ,

siempre podemos tomar como $\text{sing}(I)$ cualquier subconjunto cerrado de $\text{Fix}(I)$, ya que su complemento es un abierto invariante por f en el cual la restricción de I está bien definida. En particular, una posible elección es $\text{sing}(I) = \text{Fix}(I)$.

Observación 2.2.1. *Aquí estamos realizando cierta ambigüedad ya que cuando hablamos de $\text{Fix}(I)$ hacemos referencia al conjunto de puntos fijos de la isotopía I , y cuando hablamos de $\text{sing}(I)$, I es la isotopía singular obtenida restringiendo I a $\text{dom}(I)$.*

Ejemplo 2.2.1. Sea f un homeomorfismo de \mathbb{S}^2 que fija el hemisferio norte, \mathbb{S}_N^2 , y que en el sur, \mathbb{S}_S^2 , actúa en cada vertical como muestra la figura.



Es claro que f resulta isotópico a la identidad, y que se puede construir de forma tal que $\text{Fix}(f)$ esté formado por el hemisferio norte (incluyendo el borde) y el polo sur. Ahora, podemos considerar una isotopía $I = (f_t)$ tal que para $0 < t < 1$, $\text{Fix}(f_t) = \{N\} \cup \{S\} \cup C$, donde N y S son los polos norte y sur respectivamente, y C el borde de ambos hemisferios. Por ejemplo, en el hemisferio sur es una isotopía cualquiera de la identidad a f , y en el hemisferio norte, para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, f_t es una isotopía de la identidad a $f_{\frac{1}{2}}$, donde $f_{\frac{1}{2}}$ actúa igual que f en el hemisferio sur, y para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ f_t es un camino en $\text{Homeo}(\mathbb{S}^2)$ de $f_{\frac{1}{2}}$ a la identidad. Finalmente, observemos que $\text{Fix}(I) = \{N\} \cup \{S\} \cup C$, pero que $\mathbb{S}_S^2 \setminus (\{S\} \cup C)$ es un abierto invariante por f , cuyo complemento es exactamente $\text{Fix}(f)$, y en el cual la restricción de I está bien definida. En resumen, acabamos de construir una isotopía singular tal que $\text{Fix}(I) \subsetneq \text{sing}(I) = \text{Fix}(f)$.

En el ejemplo anterior, logramos contruir una isotopía singular que cumplía que $\text{sing}(I) = \text{Fix}(f)$, lo cual no será siempre posible. En el fondo, podríamos describir la situación de la siguiente manera: teníamos ciertos puntos de $\text{Fix}(f)$ con trayectoria no trivial, cuando en realidad, podríamos haber creado una

isotopía de la identidad a f dejándolos "quietos". Es decir que dada una isotopía I , podemos pensar $\text{sing}(I)$ como un subconjunto de $\text{Fix}(f)$ en el cual f_t podría haber actuado como la identidad para todo $t \in [0, 1]$. Dicho de otro modo, lo que es de interés aquí es el concepto homotópico de trayectoria trivial: si un punto fijo no cumple que $f_t(z) = z \forall t \in [0, 1]$, pero podemos modificar homotópicamente la isotopía I en una isotopía I' para la cual z sí es un punto fijo, entonces consideraremos que z tiene trayectoria trivial, y trabajaremos con I' en lugar de I .

Definamos en $\mathcal{I}_{\text{sing}}$ -el conjunto de isotopías singulares- el siguiente preorden: decimos que $I \preceq I'$ si:

1. $\text{dom}(I') \subseteq \text{dom}(I)$
2. $\forall z \in \text{dom}(I')$, las trayectorias $I(z)$ e $I'(z)$ son homotópicas en $\text{dom}(I)$
3. $\forall z \in \text{dom}(I) \setminus \text{dom}(I')$, la trayectoria $I(z)$ es homotópicamente trivial en $\text{dom}(I)$

Bajo este contexto, diremos que I e I' son *equivalentes* si $I \preceq I'$ y $I' \preceq I$. A su vez, I es *maximal* si no existe ninguna isotopía singular I' tal que $I \preceq I'$ y $\text{dom}(I) \neq \text{dom}(I')$.

Observación 2.2.2. *Si no existe ningún $z \in \text{dom}(I) \cap \text{Fix}(f)$ tal que $I(z)$ sea homotópicamente trivial en $\text{dom}(I)$, entonces I es maximal, puesto que dada $I \preceq I'$, nunca se cumple 3.*

Lo interesante es que el recíproco también es cierto. En efecto, si existe algún $z \in \text{Fix}(f) \cap \text{dom}(I)$ tal que su trayectoria $I(z)$ es homotópicamente trivial en $\text{dom}(I)$, podemos hallar una isotopía I' en $\text{dom}(I)$ que sea homotópica a I y que fije z . Es claro que la restricción de I' a $\text{dom}(I) \setminus \{z\}$ es una isotopía estrictamente mayor que I .

En la misma línea, sería ideal contar con el siguiente resultado sobre isotopías maximales: toda isotopía singular es menor que alguna isotopía maximal. Uno desearía poder usar el Lema de Zorn para probar esto, pero desafortunadamente, se presentan enormes dificultades a la hora de probar que toda cadena está acotada. Las mismas fueron sobrellevadas por Jaulent introduciendo la noción de isotopía hereditaria. El lector puede remitirse a [J] por más detalles sobre esto último, aunque en un trabajo reciente([BCL]),

Béguin, Crovisier, y Le Roux logran enunciar y demostrar el resultado de la siguiente forma, más directa y simple:

Dada una isotopía singular I , existe una isotopía singular I' tal que:

- $\text{Fix}(I) \subset \text{Fix}(I')$
- I' es homotópica a I
- $\nexists z \in \text{Fix}(I) \setminus \text{Fix}(I')$ cuya trayectoria $I'(z)$ sea homotópicamente trivial en $M \setminus \text{Fix}(I')$.

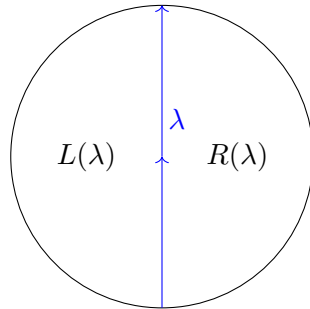
2.3. Foliaciones transversas

Recordemos para comenzar esta subsección el concepto de foliación topológica: una foliación topológica orientada \mathcal{F} una partición de M en subvariedades de dimensión 1 que cumple que para todo $z \in M$, existe un entorno U_z y un homeomorfismo que preserva orientación $h : U_z \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$ que manda las hojas de \mathcal{F} a los segmentos $x \times (-1, 1)$ orientados con la segunda coordenada creciente.

Definición 2.3.1. Una foliación singular en una superficie orientada M es una foliación topológica definida en un subconjunto abierto de M al que llamaremos $\text{dom}(\mathcal{F})$.

Al conjunto $M \setminus \text{dom}(\mathcal{F})$ le llamaremos $\text{sing}(\mathcal{F})$, y diremos que \mathcal{F} es *no singular* o *sin singularidades* siempre que $\text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. ϕ_a denotará a la hoja de \mathcal{F} que pasa por el punto $a \in \text{dom}(\mathcal{F})$.

Presentaremos ahora la noción de *línea de Brower*, en la cual está basada la construcción la foliación transversa, que definiremos a continuación. En lo que sigue, dada una línea topológica orientada λ , $L(\lambda)$ denotará la izquierda de λ , y $R(\lambda)$ su derecha.



Definición 2.3.2 (Línea de Brower). Dado un homeomorfismo del plano f que preserva orientación, una línea de Brower es una línea topológica (i.e. un encaje propio de \mathbb{R}) λ tal que $f(\overline{L(\lambda)}) \subseteq L(\lambda)$

Un célebre teorema de Brower ([Br]) establece que si f no tiene puntos fijos, \mathbb{R}^2 puede ser cubierto por líneas de Brower, es decir, que por cada punto pasa una línea de Brower.

Presentamos ahora una versión equivariante de este resultado para cuando f es un homeomorfismo de una superficie orientable M isotópico a la identidad que aparece en [Lec]. Sea I una isotopía maximal, e \tilde{I} un levantamiento al cubrimiento universal $\widetilde{\text{dom}(I)}$ de $\text{dom}(I)$. Recordemos que \tilde{f} no tiene puntos fijos y supongamos que $\text{dom}(I)$ es conexo (lo que implica que $\widetilde{\text{dom}(I)}$ es un plano). Se tiene entonces que:

Teorema 2.3.1. *Existe una foliación topológica $\tilde{\mathcal{F}}$ sin singularidades, invariante por automorfismos de cubrimiento, cuyas hojas son líneas de Brower de \tilde{f} .*

La demostración se puede encontrar en [Lec].

Definición 2.3.3 (Camino transverso). Un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ es positivamente transverso a $\tilde{\mathcal{F}}$ si su imagen no intersecta el conjunto singular y si para todo $t_0 \in [0, 1]$, existe un carta local continua $h : W \rightarrow (0, 1)^2$ en $\gamma(t_0)$, compatible con la orientación, y que manda la restricción de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}|_W$ a la foliación vertical orientada hacia abajo tal que el mapa $\pi_1 \circ h \circ \gamma$ es creciente en un entorno de t_0 .

Observar que si \tilde{M} es un espacio de cubrimiento de M , $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la proyección y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{dom}(\mathcal{F})$ es positivamente transverso a \mathcal{F} , entonces todo levantado $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ es transverso al levantamiento de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$.

Aún más, todo levantado de γ al cubrimiento universal es transverso a la foliación levantada (no singular).

Supongamos ahora que tenemos una foliación en \mathbb{R}^2 . Decimos que dos caminos transversos γ y γ_2 son \mathcal{F} -equivalentes si:

- Existe un homeomorfismo creciente $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi_{\gamma_2(h(t))} = \phi_{\gamma(t)}$ para todo $t \in [0, 1]$
- $\gamma(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma(1) = \gamma_2(1)$

Cuando está claro por el contexto, omitimos la foliación y decimos simplemente que son equivalentes.

Por otro lado, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ es un camino transverso, entonces $L(\phi_{\gamma(a)}) \cap R(\phi_{\gamma(b)})$ es un plano topológico y $\gamma|_{(a,b)}$ una línea en dicho plano.

Definición 2.3.4. Decimos que γ tiene una *hoja a su derecha* (resp. izquierda) si existen $a < b$ en $[0, 1]$ y una hoja ϕ en $L(\phi_{\gamma(a)}) \cap R(\phi_{\gamma(b)})$ tales que $\gamma|_{(a,b)}$ está a la izquierda (resp. derecha) de ϕ en $L(\phi_{\gamma(a)}) \cap R(\phi_{\gamma(b)})$

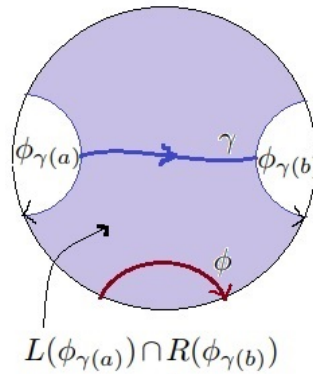


Figura 2.1: ϕ está a la derecha de γ

Del Teorema 2.3.1 se desprende (ver [LC]) que existe un camino $\tilde{\gamma}$ positivamente transverso a $\tilde{\mathcal{F}}$ que une a \tilde{z} con $\tilde{f}(\tilde{z})$, ya que para todo $\tilde{z} \in \widetilde{\text{dom}(I)}$, $\tilde{f}(\tilde{z}) \in L_{\phi_{\tilde{z}}}$ y $\tilde{z} \in R_{\phi_{\tilde{f}(\tilde{z})}}$. (Observar que $\tilde{\gamma}$ está bien definido a menos de equivalencia) Ahora, las hojas de la foliación que corta $\tilde{\gamma}$ cumplen que $R_{\phi_{\tilde{z}}} \subseteq R(\phi) \subseteq R_{\phi_{\tilde{f}(\tilde{z})}}$, de dónde toda hoja cortada por $\tilde{\gamma}$ es cortada por $\hat{I}(\tilde{z})$. Además, la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ es el levantamiento de una foliación singular \mathcal{F} de $\text{dom}(I)$ tal que $\text{dom}(\mathcal{F}) = \text{dom}(I)$. De estas observaciones, se sigue que:

Corolario 2.3.2. *Existe una foliación singular orientada \mathcal{F} tal que $\text{dom}(\mathcal{F}) = \text{dom}(I)$ y que para todo $z \in \text{dom}(I)$, la trayectoria $I(z)$ es homotópica (a extremos fijos) a un camino γ positivamente transverso a \mathcal{F} (bien definido a menos de equivalencia).*

Definición 2.3.5 (Foliación transversa). Decimos que \mathcal{F} es una *foliación transversa* a la isotopía I si satisface las condiciones del corolario anterior.

Si levantamos la isotopía comenzando en la identidad, obtenemos una isotopía de la identidad en \tilde{M} a la cual llamaremos el *levantamiento canónico*

de la isotopía. Observemos que si \tilde{M} es un cubrimiento de M , entonces cualquier foliación \mathcal{F} transversa a una isotopía maximal I se levanta en una foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ transversa al levantamiento canónico \tilde{I} de la isotopía. (De ahora en más, siempre que llamemos a un levantamiento *el levantamiento*, estaremos haciendo referencia al canónico.)

Llamémosle $I_{\mathcal{F}}(z)$ a la clase de los caminos homotópicos en $\text{dom}(I)$ a $I(z)$ que unen z con $f(z)$ que son positivamente transversos a \mathcal{F} , $I_{\mathcal{F}}^n(z)$ a la concatenación de los $I_{\mathcal{F}}(f^k(z))$ con $0 \leq k \leq n$, y denotemos por $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}$ a la trayectoria transversa completa, i.e. la concatenación de todos los $I_{\mathcal{F}}(f^k(z))$.

Proposición 2.3.3. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{dom}(I)$ un camino transverso que tiene una hoja a su derecha y una hoja a su izquierda. Entonces, existe un compacto $K \subset \text{dom}(I)$ tal que para toda trayectoria transversa $I_{\mathcal{F}}^n(z)$ que contiene un subcamino equivalente a γ , existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $f^k(z)$ pertenece a K .*

Demostración. Considerando que siempre podemos levantar el camino en cuestión al cubrimiento universal, basta probar el resultado para el caso en el que $\text{dom}(I)$ es un plano.

Supongamos que tenemos una hoja ϕ_0 a la derecha de γ y una hoja ϕ_1 a su izquierda, y sea W la componente conexa del complemento de $\phi_0 \cup \phi_1$ que contiene a γ . Dado que ϕ_0 y ϕ_1 son líneas de Brower, cualquier órbita que vaya desde $\overline{R(\phi_{\gamma(a)})}$ hasta $\overline{L(\phi_{\gamma(b)})}$ debe estar contenida en W . Sea δ un camino simple que una un punto z_0 de ϕ_0 con un punto z_1 de ϕ_1 contenido en W salvo por sus extremos, y que no corte a $\overline{R(\phi_{\gamma(a)})}$ ni a $\overline{L(\phi_{\gamma(b)})}$.

Sea V_b la componente conexa de $W \setminus \gamma$ que contiene a $\overline{L(\phi_{\gamma(b)})}$. En lo que sigue, concatenaremos a γ con unos caminos que definiremos en breves para probar el resultado.

Si $W \subset R(\phi_0)$, definimos $\alpha_0 = f^2(\phi_0^-)$ y elegimos un camino simple β_0 que una $f^2(z_0)$ con z_0 y esté contenido en $R(f^2(\phi_0)) \cap L(\phi_0)$ salvo por sus extremos.

Si $W \subset L(\phi_0)$, definimos $\alpha_0 = (\phi_{z_0}^+)^{-1}$ y $\beta_0 = \{z_0\}$

De forma análoga, si $W \subset R(\phi_1)$, elegimos un camino simple β_1 que una z_1 con $f^2(z_1)$ y esté contenido en $L(\phi_1) \cap R(f^2(\phi_1))$ salvo por sus extremos.

Si por el contrario, $W \subset L(\phi_1)$, definimos $\beta = z_1$ y $\alpha_1 = (\phi_{z_1}^-)^{-1}$.

Ahora, observemos que $\lambda = \alpha_0 \beta_0 \gamma \beta_1 \alpha_1$ es una línea. La imagen de $\beta_0 \gamma \beta_1$

por f^{-1} es un compacto, y las de α_0 y α_1 son disjuntas de W .

Por lo tanto, se puede encontrar un camino simple γ_0 que una un punto z_{00} de ϕ_0 con un punto z_{10} de ϕ_1 que esté contenido en W a menos de sus extremos, que a su vez no corte a V_b y tal que la componente conexa V_a de $W \setminus \gamma$ que no contiene a V_b - y que corta a $\overline{R(\phi_{\gamma(a)})}$ - no intersekte a $f^{-1}(\gamma)$.

Esto último implica que $f(V_a)$ y V_b están separados por λ y cumplen que $f(V_a) \cap V_b = \emptyset$.

En conclusión, toda órbita que vaya de $\overline{R(\phi_{\gamma(a)})}$ a $\overline{L(\phi_{\gamma(b)})}$ debe cortar a V_a y V_b pero sin estar contenida en la unión de los mismos. Es decir, debe pasar por $K = W \setminus (V_a \cup V_b)$, que claramente es compacto. □

Terminemos con unas breves definiciones que nos serán de utilidad más adelante.

Para cada $z \in \text{dom}(\mathcal{F})$, le llamamos ϕ_z a la hoja que contiene a z , ϕ_z^+ a la semi-hoja positiva, y ϕ_z^- a la semi-hoja negativa.

A su vez, definimos el α y ω límite de la hoja de la siguiente manera:

$$\alpha(\phi) = \bigcap_{z \in \phi} \overline{\phi_z^-}$$

$$\omega(\phi) = \bigcap_{z \in \phi} \overline{\phi_z^+}$$

2.4. Caminos admisibles

De ahora en más, consideraremos que tenemos dado un homeomorfismo f en una superficie orientada M , una isotopía singular I y una foliación \mathcal{F} transversa a I .

Definición 2.4.1 (Camino admisible de orden n). Decimos que un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{dom}(I)$, positivamente transverso a \mathcal{F} , es admisible de orden n si es equivalente a un $I_{\mathcal{F}}^n(z)$ para algún $z \in \text{dom}(I)$.

La definición anterior significa que si $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \widetilde{\text{dom}}(I)$ es un levantamiento de γ , entonces existe un punto $\tilde{z} \in \widetilde{\text{dom}}(I)$ tal que

$$\tilde{f}(\phi_{\tilde{\gamma}(a)}) \cap \phi_{\tilde{\gamma}(b)} \neq \emptyset$$

Si γ es un subcamino de un camino admisible de orden n , entonces diremos que γ es admisible de orden $\leq n$.

Más en general, decimos que $\gamma : J \rightarrow \text{dom}(I)$ es *admisible* si para todo subintervalo $[a, b]$ de J , existe $n \geq 1$ tal que $\gamma_{[a,b]}$ es admisible de orden $\leq n$.

Para terminar esta breve subsección, demostraremos un resultado bastante útil, que indica que fundamentalmente ser de orden n es lo mismo que ser de orden menor o igual a n , salvo casos excepcionales.

Proposición 2.4.1. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \text{dom}(I)$ un camino admisible de orden $\leq n$ pero no de orden n . Entonces γ no tiene ninguna hoja ni a su izquierda ni a su derecha.*

Demostración. Dado que levantamos el camino al cubrimiento universal, basta realizar la prueba para el caso en que $\text{dom}(I)$ es un plano.

Por hipótesis, se tiene que $f(\phi_{\gamma(a)}) \cap \phi_{\gamma(b)} = \emptyset$ pero que

$$f^n(\overline{R(\phi_{\gamma(a)})}) \cap \overline{L(\phi_{\gamma(b)})} \neq \emptyset$$

Por lo tanto $f^n(\overline{L(\phi_{\gamma(a)})}) \subset L(\phi_{\gamma(b)})$ y $f^{-n}(\overline{R(\phi_{\gamma(b)})}) \subset R(\phi_{\gamma(a)})$.

Supongamos que existe $\phi \in \overline{L(\phi_{\gamma(a)})} \cap \overline{R(\phi_{\gamma(b)})}$ que no corta a γ y recordemos que en este caso ϕ es una línea de Brower. Se debe tener entonces que o $R(\phi)$ o $L(\phi)$ está incluido en $\overline{L(\phi_{\gamma(a)})} \cap \overline{R(\phi_{\gamma(b)})}$.

$R(\phi)$ no puede ser ya que sino $f^{-n}(R(\phi))$ estaría tanto en $R(\phi)$ como en $R(\phi_{\gamma(a)})$. Tampoco puede ser $L(\phi)$ por una razón similar, por lo que llegamos a una contradicción.

□

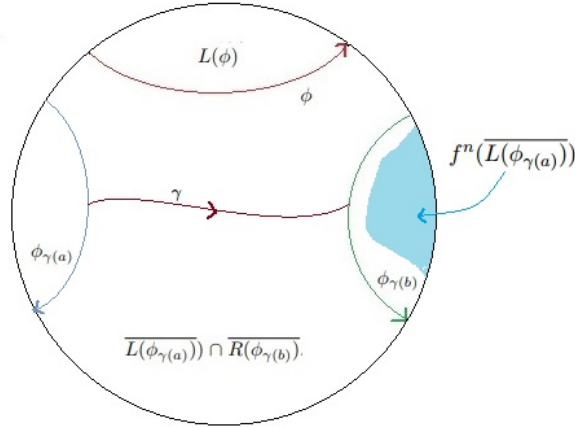


Figura 2.2: Prop. 2.4.1

3. Homeomorfismos de entropía positiva

En esta sección nos dedicaremos fundamentalmente a encontrar una condición suficiente para que un homeomorfismo de una superficie compacta tenga entropía positiva. Es de esperar que esto tenga consecuencias dinámicas interesantes. En particular, en nuestro caso, que el homeomorfismo tenga entropía 0 implicará que no se cumple la condición suficiente para entropía positiva, y esto permitirá probar la existencia de los anillos invariantes mencionados en la introducción. Comenzaremos pues por introducir brevemente el concepto de entropía topológica exhibiendo un par de ejemplos, para luego centrarnos en el caso de las superficies compactas.

3.1. Entropía topológica

Existen varias definiciones de entropía topológica, por supuesto equivalentes entre ellas. Aquí utilizaremos la definición debida a Bowen, por ser de las más breves y la que mejor se adapta al resultado que probaremos luego.

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos en X la siguiente métrica:

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} \{d(f^i(x), f^i(y))\}, \quad \forall x, y \in X$$

Ahora consideremos un conjunto finito $S \subseteq X$. Decimos que S está (n, ϵ) – separado respecto a f si $\forall x \neq y \in S$ se tiene que $d_n(x, y) > \epsilon$, y le llamamos S_n al máximo cardinal de un conjunto (n, ϵ) – separado.

Definimos la *entropía a escala* ϵ como $h(f, \epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n$.

Cabe destacar que el valor de este número depende de la métrica que estemos considerando. No obstante, si hacemos que ϵ tienda a 0, surge una noción de entropía independiente de la métrica en cuestión.

Definición 3.1.1 (Entropía topológica). La entropía topológica de f es

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(f, \epsilon)$$

Estamos obviando ciertos detalles, como la prueba de que existen los límites definidos previamente, ya que harían la lectura demasiado densa y nos distraerían de la línea general. El lector interesado en los mismos puede consultar [BK].

Asumiendo que todo cuadra bien, intentemos comprender la idea subyacente de esta definición, que sería medir de alguna manera la complejidad dinámica del sistema. Por ejemplo, teniendo esto en cuenta, la identidad en cualquier espacio debería tener entropía nula, lo cual claramente es el caso y es fácil de verificar. En efecto, la distancia entre dos puntos queda fija bajo iteraciones y por lo tanto S_n no depende de n . Esto implica que $h(f, \epsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n = 0, \forall \epsilon > 0$ y por ende $h(f) = 0$.

Veamos ahora un ejemplo menos trivial.

Ejemplo 3.1.1. Consideremos el espacio de sucesiones de ceros y unos $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ con la siguiente métrica:

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

Calculemos la entropía del shift $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ que traslada la sucesión hacia la izquierda. Es decir, si $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces, $\sigma(\mathbf{x})_n = x_{n+1}$.

Fijado $\epsilon < 1$, como la cola de una serie convergente tiende a 0, existe k_0 tal que si dos sucesiones coinciden en sus términos entre $-k_0$ y k_0 , entonces su distancia es menor a ϵ (consideramos el mínimo k_0 que verifica esta propiedad).

Observemos ahora que si $n \geq k_0$, entonces si dos sucesiones coinciden en sus términos entre $-k_0$ y $n + k_0$, entonces sus primeros n iterados coincidirán en sus términos entre $-k_0$ y k_0 .

Ahora bien, dado $n \geq k_0$, se pueden escoger exactamente 2^{n+1+2k_0} sucesiones tales que cualquier otra coincida con una de ellas en al menos algún término entre $-k_0$ y $n + k_0$.

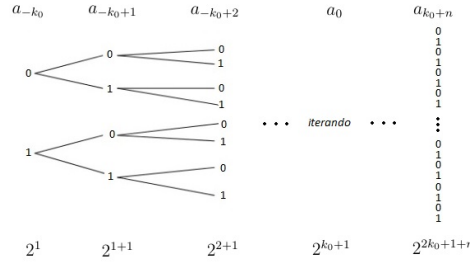


Figura 3.1: Cuántas sucesiones pueden diferir en los términos mencionados?

A su vez, es claro que si un conjunto de sucesiones es tal que al menos uno de los primeros $n + 1$ términos de dos cualesquiera difieran (contando el de índice 0 como primer término), este conjunto estará (n, ϵ) -separado. En efecto, sean $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ dos sucesiones con esta propiedad. Dado que difieren en al menos uno de sus primeros $n + 1$ términos, se tiene que $d_n(\{x_k\}, \{y_k\}) = \max_{0 \leq i \leq n} \{d(\sigma^i(\{x_k\}), \sigma^i(\{y_k\}))\} \geq \frac{1}{2^0} = 1$. En este caso, el máximo cardinal de un conjunto de este tipo es 2^{n+1} (ver figura 3.1).

Las observaciones anteriores nos indican que $2^{n+1} \leq S_n \leq 2^{n+1+2k_0}$, de donde $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^{n+1} = \log 2 \leq h(\sigma, \epsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^{n+1+2k_0} = \log 2$. Como este valor no depende de $\epsilon < 1$, concluimos que $h(\sigma) = \log 2$.

3.2. Intersecciones \mathcal{F} -transversas

Para el correcto desarrollo del siguiente tema, será necesario introducir el concepto de intersección \mathcal{F} -transversa, al cual le dedicaremos toda esta subsección debido a su complejidad.

Recordemos antes que nada que decimos que un mapa entre espacios topológicos es propio si la preimagen de cualquier compacto es un compacto.

Suponemos que $M = \mathbb{R}^2$ y que tenemos una foliación \mathcal{F} .

En primer lugar, consideremos tres líneas (i.e. caminos inyectivos y propios) λ_0, λ_1 y λ_2 ,

Definición 3.2.1. Decimos que λ_2 está por arriba de λ_1 respecto a λ_0 (y λ_1 por debajo de λ_2 respecto a λ_0) si:

- Las tres líneas son disjuntas dos a dos.
- Ninguna de ellas separa a las otras dos.

- Si γ_1 y γ_2 son dos caminos que unen a $z_1 = \lambda_0(t_1)$ y $z_2 = \lambda_0(t_2)$ con $z'_1 \in \lambda_1$ y $z'_2 \in \lambda_2$ respectivamente y que solo se cortan con las líneas en sus extremos, entonces $t_2 > t_1$ (ver figura).

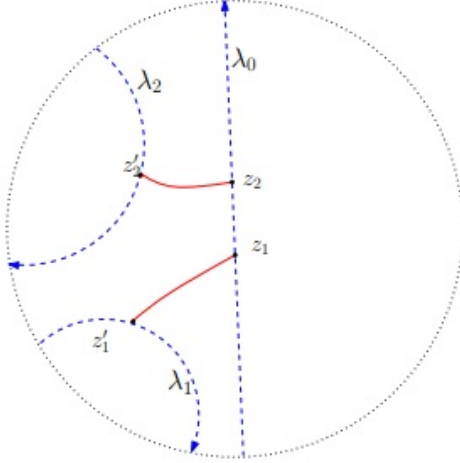


Figura 3.2: Orden de las líneas

Sean $\gamma_1 : J_1 \rightarrow M$ y $\gamma_2 : J_2 \rightarrow M$ dos caminos transversos. El conjunto $X = \{(t_1, t_2) \in J_1 \times J_2 \text{ tales que } \phi_{\gamma_1(t_1)} = \phi_{\gamma_2(t_2)}\}$, si no es vacío, es un intervalo que se proyecta inyectivamente en J_1 y J_2 . Además, para todo $(t_1, t_2) \in \overline{X} \setminus X$, las hojas $\phi_{\gamma_1(t_1)}$ y $\phi_{\gamma_2(t_2)}$ no están separadas en Σ (el espacio de hojas, con la topología cociente). Veamos esto en detalle: sean J_1 y J_2 dos intervalos, y supongamos que $\phi_{\gamma_1(t_1)} = \phi_{\gamma_2(t_2)}$ con $t_1 \in J_1$ y $t_2 \in J_2$. Sean $J_1^- = J_1 \cap [-\infty, t_1]$ y $J_2^- = J_2 \cap [-\infty, t_2]$. Observemos que o bien uno de los caminos $\gamma_1|_{J_1^-}$ y $\gamma_2|_{J_2^-}$ es equivalente al otro, o bien existen $a_1 < t_1$ y $b_2 < t_2$ tales que:

- $\gamma_1|_{(a_1, t_1]}$ y $\gamma_2|_{(a_2, t_2]}$ son equivalentes
- $\phi_{\gamma_1(a_1)} \subset L(\phi_{\gamma_2(a_2)})$ y $\phi_{\gamma_2(a_2)} \subset L(\phi_{\gamma_1(a_1)})$
- $\phi_{\gamma_1(a_1)}$ y $\phi_{\gamma_2(a_2)}$ no están separadas en Σ .

En este contexto, definimos la intersección \mathcal{F} -transversa:

Definición 3.2.2. Sean $\gamma_1 : J_1 \rightarrow M$ y $\gamma_2 : J_2 \rightarrow M$ dos caminos transversos y $\phi_{\gamma_1(t_1)} = \phi_{\gamma_2(t_2)} = \phi$. Decimos que γ_1 interseca a γ_2 de forma \mathcal{F} -transversa positivamente si $\exists a_1, b_1 \in J_1$ con $a_1 < t_1 < b_1$ y $a_2, b_2 \in J_2$ con $a_2 < t_2 < b_2$ tales que:

- $\phi_{\gamma_2(a_2)}$ está por debajo de $\phi_{\gamma_1(a_1)}$ respecto a ϕ (como se muestra en la figura)
- $\phi_{\gamma_2(b_2)}$ está por arriba de $\phi_{\gamma_1(b_1)}$ respecto a ϕ (como se muestra en la figura)

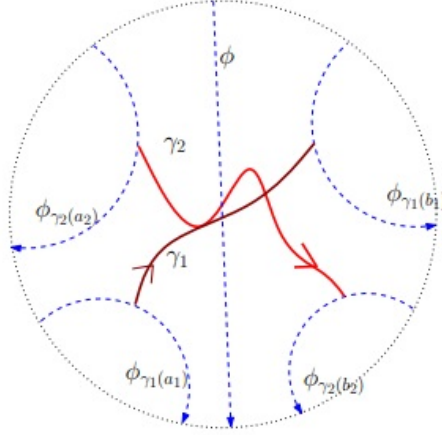


Figura 3.3: Intersección \mathcal{F} -transversa

Notar que γ_1 y γ_2 tienen al menos un punto de intersección, y que podemos encontrar dos caminos transversos γ'_1 y γ'_2 equivalentes a γ_1 y γ_2 respectivamente con un único punto de intersección, situado en ϕ , y tal que la intersección sea topológicamente transversa.

Caso general: Supongamos ahora que tenemos una foliación singular \mathcal{F} en una superficie M . Sean $\gamma_1 : J_1 \rightarrow M$ y $\gamma_2 : J_2 \rightarrow M$ dos caminos transversos que pasan por una misma hoja $\phi = \phi_{\gamma_1(t_1)} = \phi_{\gamma_2(t_2)}$.

Definición 3.2.3. Decimos que γ_1 y γ_2 tienen intersección \mathcal{F} -transversa si existen levantados $\tilde{\gamma}_1 : J_1 \rightarrow \widetilde{\text{dom}}(\mathcal{F})$ y $\tilde{\gamma}_2 : J_2 \rightarrow \widetilde{\text{dom}}(\mathcal{F})$ con una hoja en común $\tilde{\phi} = \phi_{\tilde{\gamma}_1(t_1)} = \phi_{\tilde{\gamma}_2(t_2)}$ que tienen intersección $\tilde{\mathcal{F}}$ -transversa en $\tilde{\phi}$.

3.3. Entropía en superficies compactas

La presente sección tiene como objetivo demostrar que si un homeomorfismo tiene entropía nula, entonces los caminos admisibles transversos no pueden tener intersecciones \mathcal{F} -transversas. Este es un resultado fun-

damental pues es lo que nos permitirá construir los anillos invariantes mencionados en la introducción.

Será necesaria la siguiente definición para un correcto enunciado del teorema:

Definición 3.3.1 (Camino \mathcal{F} -recurrente). Decimos que un camino transverso $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ es positivamente \mathcal{F} -recurrente si para todo segmento $J \subset (0, 1)$ y $\forall t \in (0, 1)$ existe un segmento $J_0 \subset [t, 1)$ tal que γ_{J_0} es equivalente a γ_J

Teorema 3.3.1. *Sea M una superficie compacta, $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$ dos caminos admisibles transversos (eventualmente iguales) \mathcal{F} -positivamente recurrentes con una intersección \mathcal{F} -transversa.*

Se tiene entonces que la entropía topológica de f es estrictamente positiva.

Este resultado es consecuencia directa de la combinación del lema y la proposición que enunciamos a continuación, que cabe destacar que no son nada fáciles de demostrar. De hecho, demostrarlos implicaría sumergirse en arduos tecnicismos, que no siendo relevantes para nuestros propósitos, optaremos por omitirlos y explayarnos más bien en la idea intuitiva que hay detrás de los mismos.

Definición 3.3.2. Decimos que un loop transverso Γ es linealmente admisible de orden q si existen dos subsecciones $(r_k)_{k \geq 0}$ y $(s_k)_{k \geq 0}$ tales que: - $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty$ - $\limsup \frac{r_k}{s_k} \geq \frac{1}{q}$ - $\gamma_{|[0, r_k]}$ es admisible de orden $\leq s_k$.

Lema 3.3.2. *Sean γ_1 y γ_2 dos caminos admisibles positivamente \mathcal{F} -transversos con intersección \mathcal{F} -transversa, y sean I_1 e I_2 dos intervalos. Entonces existe un loop γ linealmente admisible y transverso, con autointersección \mathcal{F} -transversa tal que $\gamma_{|I_1}$ y $\gamma_{|I_2}$ son equivalentes a subcaminos de γ .*

La demostración de este lema es bastante técnica, y se puede encontrar en [LC], pero básicamente se realiza una fina construcción en la cual se van concatenando caminos transversos para formar un loop transverso que verifique la tesis.

Proposición 3.3.3. *Sea Γ un loop transverso con autointersección \mathcal{F} -transversa y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ su levantamiento natural. Supongamos que existen enteros K y r tales que $\gamma|_{[0,K]}$ tiene una autointersección \mathcal{F} -transversa y que $\gamma|_{[0,mK]}$ es admisible de orden mr para todo $m > 1$.*

Entonces la entropía topológica de f vale por lo menos $\log \frac{2}{4r}$.

Como vimos en la sección anterior, la entropía del shift es positiva (vale $\log 2$).

Consideremos el famoso difeo de \mathbb{R}^2 que lleva el cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ en una herradura, conocido como la herradura de Smale.

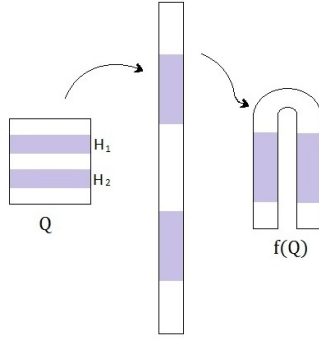


Figura 3.4: Construcción de la Herradura

Supondremos que en las franjas H_1 y H_2 el difeo actúa de forma afín, y en concreto, contrae los segmentos horizontales y expande los verticales de forma uniforme. Observemos que $Q \cap f(Q) = f(H_1) \cup f(H_2) := I_1 \cup I_2$ son dos franjas verticales. Se puede ver de forma inductiva que $\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$ son 2^n franjas verticales, y de la misma manera, que $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(Q)$ son 2^n franjas horizontales.

Ahora, tomemos conjunto de puntos $\Delta = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$ cuya órbita se mantiene en Q .

No es difícil ver que $f|_{\Delta}$ es conjugado al shift de dos símbolos visto previamente, se deduce que la entropía de $f|_{\Delta}$ es positiva.

He aquí la idea detrás del resultado central de esta sección: mediante un fino y sutil trabajo de codificación de caminos, Le Calvez y Tal logran probar que un homeo que satisface las hipótesis de dichos lemas, presenta una configuración similar a la de la herradura de Smale, de dónde se puede finalmente deducir el valor de su entropía.

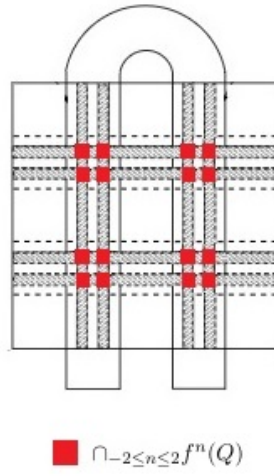


Figura 3.5: Construcción del conjunto Δ

El lector que deseara ver esto en detalle, puede remitirse a [LC].

4. Homeomorfismos conservativos de \mathbb{S}^2 sin entropía

4.1. Introducción

En esta sección nos proponemos demostrar un teorema de P. Le Calvez y F. Tal que permite clasificar la dinámica los homeomorfismos conservativos de la esfera con entropía nula. Comenzaremos introduciendo algunas definiciones necesarias para enunciarlo.

Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un homeomorfismo que preserva orientación. Decimos que $z \in \mathbb{S}^2$ es *recurrente por disco libre* si existe un entero $n > 1$ y un disco abierto D que contiene a z y $f^n(z)$ tal que $f(D) \cap D = \emptyset$ y denotamos $\text{fdrec}(f)$ al conjunto de dichos puntos.

Un punto $z \in \mathbb{S}^2$ se dice heteroclínico si su ω y α límite están contenidos en componentes conexas de $\text{Fix}(f)$.

Supongamos ahora que $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$ y sea $\{W_\alpha\}$ la familia de las componentes conexas de $\text{fdrec}(f)$. En este contexto, definimos A_α como el interior en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$ de la clausura de W_α .

El objetivo será demostrar las tres primeras afirmaciones del siguiente teorema:

Teorema 4.1.1 (Le Calvez - Tal). *Si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$ y $h(f) = 0$, entonces*

1. *Cada A_α es un anillo abierto invariante*
2. *Los A_α son maximales dentro del conjunto de los anillos abiertos invariantes sin puntos fijos.*
3. *Todo punto de $\mathbb{S}^2 \setminus \cup A_\alpha$ es heteroclínico.*
4. *Si C es una componente conexa de la frontera de un A_α en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$, la componente conexa de $\text{Fix}(f)$ que contiene a $\omega(z)$ (resp. $\alpha(z)$) no depende de $z \in C$.*

Para abordar este problema, será necesario probar unos resultados generales sobre el conjunto $\text{fdrec}(f)$ y algunos lemas técnicos.

Luego, presentaremos una versión local del teorema, es decir, relativa a una isotopía maximal dada. (Ver sección 2)

Finalmente, veremos cómo el resultado que buscamos es consecuencia de la versión local.

Se deja de lado la cuarta afirmación ya que para demostrarla se utilizan teorías más sofisticadas que involucran los números de rotación y un teorema de [Mm] que escapan al contenido de este estudio, por lo que instamos al lector interesado a que mire la demostración en [LC].

4.2. El conjunto fdrec

Como acabamos de mencionar, nos sumergiremos en esta sección en un contexto más general, donde $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es simplemente un homeomorfismo que preserva orientación, y probaremos dos proposiciones sobre los puntos recurrentes por disco libre que nos serán sumamente útiles para los resultados ulteriores. De hecho, las mismas son de interés general, y la comprensión del conjunto $\text{fdrec}(f)$ es esencial para nuestro problema central.

Proposición 4.2.1. *El conjunto $\text{fdrec}(f)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es un abierto invariante que contiene a todos los puntos recurrentes que no son fijos.*
2. *Todo punto del complemento es heteroclínico.*
3. *Sus componentes conexas periódicas son fijas.*

Observación 4.2.2. *Observemos que como \mathbb{S}^2 es compacto, para todo punto se cumple que dado un entorno U de $\omega(z)$, existe N tal que $\forall n \geq N$, $f^n(z) \in U$. De lo contrario, existe una sucesión de iterados de z , $(f^{n_k}(z))$ en $\mathbb{S}^2 \setminus U$, que también es compacto, por lo que la misma debe tener una subsucesión que converge a algún punto fuera de $\omega(z)$. Claramente, esto último es absurdo.*

Demostración. Sea $z \in \text{fdrec}(f)$. Si D es un disco libre que lo contiene es claro, por la continuidad de f^n , que si z' está suficientemente cerca de z , D contiene a z' y $f^n(z')$ y por lo tanto z es interior a $\text{fdrec}(f)$,

de donde éste es abierto. Además, $f(D)$ es un disco libre -pués f es un homeomorfismo- que contiene a $f(z)$ y $f^{n+1}(z)$. Luego, $\text{fdrec}(f)$ es invariante.

Por otro lado, si z no es un punto fijo de f , existe un disco libre D que lo contiene. Si es recurrente para el futuro, existe $n > 1$ tal que $f^n(z) \in D$ y en consecuencia $z \in \text{fdrec}(f)$. Si es recurrente para el pasado, existe $n > 1$ tal que $f^{-n}(z) \in D$. Luego, $f^{-n}(z) \in \text{fdrec}(f)$ y por invarianza también z .

Tomemos ahora $z \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{fdrec}(f)$ y supongamos que $\exists z' \in \omega(z) \setminus \text{Fix}(f)$. Tenemos entonces un disco libre D que contiene a z' y dos enteros $n > n'$ tales que $f^n(z)$ y $f^{n'}(z)$ pertenecen a D ya que $z' \in \omega(z)$. De esto se desprende que $f^{n'}(z) \in \text{fdrec}(f)$ (observar que $n - n' > 1$ porque D es un disco libre) y por tanto, también z , lo cual contradice nuestra hipótesis inicial.

Luego, $\omega(z) \subseteq \text{Fix}(f)$. Probaremos a continuación que dado un entorno U de $\text{Fix}(f)$, $\omega(z)$ está en una componente conexa de U , y al ser U arbitrario, se desprende que está en una componente conexa de $\text{Fix}(f)$. Si U es un entorno de $\text{Fix}(f)$, entonces existe otro entorno $U' \subset U$ de $\text{Fix}(f)$ tal que para todo $z' \in U' \cap f^{-1}(U')$, z' y $f(z')$ pertenecen a la misma componente conexa de U [BK], por ser f continua y U un entorno de sus puntos fijos. Además, por la observación 2.1.2, existe N tal que $f^n(z) \in U' \forall n \geq N$ -ya que U' es en particular un entorno de $\omega(z)$ - y por ende en una componente conexa de U .

Veamos ahora, que las componentes conexas periódicas de $\text{fdrec}(f)$ son fijas. Para esto, supongamos que existe una componente W de período $q > 1$. En primer lugar, esto implica ([BK]) que no es una componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$. Entonces, podemos tomar $z' \in \partial W \setminus \text{Fix}(f)$ y dado $z \in W$ encontrar un camino α en W que una estos dos puntos. Esto último se debe a que los puntos accesibles del borde forman un conjunto denso, y tenemos un abierto en ∂W de puntos que no son fijos por f , pués un punto de acumulación de puntos fijos, es fijo. Tomemos ahora un camino β en W de z a $f^q(z)$ y consideremos la concatenación $\alpha^{-1}\beta f^q(\alpha)$ que une los puntos z' y $f^q(z')$. Es claro que eliminando posibles loops, podemos tomar un camino simple γ entre z' y $f^q(z')$ cuya imagen esté

contenida en la de $\alpha^{-1}\beta f^q(\alpha)$. Si ahora observamos que los puntos z' , $f(z')$, $f^q(z')$ y $f^{q+1}(z')$ son distintos pues z' no es periódico (por hipótesis no es fijo ni está en $\text{fdrec}(f)$), deducimos que γ es un camino libre, ya que el resto de su recorrido está contenido en W . Luego, si U_γ es un entorno suficientemente pequeño γ , es un disco libre que contiene a z' y $f^q(z')$ contradiciendo que $z' \notin \text{fdrec}(f)$. □

Veremos a continuación una versión local de esa proposición, es decir, relativa a una isotopía maximal I . Llamaremos \tilde{I} al levantamiento de la isotopía I al cubrimiento universal $\widetilde{\text{dom}}(I)$ de $\text{dom}(I)$ y \tilde{f} al de $f|_{\text{dom}(I)}$. Diremos que un punto $z \in \text{dom}(I)$ es recurrente por disco libre relativo a I si existe un entero $n > 0$ y un disco abierto $D \subset \text{dom}(I)$ que contiene a z y $f^n(z)$ tal que cada levantado en $\widetilde{\text{dom}}(I)$ es disjunto de su imagen por \tilde{f} (a un tal disco lo llamaremos I -libre).

Enunciamos a continuación la versión local de la proposición anterior.

Proposición 4.2.3. *El conjunto de los puntos recurrentes por disco libre relativo a I , $\text{fdrec}(I)$, cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es un abierto invariante que contiene a todos los puntos recurrentes en $\text{dom}(I)$.*
2. *Todo punto de $\mathbb{S}^2 \setminus \text{fdrec}(I)$ es heteroclínico y sus α y ω -límite están contenidos en componentes conexas de $\text{sing}(I)$.*
3. *Sus componentes conexas periódicas son fijas, y sus levantados son conjuntos fijos de \tilde{f} .*

Demostración. Los argumentos que se utilizan para probar las dos primeras afirmaciones son los mismos de la proposición anterior, reemplazando los discos libres por discos I -libres. Idem para probar que toda componente periódica de $\text{fdrec}(I)$ es fija.

Faltaría ver que si W es una componente conexa fija de $\text{fdrec}(I)$, entonces cada componente conexa de $\pi^{-1}(W)$ queda fija por \tilde{f} , donde π denota la proyección desde el cubrimiento universal. Para lograrlo, procederemos por absurdo, suponiendo que alguna de estas componentes

no es fija. Lo primero que se desprende de esta suposición es que entonces, tampoco es una componente conexa de $\widetilde{\text{dom}}(I)$ (ver [BK]), y por ende, W no es una componente conexa de $\text{dom}(I)$. Al igual que en el lema anterior, tomamos un camino α contenido en W que una algún punto $z \in W$ con un punto $z' \in \partial W \cap \text{dom}(I)$ y un camino simple γ entre z' y $f^2(z')$, contenido en W , exceptuando sus extremos. Este último se levanta en un camino libre para \tilde{f} , lo que nos permite encontrar un disco I -libre que contiene a γ , contradiciendo que $z' \notin \text{fdrec}(I)$. □

Para finalizar con esta sección, probaremos un pequeño lema.

Lema 4.2.4. *Si $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$ entonces $\text{fdrec}(f)$ es denso en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$. Como z no es fijo, existe un disco libre D que lo contiene. Ahora, como $f^n(D) \cap (D) \neq \emptyset$ para algún $n > 1$ pues z es no errante, podemos encontrar $z' \in \text{fdrec}(f) \cap D$, lo que, al ser los discos base de la topología, prueba que $z \in \overline{\text{fdrec}(f)}$, i.e., $\text{fdrec}(f)$ es denso en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$. □

4.3. Versión local del teorema

Hemos llegado a uno de los puntos más delicados de este trabajo: enunciar y demostrar la versión local - i.e. relativa a una isotopía maximal I - del teorema anterior. Si bien es conceptualmente análogo, deberemos construir numerosos objetos y trabajarlos para llegar a los resultados deseados, mientras que para la versión original, simplemente nos serviremos de éste último.

Comencemos pues, sin más preámbulos, a desarrollar las nociones necesarias.

Siguiendo la misma línea que para el caso global, nos encontramos en el contexto en que $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$, y denotamos $(W_\beta)_\beta$ a la familia de componentes conexas de $\text{fdrec}(I)$ y A_β al interior en $\text{dom}(I)$ de la clausura de W_β .

Teorema 4.3.1 (Versión local). *Si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $\Omega(f) = \mathbb{S}^2$ y $h(f) = 0$, entonces*

1. *Cada A_β es un anillo abierto invariante, y a su vez, los A_β son maximales dentro del conjunto de los anillos abiertos invariantes incluidos en $\text{dom}(I)$.*
2. *Todo punto de $\mathbb{S}^2 \setminus \cup A_\beta$ es heteroclínico y tanto su α como su ω límite están incluidos en componentes conexas de $\text{sing}(I)$.*
3. *Si C es una componente conexa de la frontera de un A_β en $\text{dom}(I)$, la componente conexa de $\text{sing}(I)$ que contiene a $\omega(z)$ (resp. $\alpha(z)$) no depende de $z \in C$.*

Sintetizando mucho la idea, se podría decir que la demostración se divide en dos grandes pasos.

En una primera instancia, consideraremos una foliación transversa a la isotopía, y a partir de la misma construiremos anillos invariantes con las mismas características de los mencionados en el teorema. A esta parte le dedicaremos toda una subsección, pues engloba una cantidad importante de construcciones y lemas previos.

Posteriormente, veremos que los anillos construidos en virtud de la foliación son, en realidad, no solo independientes de esta, sino que, de hecho, son los A_β que buscamos.

Una vez obtenido este resultado, es relativamente sencillo demostrar las tres primeras afirmaciones de Teorema 4.1.1, y siendo que es nuestro objetivo principal, comenzaremos por esto y posteriormente haremos la construcción de los anillos ya mencionados.

4.4. Demostración del teorema 4.1.1.

Asumiendo la versión local, estamos en condiciones de demostrar prácticamente todo el Teorema 4.1.1. Cabe destacar que, aunque no aparezca explícitamente, la hipótesis de que $h(f) = 0$ es fundamental, pues en esta se basa el grueso de los resultados previos que permitieron llegar a este punto (ver sección 3).

Antes de embarcarnos en la demostración formal, exhibimos un esquema de la prueba, ya que la misma es larga y presenta bastantes detalles técnicos. De este modo el lector podrá, sin mayores dificultades, captar la esencia de ésta, y ahorrarse los tecnicismos a menos de interés particular por las ideas que encierran.

Las dos primeras afirmaciones se trabajan conjuntamente. La estrategia consiste en probar que cualquier anillo invariante sin puntos fijos está contenido algún A_α para luego ver que cada A_α está en contenido en algún anillo de este tipo, lo que prueba que son anillos y su maximalidad. Lo primero es relativamente sencillo, y se basa más que nada en las propiedades ya estudiadas del conjunto $\text{fdrec}(f)$. Lo segundo, si bien es más delicado, delegó lo más difícil del proceso a la versión local, pues básicamente, lo que haremos será utilizar los anillos invariantes de $\text{dom}(I)$ para, dado un A_α , construir un anillo con las características deseadas que lo contenga.

La tercera afirmación es trivial, y con esto culmina lo que podemos desarrollar en este momento.

Estas son, en resumen, las ideas principales que guían los argumentos que detallaremos a continuación, y se espera que sean de utilidad para seguir el hilo de la demostración.

Demostración. Comencemos por probar que todo anillo invariante sin puntos fijos A está contenido en algún A_α para lo que basta ver que $\text{fdrec}(f) \cap A$ es conexo. En efecto, esto implica que $\text{fdrec}(f) \cap A \subset W_\alpha$ para algún α , y entonces $A \subset A_\alpha$ ya que $A = \overline{\text{fdrec}(f) \cap A}$ (recordar que $\text{fdrec}(f)$ es denso en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$) y $A_\alpha = \overline{W_\alpha}$ en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fix}(f)$. Sea W una componente conexa de $\text{fdrec}(f) \cap A$. Si suponemos que no es esencial en A , uniéndole las componentes no esenciales de su complemento, obtenemos un disco invariante $D \subset A$, y como D no tiene puntos errantes, debe contener un punto fijo, llegando a un absurdo por Brouwer ([Br]). Luego, W es esencial en A . Luego, W es esencial en A . Supongamos ahora que existe otra componente conexa W' de $\text{fdrec}(f) \cap A$ distinta de W . Como son esenciales, el complemento en A de $W \cup W'$ tiene una única componente conexa compacta -llamémosle K - situada entre W y W' . La misma debe

ser invariante, ya que su imagen debe ser otra componente de $A \setminus (W \cup W')$ y las otras no son compactas. Pero dado $z \in K$ tal que $z \notin \text{fdrec}(f)$, $\omega(z) \subset \text{Fix}(f)$ lo cual es absurdo pues K es un compacto incluido en A , y por ende está aislado de $\text{Fix}(f)$. En conclusión $\text{fdrec}(f)$ es conexo.

Fijemos ahora un A_α y veamos que está contenido en algún anillo invariante sin puntos fijos. Sea $(z_i)_i$ una sucesión densa en $\text{Fix}(f)$ e I_0 una isotopía maximal tal que $z_0, z_1, z_2 \in \text{sing}(I_0)$. Sabemos que $W_\alpha \subseteq \text{fdrec}(I_0)$ y es conexo, por lo que está contenido en algún W_{β_0} , con $\beta_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$. Luego, por definición de los A_α y A_β se tiene que $A_\alpha \subseteq A_{\beta_0}$.

Si A_{β_0} no tiene puntos fijos, ya probamos lo deseado. En caso contrario, consideramos el primer z_{k_1} que pertenezca a A_{β_0} y una isotopía maximal de $f|_{A_{\beta_0}}$ cuyo conjunto singular contenga a z_{k_1} . Por razones idénticas a las recién expuestas, se tiene que existe $\beta_1 \in \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ tal que $A_\alpha \subseteq A_{\beta_1}$.

Nuevamente, si A_{β_1} no contiene puntos fijos, ya obvitimos el resultado buscado. En caso contrario, proseguimos considerando el primer z_{k_2} que pertenezca a A_{β_1} y razonando de la misma forma que en los casos anteriores. Si el proceso termina para un cierto índice k_n , el anillo A_{β_n} no contiene puntos fijos, y por ende, el teorema quedaría demostrado. En caso contrario, construiremos un anillo sin puntos fijos, observando, en primer lugar, lo siguiente: A_α está incluído en $\cap A_{\beta_i}$.

Ahora, la componente conexa W del interior de $\cap A_{\beta_i}$ que contiene a A_α es invariante. Aún más, no contiene puntos fijos, ya que es abierta y está separada de la sucesión (z_i) que es densa en $\text{Fix}(f)$.

Probemos que para i suficientemente grande, $A_{\beta_{i+1}}$ es esencial en A_{β_i} , lo cual nos permitirá posteriormente demostrar que W es un anillo.

Supongamos que acontece lo contrario, i.e., que existen infinitos índices para los cuales $A_{\beta_{i+1}}$ **no** es esencial en A_{β_i} , y bajo este supuesto, consideremos un loop $\Gamma \in W$.

Es claro que, para cada índice que cumpla que $A_{\beta_{i+1}}$ no es esencial en A_{β_i} , Γ es el borde de un disco en $A_{\beta_{i+1}}$, por lo que al final, resulta ser el borde de un disco en $\cap A_{\beta_i}$.

Como esto sucede para cualquier loop en W , resulta que W es un disco, lo que contradice el hecho de que no contiene puntos fijos (nuevamente por Brower [Br]). Queda probado pues que $A_{\beta_{i+1}}$ es esencial en A_{β_i} a

partir de cierto índice i_0 .

Se puede ver de forma análoga que todo loop $\Gamma \in W$ que sea inesencial en A_{β_i} para $i \geq i_0$ es borde de un disco en W . Esto último implica que W es un anillo abierto.

La tercer afirmación es bastante obvia: el complemento de los A_α está contenido en $\mathbb{S}^2 \setminus \text{fdrec}(f)$, y ya probamos en la proposición 3.2.1 que los puntos de dicho conjunto son heteroclínicos.

□

4.5. Resultados previos

Supongamos ahora que tenemos dada una foliación \mathcal{F} transversa a I . Sabemos que dos trayectorias transversas no pueden tener una intersección \mathcal{F} -transversa (recordar 3) debido a que $h(f) = 0$ (ver sección anterior). Aún más, una trayectoria transversa no puede tener una autointersección \mathcal{F} -transversa, y por ende, la trayectoria completa de cualquier punto bi-recurrente es equivalente a un loop transverso simple Γ .

En lo que sigue, llamaremos $\mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}$ al conjunto de tales loops (a menos de equivalencia), y $\text{rec}(f)_\Gamma$ al conjunto de puntos cuya trayectoria completa es equivalente a Γ .

Observemos ahora que si la trayectoria completa de $z \in \text{dom}(I)$ corta una hoja de la foliación más de una vez, para todo segmento de $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$ existe un entorno U_z de z tal que dicho segmento es equivalente a algún segmento de $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z')$ para $z' \in U_z$. Es decir, podemos obtener una partición en abiertos disjuntos e invariantes del conjunto de puntos cuya trayectoria completa corta una hoja más de una vez. Denotaremos W_Γ a cada abierto de esta partición. Es claro que $z \in W_\Gamma$ si $I_{\mathcal{F}}^{\mathbb{Z}}(z)$ corta una hoja más de una vez y es equivalente a algún subcamino de Γ . Definimos $A_\Gamma := \text{int}(\overline{W_\Gamma})$ y U_Γ al conjunto de hojas que cortan a Γ .

Con estas definiciones, podemos enunciar la proposición fundamental de esta sección.

Proposición 4.5.1. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. A_Γ es un anillo abierto invariante y esencial de U_Γ
2. Todo punto de $\text{dom}(I) \setminus \cup_{\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}} A_\Gamma$ es heteroclínico y sus respectivos α y ω límites están incluidos en subconjuntos conexos de $\text{sing}(I)$
3. Si C es una componente conexa de la frontera de A_Γ en $\text{dom}(I)$, entonces las componentes conexas de $\text{sing}(I)$ que contienen a $\alpha(z)$ y $\omega(z)$ son independientes de $z \in C$

Demostración. Demostremos primero la segunda afirmación, que es la más inmediata. Si $z' \in \text{dom}(I)$ pertenece $\alpha(z)$ o $\omega(z)$ para algún $z \in \text{dom}(I)$, entonces la trayectoria completa de z corta infinitas veces a la hoja $\Phi_{z'}$ y por lo tanto $z \in \cup_{\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}} W_\Gamma$. Es decir que ningún punto del α u ω límite de puntos en $\text{dom}(I) \setminus \cup_{\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}} A_\Gamma$ puede pertenecer a $\text{dom}(I)$.

Veamos ahora la primer afirmación. Supondremos aquí que $\text{dom}(I)$ es conexo, pues de otro modo, trabajaríamos en la componente conexa de $\text{dom}(I)$ que contiene a Γ .

Fijemos un levantamiento $\tilde{\gamma}$ de Γ en $\widetilde{\text{dom}(I)}$, y llamémosle T al automorfismo de cubrimiento que verifica $\tilde{\gamma}(t+1) = T(\tilde{\gamma}(t))$.

Consideremos ahora el cubrimiento $\widehat{\text{dom}(I)} = \frac{\widetilde{\text{dom}(I)}}{T}$ (observar que se trata de un anillo pues su π_1 es \mathbb{Z}) y llamémosle \hat{I} y \hat{f} a los levantamientos respectivos de I y f , $\hat{\mathcal{F}}$ a la foliación orientada inducida y $\hat{\Gamma}$ a la proyección de $\tilde{\gamma}$.

Si $\hat{\pi} : \widehat{\text{dom}(I)} \rightarrow \text{dom}(I)$ es la proyección, observemos que la unión de hojas de $\hat{\mathcal{F}}$ (de ahora en más $U_{\hat{\Gamma}}$) que cortan a $\hat{\Gamma}$ es la componente anular de $\hat{\pi}^{-1}(U_\Gamma)$.

Observar que no existe ninguna curva cerrada Γ' contenida en $U_{\hat{\Gamma}}$ cuya imagen sea disjunta de sí misma, ya que sino la región acotada por $\hat{\pi}(\Gamma')$ y $\hat{\pi}(\hat{f}(\Gamma'))$ sería errante. Aún más, se tiene que los α y ω límite de cualquier hoja de $\hat{\mathcal{F}}$ que esté contenida en $U_{\hat{\Gamma}}$ son ambos fines del anillo, y que cualquier hoja que no intersekte $U_{\hat{\Gamma}}$ desconecta $\widehat{\text{dom}(I)}$.

Agregando los fines del anillo N a la izquierda de $\hat{\Gamma}$ y S a la derecha obtenemos una esfera que denotaremos por $\widetilde{\text{dom}(I)}_S$. Hagamos ahora un par de observaciones:

1. El complemento de $U_{\hat{\Gamma}}$ tiene dos componentes conexas: $l(\hat{\Gamma}) \cup \{N\}$

y $r(\widehat{\Gamma}) \cup \{S\}$, siendo $l(\widehat{\Gamma})$ y $r(\widehat{\Gamma})$ la izquierda y derecha de $\widehat{\Gamma}$ respectivamente.

2. $\widehat{\Gamma}$ es el unico loop transverso a $\widehat{\mathcal{F}}$ a menos de equivalencia.

Por otro lado, se tiene que el conjunto de puntos bi-recurrentes de f es denso (ver lema 4.2.4), y si uno de estos puntos corta una hoja más de una vez, entonces $\widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}$ es equivalente a $\widehat{\Gamma}$. Sea $\text{rec}(f)_{\widehat{\Gamma}}$ el conjunto de dichos puntos.

Si $z \notin \text{rec}(f)_{\widehat{\Gamma}}$ entonces $\widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}$ pasa por $l(\widehat{\Gamma})$ o por $r(\widehat{\Gamma})$. Estas dos posibilidades son excluyentes ya que al igual que en $\text{dom}(I)$, dos trayectorias no pueden tener intersección $\widehat{\mathcal{F}}$ -transversa, y por ende $\widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}$ no puede intersectar $\widehat{\Gamma}$. A los conjuntos de estos dos tipos de puntos los llamaremos $\text{rec}(f)_N$ y $\text{rec}(f)_S$.

Sea $W_{\widehat{\Gamma}}$ el conjunto de puntos cuya trayectoria transversa corta alguna hoja al menos dos veces, W_N el conjunto de puntos cuya trayectoria transversa corta $l(\widehat{\Gamma})$ y W_S aquellos cuya trayectoria transversa corta $r(\widehat{\Gamma})$.

Estos últimos son tres abiertos invariantes que contienen a $\text{rec}(f)_{\widehat{\Gamma}}$, $\text{rec}(f)_N$ y $\text{rec}(f)_S$ respectivamente y cuya unión es densa.

Observar que el α y ω límite de cualquier punto $z \notin W_{\widehat{\Gamma}}$ debe ser uno de los fines. Es claro que ambos son N si $z \in \text{rec}(f)_N$ y S si $z \in \text{rec}(f)_S$. De hecho, probaremos que son ambos N para $z \in \overline{W_N}$ y S para $z \in \overline{W_S}$.

A su vez, cada hoja ϕ que no pertenece a $U_{\widehat{\Gamma}}$ es borde de un disco disjunto con $U_{\widehat{\Gamma}}$. Por lo tanto, si $\widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}}^{\mathbb{Z}}$ corta a ϕ y $\phi \subset l(\Gamma)$ entonces se tiene que z o $\hat{f}(z)$ pertenece a $l(\Gamma)$, y lo mismo vale para $r(\Gamma)$.

Por último, observemos que $W_{\widehat{\Gamma}}$ es homeomorfo a W_{Γ} vía la proyección, y lo mismo vale para $A_{\widehat{\Gamma}} = \widetilde{\text{dom}}(I)_S \setminus (\overline{W_N} \cup \overline{W_S})$ que se proyecta en A_{Γ} .

El primer problema se reduce entonces a probar que $A_{\widehat{\Gamma}}$ es un anillo (hecho que se deducirá de los lemas que demostramos a continuación), y teniendo esto dado, nos ocuparemos de ver que A_{Γ} es esencial en U_{Γ} .

Lema 4.5.2. *Existe una hoja ϕ_S en $U_{\widehat{\Gamma}}$ que no intersecta $\overline{W_N}$*

Demostración. En primer lugar, notar que si la intersección entre la trayectoria transversa de cualquier punto de $\text{rec}(f)_N$ y $U_{\widehat{\Gamma}}$ es no vacía,

entonces es equivalente a algún subcamino $\widehat{\Gamma}|_J$ de $\widehat{\Gamma}$, siendo J un intervalo abierto de $[0, 1]$. Llamémosle \mathcal{J} a la unión de dichos intervalos.

Como dos trayectorias no pueden tener intersección transversa, no hay solapamiento entre estos subcaminos. Es decir, si dos intervalos de \mathcal{J} se intersectan, entonces uno está contenido en el otro.

Por lo tanto, $\exists t \in [0, 1]$ que no pertenece a ningún $J \in \mathcal{J}$. En efecto, de poder cubrir $[0, 1]$ con intervalos de \mathcal{J} , por compacidad podríamos extraer un subcubrimiento finito de cardinal mínimo $r \geq 2$, pero por conexión, al menos dos de estos intervalos se intersectarían. Como, en ese caso, uno estaría contenido en el otro, reduciríamos el cardinal r del cubrimiento, lo cual es absurdo.

Sea $\phi_S = \phi_{\widehat{\Gamma}(t)}$. Como $\text{rec}(f)_N$ es denso en \overline{W}_N , ϕ_S no corta la trayectoria transversa de ningún punto de \overline{W}_N , por lo que, en particular, no corta \overline{W}_N .

□

Lema 4.5.3. *El conjunto de puntos cuya trayectoria transversa no corta ϕ_S (de ahora en adelante O_S) es un abierto conexo y esencial.*

Demostración. Fijemos un levantado $\tilde{\phi}$ de ϕ_S en $\widetilde{\text{dom}}(I)$. El conjunto de puntos cuya trayectoria se intersecta con $\tilde{\phi}$ (al que llamaremos \tilde{O}) se puede escribir como $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}^{-k} \left(\overline{L(\tilde{\phi}) \cap R(\tilde{f}(\tilde{\phi}))} \right)$. Es claro que es conexo y simplemente conexo, y por ende, su proyección O_S es conexo. El levantado de cualquier punto de $\text{rec}(f)_{\widehat{\Gamma}}$ pertenece a todos los trasladados $T^k(\tilde{O})$. Por lo tanto la unión de todos estos trasladados es conexa, lo que implica que O_S es esencial.

□

Lema 4.5.4. *$S \notin \overline{W}_N$ y $z \in \overline{W}_N$, se tiene que $\alpha(z) = \omega(z) = \{N\}$.*

Demostración. \overline{W}_N es conexo ya que es igual a $\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(l(\Gamma) \cup \{N\})}$. Por otro lado, no contiene a S ya que es conexo y $\overline{W}_N \cap O_S = \emptyset$. Ahora bien, como sabemos que tanto el α y ω límite de cualquier $z \in \overline{W}_N$ es uno de los fines, este debe ser N pues $S \notin \overline{W}_N$.

□

Es claro que como \overline{W}_S y \overline{W}_N cumplen las mismas propiedades, estos lemas valdrán también para \overline{S} . Es decir, existe una hoja ϕ_N en $U_{\widehat{\Gamma}}$ que no

intesecta a \overline{W}_S y el conjunto O_N de puntos cuya trayectoria transversa no corta a ϕ_N es un abierto conexo y esencial. Aún más, $N \notin \overline{W}_S$ y $\forall z \in \overline{W}_S$, $\alpha(z) = \omega(z) = \{S\}$.

Se tiene entonces que $\overline{W}_N \cap \overline{W}_S = \emptyset$. Además, dos puntos de $O_N \cap O_S$ no pueden estar separados ni por \overline{W}_N ni por \overline{W}_S ya que ambos son conexos y O_S no se interseca con \overline{W}_N , ni O_N con \overline{W}_S . Luego, no pueden estar separados por la unión de estos últimos ya que su intersección es vacía.

En virtud de lo anterior, $O_N \cap O_S$ debe estar contenido en una componente conexa O de $(\overline{W}_N \cup \overline{W}_S)^c = A_{\hat{\Gamma}}$.

En resumen, pudimos ver que:

$$W_{\hat{\Gamma}} \subset O_S \cap O_N \subset O \subset A_{\hat{\Gamma}} \subset \overline{W}_{\hat{\Gamma}}$$

De esto se desprende que todos los conjuntos involucrados en esta cadena de inclusiones tienen la misma clausura, por lo que $O \subset A_{\hat{\Gamma}} \subset \overline{O}$, de dónde $A_{\hat{\Gamma}}$ es conexo. A su vez, es un anillo pues es conexo y su complemento son dos conexos disjuntos, y esencial en $\widehat{\text{dom}}(I)$ ya que sino, una de las componentes conexas de su complemento en $\widehat{\text{dom}}(I)_S$ contendría a ambos fines.

Todo lo que nos falta es probar la tercer afirmación. Observemos antes que nada que toda hoja de \mathcal{F} es intersectada por un loop transverso, y por ende es errante (aquí nos estamos refiriendo a la dinámica de la hoja). Esto implica que el α y ω límite de una hoja están contenidos en dos componentes conexas distintas de $\text{sing}(I)$.

Fijemos $\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}$. El complemento de A_Γ tiene dos componentes conexas. Una de ellas (la denotaremos por $L(A_\Gamma)$) contiene a todas las singularidades y hojas de $l(\Gamma)$. Análogamente definimos $R(A_\Gamma)$. Sea Y la unión de todos los intervalos $J \in \mathcal{J}$ definidos en uno de los lemas previos. Un punto $t \in [0, 1]$ pertenece a Y si y solo si existe $z \in \text{rec}(f) \cap L(A_\Gamma)$ cuya trayectoria transversa corte a $\phi_{\Gamma(t)}$. Si C es una componente conexa de $(\partial A_\Gamma \setminus \text{sing}(I)) \cap L(A_\Gamma)$, entonces el conjunto $J_C = \{t \in [0, 1] : C \cap \phi_{\Gamma(t)} \neq \emptyset\}$ es un intervalo contenido en Y . Sea (t_-, t_+) la componente conexa de Y que contiene a J_C . La afirmación que queremos probar es consecuencia directa del siguiente lema.

Lema 4.5.5. *El intervalo J_C es exactamente (t_-, t_+) . Aún más, $\forall z \in C$, la componente conexa de $\text{sing}(I)$ que contiene a $\alpha(z)$ y $\omega(z)$ coincide con las componentes conexas de $\text{sing}(I)$ que contienen a $\omega(\phi_{\Gamma(t_-)})$ y $\omega(\phi_{\Gamma(t_+)})$ respectivamente.*

Demostración. Sea $z \in C$. Cada $f^k(z)$ pertenece a una hoja $\phi_{\Gamma(t_k)}$, con $t_k \in [0, 1]$. Por definición de Y , se sabe que la trayectoria transversa de z no corta ninguna hoja $\phi_{\Gamma(t)}$ con $t \notin Y$, por lo que $t \in (t_-, t_+)$ si $\phi_{\Gamma(t)}$ corta la trayectoria. De hecho, se tiene que la sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset (t_-, t_+)$ es creciente. Definimos $t'_- = \lim_{k \rightarrow -\infty} t_k$ y $t'_+ = \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k$. Sea F'_+ la componente conexa de $\text{sing}(I)$ que contiene a $\omega(\phi_{\Gamma(t'_+)})$.

Veamos que la componente conexa de $\text{sing}(I)$ que contiene a $\omega(z)$ es F'_+ y que $t'_+ = t_+$. Se puede ver lo mismo para $\alpha(z)$.

Sabemos que $\omega(z) \subset L(A_\Gamma) \cap \text{sing}(I)$. Por lo tanto, existe una sucesión $(z'_k)_{k \geq 0}$ tal que $z'_k \in \phi^-(z_k)$ para todo k y que converge.^a F'_+ (i.e. todo entorno de F'_+ contiene a la sucesión a partir de cierto k).

Probemos ahora que todo entorno de F'_+ contiene al segmento γ_k de $\phi_{\Gamma(t_k)}$ que va de z'_k a z_k , para k suficientemente grande.

De no ser así, existe una subsucesión de $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ que converge en la topología Hausdorff a un conjunto que contiene algún $z \notin \text{sing}(I)$. Este punto pertenecería a $l(\Gamma')$, y la hoja ϕ_z cortarían algún loop $\Gamma' \in \mathcal{G}_{I, \mathcal{F}}$. Podemos elegir un loop que pase por z , de tal manera que sabremos que z_k pertenecerá a $L(\Gamma')$ para infinitos k . Se deduce que la componente conexa de $\text{sing}(I)$ que contiene a $\omega(z)$ pertenece a $L(\Gamma')$. Pero esto implica que también pertenece a $L(A_{\Gamma'})$. Como esta última está incluida en el disco abierto $A_{\Gamma'} \cup L(A_{\Gamma'})$, todo z_k pertenece a este disco para k suficientemente grande. Esto es absurdo ya que $z \in \partial A_\Gamma$ porque $A_{\Gamma'} \cup L(A_{\Gamma'})$ está en el interior de $L(A_\Gamma)$.

Faltaría ver que $t'_+ = t_+$. Si $t'_+ < t_+$, entonces $\phi_{\Gamma(t'_+)}$ corta algún loop $\Gamma' \in \mathcal{G}_{I, \mathcal{F}}$ tal que $A_{\Gamma'} \subset L(A_\Gamma)$ y se puede ver al igual que en lo anterior que para k suficientemente grande z_k pertenecería al disco abierto $A_{\Gamma'} \cup L(A_{\Gamma'})$, obteniendo la misma contradicción. \square

\square

Hemos adquirido ya las herramientas necesarias para probar el teorema 4.3.1.

4.6. Demostración del teorema 4.3.1.

Comencemos por destacar la similitud entre el teorema 4.3.1 y la proposición 4.5.1. Lo que probamos para los conjuntos A_Γ es casi exactamente lo que queríamos probar para los A_β : la diferencia entre estos conjuntos aparentemente sería la maximalidad como anillos invariantes.

Ahora bien, cuando uno define los A_Γ , es fácil intuir que lo que se está construyendo es un anillo (ver subsección anterior), lo cual no es el caso para los A_β . Lo grandioso del asunto es que, en realidad, cada A_β es igual a un A_Γ , razón por la cual probando además que cualquier anillo invariante está contenido en algún A_β el teorema queda demostrado.

Al lector atento le podría generar cierto escepticismo el hecho de que los A_Γ estén contruidos a partir de una foliación dada, pero lo que sucede es que como conjuntos son independiente de la foliación, asunto que será aclarado en la demostración que sigue.

Dem Teo. 4.3.1. En primer lugar, observemos que si Γ y Γ' son dos elementos distintos de $\mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}$, entonces existe una hoja $\phi \in U_\Gamma \setminus U_{\Gamma'}$. Luego, los conjuntos $\alpha(\phi)$ y $\omega(\phi)$ están separados por Γ pero no por Γ' , lo que implica que estos loops no son homotópicos (por homotopía libre) en $\text{dom}(I)$.

En segundo lugar, veamos que las familias $(\text{rec}(f)_\Gamma)_{\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}}$ y $(A_\Gamma)_{\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}}$ no dependen de \mathcal{F} , sino que simplemente de la isotopía I . Es decir, si \mathcal{F}' es otra foliación transversa a I entonces toda $\Gamma \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}}$ es homotópica a una única $\Gamma' \in \mathcal{G}_{I,\mathcal{F}'}$. Aún más, veremos que $\text{rec}(f)_\Gamma = \text{rec}(f)_{\Gamma'}$.

Sea $z \in \text{rec}(f)$ y $D \subset \text{dom}(I)$ un disco abierto tal que $z \in D$. Para todo par de puntos z', z'' en D , podemos elegir un camino $\gamma_{z',z''}$ que los una. Ahora, sea $(n_k)_{k \geq 0}$ una sucesión creciente de enteros tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = z$. Para k suficientemente grande, el camino $I^{n_k}(z) \cdot \gamma_{f^{n_k}(z),z}$ es un loop cuya clase de homotopía no depende de la elección de D ni de γ . En particular, si $z \in \text{rec}(f)_\Gamma$, dicha clase es un múltiplo de la

clase de Γ . Como la clase de homotopía de $I^{n_k}(z) \cdot \gamma_{f^{n_k}(z), z}$ claramente no depende de la foliación \mathcal{F} , se deduce que la de $\Gamma \in \mathcal{G}_{I, \mathcal{F}}$ tampoco.

Veamos ahora que cualquier anillo invariante $A \subset \text{dom}(I)$ está contenido en algún A_β . Exactamente igual que como en el caso global, esto se logra observando que $\text{fdrec}(I) \cap A$ es conexo.

Vayamos ahora a lo principal, i.e., que cada A_β es igual a algún A_Γ . Una de las inclusiones es trivial ya que los A_Γ son anillos invariantes.

La otra inclusión la probaremos de la siguiente manera: basta ver que todo punto recurrente por disco I -libre está contenido en algún A_Γ , pues de esto se desprendería que cada A_β es unión de A_Γ , y esta unión solo puede estar formada por uno ya que se trata de conjuntos conexos.

Evoquemos ahora el siguiente resultado de [LC]:

Proposición 4.6.1. *Sea $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo isotópico a la identidad en una superficie M y sea I una isotopía macimal. Si X es un conjunto finito contenido en un disco I -libre, entonces existe una foliación transversa \mathcal{F} tal que X está contenido en una hoja de \mathcal{F}*

Por lo tanto, si D es un disco I -libre que contiene a z y $f^n(z)$, con $n > 0$, la proposición anterior nos permite elegir una foliación tal que dichos puntos estén en una misma hoja, y por lo tanto, en un mismo W_Γ . Por lo tanto, todo disco I -libre está contenido en un A_Γ , lo que concluye la prueba.

□

Referencias

- [BK] M. Brown, J.M. Kister, Invariance of complementary domains of a fixed point set, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **91** (1984), 503–504.
- [Br] L. E. J. Brouwer : Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.*, **72** (1912), 37-54.
- [BW] R. Bowen, Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces *Trans. Amer. Math. Soc.* **153** (1971), 401–414; erratum: *Trans. Amer. Math. Soc.* 181 (1973), 509–510
- [J] O. Jaulent: Existence d’un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface, *Annales de l’institut Fourier*, **64** (2014), no.4, 1441–1476.
- [Lec] P. Le Calvez: Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **102**(2005), 1–98.
- [LC] P. Le Calvez, F.Tal: Forcing theory for transverse trajectories of surface homeomorphisms, *Invent. Math.*, **84** (2017)
- [Mm] S.Matsumoto: Prime end rotation numbers of invariant separating continua of annular homeomorphisms, *Proc. Am. Math. Soc.*, **140** (2012), 839-845.
- [Bo] P. Boyland: Topological methods in surface dynamics, *Topology Appl.*, **58** (1994), no. 3, 223–298
- [Mo] T. Matsuoka: Periodic points and braid theory. Handbook of topological fixed point theory, *Springer, Dordrecht*, (2005), 171–216.
- [FH] Entropy zero area preserving diffeomorphisms of \mathbb{S}^2 , *Geom. and Top.*, 16(2013), no.4,2187–2284.