Trabajo monográfico

Una prueba analítica del Teorema de Poincaré-Hopf

Juan Nario

Diciembre 2024

Orientador:

Miguel Paternain
Facultad de Ciencias, UdelaR

Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar el clásico Teorema de Poincaré-Hopf utilizando métodos de Análisis. La herramienta elemental para esto son los operadores elípticos y la teoría de índice de los operadores Fredholm. Utilizando estas herramientas, las deformaciones de Witten permiten obtener el teorema de Poincaré-Hopf a partir de la invariancia del índice por deformaciones de operadores elípticos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El Teorema de Poincaré-Hopf es un resultado clásico de geometría/topología diferencial, el cual relaciona las singularidades que puede tener un campo X en una variedad M con la característica de Euler $\chi(M)$. En definitiva, relaciona un objeto topológico con un objeto analítico. Las pruebas usuales de este resultado van más de la mano de la topología que del análisis. En esta monografía nos proponemos hacer lo contrario.

Vamos a enunciar este teorema, no sin antes dar un par de definiciones previas. Sean M y N variedades de dimensión n orientadas sin borde y $f : M \to N$ un mapa suave. Si M es compacta y N es conexa podemos definir el grado de Brouwer de f como

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign}(df_x)$$

siendo $y \in N$ un valor regular de f. Ahora consideremos U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo suave y p una singularidad aislada de X. Definimos el índice de X en p como

$$\operatorname{ind}_p X = \deg(\widehat{X})$$

siendo $\widehat{X} : \partial B(p, \varepsilon) \to S^{n-1}$ dado por $\widehat{X}(q) = \frac{X(q)}{\|X(q)\|}$ para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Luego por medio de parametrizaciones se puede extender esta definición a campos en variedades de la forma esperable. Para ver en detalle, ir al Capítulo 5 de [6]. Con esto estamos listos para enunciar Poincaré-Hopf.

Teorema (Poincaré-Hopf). Sea M una variedad compacta sin borde y X un campo de vectores en M con finitas singularidades. Entonces vale

$$\sum_{X(p)=0} \operatorname{ind}_p X = \chi(M)$$

Una acotación importante es que basta con probar el resultado asumiendo que las singularidades de X son no degeneradas. Lo que haremos será probarlo en este caso, en el que el teorema se reduce a lo siguiente:

$$\sum_{X(p)=0} \operatorname{sign}(dX_p) = \chi(M)$$

En [6] también se puede encontrar esta simplificación y una prueba clásica de Poincaré-Hopf, la cual únicamente utiliza argumentos de topología diferencial. La prueba en la que se basa esta monografía utiliza ideas radicalmente distintas, y también más difíciles. Esto hace que sean más destacables las herramientas utilizadas que el resultado en sí. Se podría decir que la primera semilla de esto la puso Witten en [10], en donde da una prueba de las desigualdades de Morse. A partir de estas ideas es que surge esta prueba de Poincaré-Hopf, para la cual seguimos [11].

El primer paso de la demostración consiste en reinterpretar la característica de Euler a través del Teorema de Descomposición de Hodge, lo que nos permite relacionarla con la teoría de índice de operadores elípticos. Luego vamos a deformar a los operadores elípticos involucrados por el campo de vectores a estudiar. En este proceso, veremos que la prueba puede ser localizada a entornos de los ceros del campo y estudiando estos entornos completaremos la demostración. Aunque antes de llegar a todo esto, vamos a necesitar introducir a los operadores pseudodiferenciales y su relación con los operadores Fredholm.

Ahora describiremos brevemente la estructura de este trabajo. Desde el Capítulo 2 hasta el Capítulo 5 nos centramos en desarrollar las herramientas analíticas que usaremos, que son los operadores Fredholm y los operadores pseudodiferenciales. En particular, probaremos que el índice es invariante por homotopías (Capítulo 2) y que los operadores pseudodiferenciales elípticos son Fredholm al restringirlos a ciertos espacios de Sobolev (Capítulo 5).

En el Capítulo 6 estudiamos la Teoría de Hodge, con la cual conectamos la teoría de índice con la característica de Euler. Mostraremos que el operador de de Rham-Hodge $d + d^*$ actuando en las formas diferenciales cumple

$$\chi(M) = \mathrm{ind}\left(d + d^* : \Omega^{\mathrm{par}}(M) \to \Omega^{\mathrm{impar}}(M)\right)$$

En el Capítulo 7 estudiamos ciertas deformaciones de este operador: las deformaciones de Witten. A través de ellas podemos usar la teoría de índice para estudiar las singularidades de un campo, que es el lado izquierdo de la tesis de Poincaré-Hopf. Lo importante sobre estas deformaciones es que siguen siendo operadores Fredholm y tienen el mismo índice que el operador original. Finalmente, construiremos una homotopía a partir del operador deformado y podremos concluir la demostración de Poincaré-Hopf.

Cabe destacar que si el lector quiere ir directamente a la prueba de Poincaré-Hopf, basta con conocer los resultados del Capítulo 2 y los dos últimos resultados del Capítulo 5. Teniendo esto, ya se puede ir al Capítulo 6.

Capítulo 2

Operadores Fredholm

El objetivo de esta sección es probar que el índice de un operador Fredholm es invariante por homotopías. En lo que sigue siempre trabajamos con espacios de Banach de dimensión infinita. Usamos como referencia el apéndice A de [7].

Primero fijamos notación. Consideramos V y W espacios de Banach. Anotamos $\mathcal{L}(V, W)$ al espacio de transformaciones lineales continuas de V en W y $\mathcal{K}(V, W)$ al subespacio de $\mathcal{L}(V, W)$ formado por los operadores compactos. Para referirnos al dual de un espacio V o de un operador T usamos V' y T', respectivamente.

Recordar que para definir la topología en $\mathcal{L}(V, W)$ usamos la norma operador con las métricas dadas en V y W. Por otro lado, si W es un subespacio lineal cerrado de V, entonces V/W con la norma $\|[v]\| = \text{ínf}\{\|v - w\| : w \in W\}$, siendo $[v]$ la clase de $v \in V$ en V/W, es un espacio de Banach.

Usaremos herramientas básicas de análisis funcional, pero en particular es conveniente recordar los siguientes resultados.

- Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ con rango finito. Entonces T es compacto.
- $\mathcal{K}(V, W)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(V, W)$. Más aún, si $T \in \mathcal{K}(V, W)$, $S_1 \in \mathcal{L}(V_1, V)$ y $S_2 \in \mathcal{L}(W, W_2)$, entonces $S_1 K S_2 \in \mathcal{K}(V_1, W_1)$.
- Si $K \in \mathcal{K}(V)$, entonces $\dim(\text{Ker}(I + K)) < \infty$.
- Si $T \in \mathcal{K}(V, W)$, entonces $T' \in \mathcal{K}(W', V')$.
- Sea V subespacio de W. Supongamos que V tiene dimensión finita o codimensión finita, es decir, $\dim(W/V) < \infty$. Entonces existe un Z subespacio de W tal que

$$V \oplus Z = W$$

Para ver las demostraciones de estos resultados ir al Apéndice A de [7]. Luego de estos comentarios, ahora sí vamos a lo que nos compete. Comenzamos con la definición de operador Fredholm.

Definición 2.1. $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice Fredholm si $\dim(\text{Ker } T) < \infty$ y $\text{codim}(T(V)) < \infty$. Definimos el índice de T como

$$\text{Ind } T = \dim(\text{Ker } T) - \dim(W/T(V))$$

Al conjunto de estos operadores los anotamos $\text{Fred}(V, W)$.

Observación 2.2. Notar que tenemos el isomorfismo $(W/T(V))' \simeq T(V)^{\perp}$, en donde $^{\perp}$ hace referencia al anulador.[1] Es inmediato verificar que $T(V)^{\perp} = \text{Ker } T'$, por lo que que también podemos escribir

$$\text{Ind } T = \dim(\text{Ker } T) - \dim(\text{Ker } T')$$

Para probar que el índice es invariante por homotopías lo que haremos será mostrar que los operadores Fredholm forman un conjunto abierto en $\mathcal{L}(V,W)$ y que el índice es constante en cada componente conexa.

Teorema 2.3. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Son equivalentes:

- T es Fredholm
- Existen $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W,V)$, $K_1 \in \mathcal{K}(V)$ y $K_2 \in \mathcal{K}(W)$ tales que $S_1T = I_V + K_1$ y $TS_2 = I_W + K_2$, donde I_V, I_W denotan la identidad en V y W, respectivamente.

Demostración. Supongamos que T es Fredholm. Al ser $\text{codim}(\text{Im } T) < \infty$, existe $W_1 \subset W$ subespacio de dimensión finita tal que $W = \text{Im } T \oplus W_1$. Por otro lado, al ser $\dim(\text{Ker } T) < \infty$, existe $V_1 \subset V$ subespacio tal que $V = \text{Ker } T \oplus V_1$.

Notar que $T|_{V_1} : V_1 \to \text{Im } T$ es un isomorfismo. Por lo tanto, podemos definir $S : V \to W$ dado por $S|_{\text{Im } T} = T^{-1}$, $S|_{W_1} = 0$ y tenemos

$$-ST + I_V = \pi_{\text{Ker } T}, \quad -TS + I_W = \pi_{W_1}$$

en donde $\pi_{\text{Ker } T}$ y π_{W_1} son las proyecciones sobre los respectivos subespacios. Notar que son operadores compactos porque tienen rango finito, por lo que ya tenemos una dirección.

Ahora veamos el recíproco. De la igualdad $ST = I_V + K_1$ deducimos $\text{Ker } T \subset \text{Ker } ST = \text{Ker } (I_V + K_1)$, que es de dimensión finita. Por otro lado, de $TS = I_W + K_2$ deducimos $S'T' = I_{W'} + K_2'$. De forma análoga a lo anterior concluimos $\dim(\text{Ker } T') < \infty$, y por lo tanto T es Fredholm.

$\square$

Observación 2.4. En realidad podemos tomar $S_1 = S_2$ pues difieren en un operador compacto. En efecto, notar que tenemos

$$S_1 + S_1K_2 = S_1(I_V + K_2) = S_1TS_2 = (I_W + K_1)S_2 = S_2 + K_1S_2$$

Entonces $S_1 = S_2 + K_1S_2 - S_1K_2$. Al ser K_1S_2 y S_1K_2 operadores compactos, resulta que S_1 y S_2 difieren en un operador compacto. Luego vale

$$TS_1 = T(S_2 + K_1S_2 - S_1K_2) = TS_2 + T(K_1S_2 - S_1K_2) = I_W + K_2 + T(K_1S_2 - S_1K_2)$$

Como $T(K_1S_2 - S_1K_2)$ es un operador compacto, deducimos que vale la segunda condición del Teorema anterior tomando $S_1 = S_2$.

Observación 2.5. $\mathcal{K}(V)$ es un ideal bilátero cerrado de $\mathcal{L}(V)$, por lo que $\mathcal{Q}(V) = \frac{\mathcal{L}(V)}{\mathcal{K}(V)}$ es un espacio de Banach. Más aún, tenemos que es un álgebra de Banach con unidad en el caso que V es de dimensión infinita. Cuando es de dimensión finita simplemente tenemos $\mathcal{Q}(V) = 0$ y todos los operadores son Fredholm.

A $\mathcal{Q}(V)$ se la conoce como álgebra de Calkin y nos va a ayudar a caracterizar los operadores Fredholm. De hecho, el resultado anterior nos dice que

$$T \in \text{Fred}(V,W) \iff \exists S \in \mathcal{L}(W,V) \text{ tal que } \pi(ST) = \pi(I_V),\ \pi(TS) = \pi(I_W)$$

siendo $\pi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{Q}(V)$ la proyección.

[1] Si estuviésemos en un espacio Hilbert, serían los elementos perpendiculares a V.

En general tenemos que los invertibles en un álgebra de Banach con unidad forman un conjunto abierto, como veremos a continuación.

Lema 2.6. Sea A un álgebra de Banach con unidad. Si $x \in A$ es invertible y $h \in A$ tal que $\|h\| \leq \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, entonces $x+h$ es invertible.

Demostración. Notar que $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\|\|h\| \leq 1/2 < 1$. Por lo tanto $1_A + x^{-1}h$ es invertible y podemos escribir a $x+h$ como producto de elementos invertibles.

$$x + h = x(1_A + x^{-1}h)$$

□

Usando esto y la observación sobre el álgebra de Calkin podemos probar lo siguiente.

Proposición 2.7. $\mathrm{Fred}(V, W)$ es abierto en $\mathcal{L}(V, W)$.

Demostración. Consideramos el operador lineal continuo $P_1 : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(W)$ definido por $P_1(T, S) = TS$. Fijemos ahora un $T \in \mathrm{Fred}(V, W)$. Tenemos también el $S \in \mathcal{L}(W, V)$ asociado a T de la Observación 2.5. Al ser $\pi(TS) = \pi(I_W)$ invertible en $\mathcal{Q}(W)$ y π continua, existe un entorno U_1 de T tal que $\pi(T_i S)$ es invertible para todo $T_i \in U_1$.

Si de igual forma definimos un operador $P_2 : \mathcal{L}(V, W) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(V)$ dado por $P_2(T, S) = ST$, podemos obtener un entorno U_2 de T tal que $\pi(ST_j)$ es invertible para todo $T_j \in U_2$. Luego concluimos que los operadores en $U_1 \cap U_2$, que es un abierto que contiene a T, son Fredholm.

□

Teorema 2.8. Ind: $\mathrm{Fred}(V, W) \to \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Fred}(V, W)$. Notar que es suficiente probar que si $S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $||S - T||$ es suficientemente chico, entonces $\mathrm{Ind}\ S = \mathrm{Ind}\ T$.

Al ser $\mathrm{Ker}T$ de dimensión finita y $T(V)$ de codimensión finita, existen complementos $V_0 \subset V$ y $W_0 \subset W$, siendo W_0 de dimensión finita.

$$V = \mathrm{Ker}\ T \oplus V_0, \ \ W = T(V) \oplus W_0$$

Dado $S \in \mathcal{L}(V, W)$ definimos $\tau_S : V_0 \oplus W_0 \to W$ dado por $\tau_S(v, w) = Sv + w$. Notar que τ_T es un isomorfismo de espacios de Banach, por lo que si S está suficientemente cerca de T resulta que τ_S también lo es. A partir de ahora nos vamos a restringir a los $S \in \mathcal{L}(V, W)$ que cumplen lo anterior y están en la misma componente conexa de $\mathrm{Fred}(V, W)$ que T.

Tenemos que $\tau_S(V_0)$ es cerrado en W y $\mathrm{codim}(\tau_S(V_0)) = \dim W_0$. Además, $\tau_S(V_0) = S(V_0)$, por lo que

$$\mathrm{codim}(S(V)) \leq \mathrm{codim}(S(V_0)) = \dim\ W_0 = \mathrm{codim}(T(V))$$

Al ser $\mathrm{Ker}\ S \cap V_0 = 0$ y $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}\ S \oplus V_0) < \infty$ existe un $Z \subset V$ de dimensión finita tal que

$$V = \mathrm{Ker}\ S \oplus Z \oplus V_0$$

Por otro lado, como S es inyectiva en $Z \oplus V_0$, tenemos $S(V) = S(V_0) \oplus S(Z)$, que es cerrado y tiene codimensión finita pues $\mathrm{codim}(S(V)) \leq \mathrm{codim}(S(V_0)) < \infty$.

Observar que $\mathrm{Ker}\ S \oplus Z$ y $\mathrm{Ker}\ T$ son complementos de V_0, por lo que son isomorfos. También tenemos $\frac{W}{S(V)} \oplus S(Z) \simeq \frac{W}{S(V_0)} \simeq \frac{W}{T(V)}$. De esto podemos deducir las siguientes igualdades:

$$\dim(\mathrm{Ker}\ S) + \dim\ Z = \dim(\mathrm{Ker}\ T)$$

$$\text{codim}(S(V)) + \dim S(Z) = \text{codim}\, T(V)$$

Recordar que vale $\dim Z = \dim S(Z)$, por lo que concluimos $\text{Ind}\, S = \text{Ind}\, T$.

□

Del resultado anterior deducimos que el índice de un operador es invariante por homotopías y terminamos esta sección.

Corolario 2.9. Sea $H : V \times [0,1] \to W$ una homotopía tal que $H_s \in \text{Fred}(V, W)$ para todo $s \in [0,1]$. Entonces $\text{Ind}\, H_0 = \text{Ind}\, H_s$ para todo $s \in [0,1]$.

En particular, esto nos dice que las deformaciones por operadores compactos no modifican el índice.

Capítulo 3

Espacios de funciones en variedades

Cuando hablemos de operadores pseudodiferenciales vamos a necesitar hablar de distribuciones. Hacemos unos breves comentarios sobre las mismas, tanto en el caso de abiertos de $\mathbb{R}^n$ como para variedades con fibrados vectoriales. En definitiva, esto es un punteo de lo dicho en el Capítulo 2 de [8].

3.1. Teoría local

En esta sección Ω va a ser un abierto de $\mathbb{R}^n$ fijo. Recordamos las estructuras que se le da a los espacios de funciones usuales y damos un par de definiciones extra.

Definición 3.1.1. Definimos

$$\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$$

con la topología inducida por las seminormas $\|\cdot\|_{r,K}$, siendo $K \subset \Omega$ compacto y r entero no negativo, definidas por

$$\|f\|_{r,K} = \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leq r\}$$

Definición 3.1.2. Llamamos funciones test a

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$$

con la siguiente topología. Primero, para cada compacto $K \subset \Omega$, consideramos $\mathcal{E}_K := C_K^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones test soportadas en K, con la topología inducida por $\mathcal{E}(\Omega)$. Luego podemos escribir

$$\mathcal{D}(\Omega) = \cup_K \mathcal{E}_K(\Omega)$$

siendo la unión sobre todos los compactos $K \subset \Omega$, y a $\mathcal{D}(\Omega)$ le damos la topología del límite inductivo. Recordar que la topología del límite inductivo es la topología localmente convexa más fina que hace que las inclusiones $\mathcal{E}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ sean continuas.

Definición 3.1.3. El espacio de las distribuciones en $\mathbb{R}^n$ es el dual de las funciones test

$$\mathcal{D}'(\Omega) := (\mathcal{D}(\Omega))'$$

con la topología fuerte, que es la de la convergencia uniforme en conjuntos acotados. En definitiva, $u_n \to u$ si y solo si $u_n(x) \to u(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Observación 3.1.4. Notar que se tiene el encaje $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por $f \mapsto u_f$.

$$u_f(g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Decimos que una distribución es suave si está en la imagen de este encaje.

Definición 3.1.5. El soporte singular de una distribución $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, consiste en el complemento de los puntos $x \in U$ tales que existe $\chi \in C_c^\infty(U)$, con $\chi(x) \neq 0$, de forma que χu es suave.

Un noción importante para poder hablar de operadores pseudodiferenciales es la de núcleo distribucional, sobre todo para poder generalizar este concepto a variedades.

Definición 3.1.6. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $k \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ y $K : \mathcal{D}(Y) \to \mathcal{D}'(X)$ mapa continuo. Si cumplen que para todo $u \in \mathcal{D}(X), v \in \mathcal{D}(Y)$ vale

$$\langle k, u \otimes v \rangle = \langle Kv, u \rangle$$

decimos que k es el núcleo de K.

De hecho, por el **Teorema del núcleo de Schwartz**, se sabe que todo núcleo k induce un único operador K y viceversa. Una prueba de esto se puede encontrar en [3], Teorema 5.2.1.

Terminamos esta parte dando la definición de distribuciones de soporte compacto y ya pasamos al caso de variedades.

Definición 3.1.7. Llamamos distribuciones de soporte compacto a

$$\mathcal{E}'(\Omega) := (\mathcal{E}(\Omega))'$$

dotado con la topología fuerte. En este caso, significa que $u_n \to u$ si y solo si $u_n(x) \to u(x)$ para todo $x \in \mathcal{E}(\Omega)$.

3.2. Teoría global

Los espacios definidos en la sección anterior se pueden generalizar a fibrados en variedades. Antes de arrancar, fijamos una variedad M de dimensión n y un fibrado vectorial complejo E sobre M de rango p.

Definición 3.2.1. Una sección suave de un fibrado vectorial $\pi : E \to M$ es un mapa suave $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$. Al conjunto de las secciones suaves lo anotamos $\Gamma^\infty(M, E)$ y a su espacio dual lo anotamos $\Gamma^{-\infty}(M, E)$.

Definición 3.2.2. Anotamos

$$\mathcal{E}(M, E) := \Gamma^\infty(M, E)$$

al espacio de las secciones suaves de E con la siguiente topología localmente convexa. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto de M tal que los U_i admiten al mismo tiempo una carta (U_i, κ_i) y una trivialización del fibrado $\tau_i : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^p$. Esto induce un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\phi_i : \Gamma^\infty(E|_{U_i}) \longrightarrow C^\infty(\kappa_i(U_i))^p$$

Teniendo esto, ahora definimos las seminormas que nos van a inducir la topología. Consideremos los índices $\gamma = (i, l, K, r)$, siendo

- $i \in I$ para indexar los abiertos U_i.
- $1 \leq l \leq p$ para indexar la l-ésima coordenada de $\phi(s|_{U_i})$.
- $K \subset \kappa(U_i)$ compacto.
- r entero no negativo.

Definimos la seminorma $\|\cdot\|_\gamma$ en $\Gamma^\infty(M,E)$ como

$$\|s\|_\gamma = \|\phi(s|U_i)^l\|_{r,K} \qquad (s \in \Gamma^\infty(M,E))$$

En definitiva, lo que hacemos es restringir s a U_i, lo llevamos a $\mathcal{E}(\kappa_i(U_i))^p$ vía ϕ_i, tomamos su l-ésima coordenada y aplicamos la seminorma $\|\cdot\|_{K,r}$ de $\mathcal{E}(\kappa_i(U_i))$.

Observación 3.2.3. La topología obtenida no depende de las elecciones realizadas. Más aún, como podemos tomar $\mathcal{U}$ numerable, se puede probar que $\mathcal{E}(M,E)$ es un espacio de Fréchet.

Definición 3.2.4. Definimos

$$\mathcal{D}(M,E) := \Gamma_c^\infty(M,E)$$

como el espacio de las secciones suaves de soporte compacto con la siguiente topología. Como podemos escribir

$$\mathcal{D}(M,E) = \cup_K \mathcal{E}_K(M,E)$$

donde la unión es sobre todos los compactos $K \subset M$, y en cada $\mathcal{E}_K(M,E)$ considerar la topología inducida por $\mathcal{E}(M,E)$, entonces en $\mathcal{D}(M,E)$ podemos usar la topología del límite inductivo.

Únicamente nos resta generalizar las distribuciones y las distribuciones de soporte compacto a variedades. A diferencia del caso local, no vamos a tomar el dual de $\mathcal{D}(M,E)$. Primero observamos:

1. Anotamos D al fibrado dado por las formas de grado máximo en M. Entonces podemos integrar las secciones de soporte compacto de D y tenemos un operador

$$\int_M : \Gamma_c^\infty(M,D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

2. Consideramos el fibrado

$$E^\vee := E^* \otimes D = \mathrm{Hom}(E,D)$$

que la fibra en cada $x \in M$ consiste en el espacio vectorial complejo de los mapas $\mathbb{C}$-lineales $E_x \to D_x$. Lo importante sobre $E^\vee$ es que nos permite tener un mapa

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \Gamma^\infty(M,E^\vee) \times \Gamma^\infty(M,E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M,D)$$

el cual es simplemente evaluar punto a punto. Luego integrando las secciones de D tenemos

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \Gamma_c^\infty(M,E^\vee) \times \Gamma(M,E) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (s_1,s_2) \longmapsto \int_M \langle s_1, s_2\rangle$$

Con estas consideraciones, damos la definición de sección generalizada.

Definición 3.2.5. Definimos las secciones generalizadas como

$$\mathcal{D}'(M,E) := (\mathcal{D}(M,E^\vee))'$$

dotado con la topología fuerte.

Observación 3.2.6. En las definiciones anteriores, cuando tomamos $M=\Omega$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $E=\mathbb{C}_M$ tenemos una identificación clara entre el caso local y el caso global, mientras que para secciones generalizadas tenemos que tener un pequeño cuidado. Llamemos

- $\mathcal{D}'(\Omega)_{local}$ al dual de $\mathcal{D}(\Omega)=C_c^\infty(\Omega)$ usado en el caso local.
- $\mathcal{D}'(\Omega)_{global}$ al dual de $\mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C}_M)=\Gamma_c^\infty(\Omega,\mathbb{C}_M)$ usado en el caso global.

Tenemos una identificación entre D y $\mathbb{C}_M$, pues ambos son fibrados de dimensión 1 sobre $M=\Omega$. Por lo tanto

$$\mathbb{C}_M^\vee = \mathbb{C}_M^* \otimes D \simeq D^* \otimes D \simeq \mathbb{C}_M$$

Luego $\mathcal{D}(M,\mathbb{C}_M)=\mathcal{D}(M,\mathbb{C}_M^\vee)' \simeq \mathcal{D}(M,\mathbb{C}_M)'$. Al también poder identificar $\Gamma_c^\infty(M,\mathbb{C}_M) \simeq C_c^\infty(M)$, concluimos

$$\mathcal{D}(M,\mathbb{C}_M) \simeq \mathcal{D}(M,\mathbb{C}_M)' \simeq \mathcal{D}(M)$$

Definición 3.2.7. Llamamos secciones generalizadas de soporte compacto a

$$\mathcal{E}'(M,E) := (\mathcal{E}(M,E^\vee))'$$

dotado con la topología fuerte.

Notar que tenemos la inclusión

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M,E) &\hookrightarrow \mathcal{D}'(M,E) \\ s &\longmapsto \langle\,\cdot\,,s\rangle \end{aligned}$$

Usando el mismo emparejamiento también tenemos la inclusión

$$\mathcal{D}(M,E) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M,E)$$

En definitiva, de forma análoga al caso local, tenemos el siguiente diagrama de inclusiones

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(M,E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}(M,E) \arrow[d] \\ \mathcal{E}'(M,E) \arrow[r] & \mathcal{D}'(M,E) \end{tikzcd}$$

Observación 3.2.8. Al igual que para el caso local, hay una asociación entre distribuciones y operadores lineales como la dada en el teorema del núcleo de Schwartz. Dado un $K \in \mathcal{D}'(N\times M, F\boxtimes E^\vee)$ se le puede asociar un $P_K : \mathcal{D}(M,E) \to \mathcal{D}'(N,F)$, siendo esta una correspondencia 1-1. Más aún, esto define un isomorfismo entre espacios localmente convexos. Para más detalle, ver la sección 2.4 de [8].

Capítulo 4

Operadores pseudodiferenciales

En esta sección buscamos introducir los operadores pseudodiferenciales entre variedades con fibrados vectoriales. Para ello primero necesitamos hablar sobre operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$ y en variedades, pues las definiciones son recursivas. Lo que haremos será presentar la teoría en estos últimos dos casos sin entrar en los detalles, para luego sí centrarnos en el caso de fibrados vectoriales, que es lo que realmente necesitamos. Como referencia para esta sección usamos los capítulos 5, 7 y 8 de [8].

Comenzamos fijando notación para los multi-índices. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ anotamos

- $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$
- $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_k \leq \beta_k$ para todo $1 \leq k \leq n$
- $\partial_j = \partial/\partial x_j$
- $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$
- Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, tenemos $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$

4.1. Operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$

Primeras definiciones

Consideramos un operador diferencial P en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha(x) D_x^\alpha$$

siendo $D_x^\alpha = (-i\partial_x)^\alpha$ y los coeficientes suaves en $\mathbb{R}^n$. El símbolo de P es la función $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ dada por

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Si tomamos $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y anotando $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, podemos escribir

$$D^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Por lo tanto la acción de P en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Además, vale que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, existe una constante $C_{K,\alpha,\beta}$ tal que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + \|\xi\|)^{d-|\beta|} \quad ((x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n)$$

Los operadores pseudodiferenciales van a estar definidos por la misma fórmula, pero con p en una familia más grande de funciones. Una motivación para el desarrollo de esta teoría es que nos permite construir de forma sistemática inversas de operadores elípticos, a menos de *smoothing operators*. Algunas consecuencias inmediatas son regularidad elíptica y los estimativos elípticos. Más aún, cuando llevamos estas definiciones a operadores en variedades compactas, se obtiene que los operadores elípticos son Fredholm. En nuestro caso, lo que nos interesa es esto último.

Definición 4.1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $d \in \mathbb{R}$. El espacio de símbolos en U de orden a lo sumo d, que anotamos $S^d(U)$, es el espacio de funciones $q \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tales que para todo compacto K, $K \subset U$, y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ existe una constante $C_{K,\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + \|\xi\|)^{d-|\beta|} \quad ((x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n)$$

A $S^d(U)$ lo podemos dotar con la topología localmente convexa inducida por las seminormas

$$\mu_{K,k}^d(q) := \max_{|\alpha|,|\beta| \leq k} \sup_{K \times \mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|)^{|\beta|-d} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x,\xi)|$$

siendo $K \subset U$ compacto y $k \in \mathbb{N}$. De hecho, $S^d(U)$ es un espacio de Fréchet con esta topología. Por otro lado, notar que si $d_1 \leq d_2$ entonces $S^{d_1}(U) \subset S^{d_2}(U)$, con inclusión continua.

Anotamos

$$S^\infty(U) := \bigcup_{d \in \mathbb{R}} S^d, \qquad S^{-\infty}(U) := \bigcap_{d \in \mathbb{R}} S^d$$

Luego $S^{-\infty}(U)$ es el espacio de funciones suaves $f : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que para todo compacto $K \subset U$, $k \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathbb{N}$

$$\nu_{K,k,N}(f) := \max_{|\alpha|,|\beta| \leq k} \sup_{K \times \mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|)^N |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x,\xi)| < \infty \tag{4.1.2}$$

Las normas $\nu_{K,k,N}$ inducen una topología localmente convexa en $S^{-\infty}(U)$, que también lo convierten en un espacio de Fréchet.

Conociendo los símbolos, ahora queremos definir los operadores diferenciales. Para ello, primero vamos a introducir a $\Psi^{-\infty}(U)$, que es el espacio de los smoothing operators en U. Dado $K \in C^\infty(U \times U)$, definimos el operador integral T_K como el operador lineal continuo $C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dado por

$$T_K f(x) := \int_U K(x,y) f(y) dy$$

Definición 4.1.3. Anotamos $\Psi^{-\infty}(U)$ al subespacio de $\mathrm{Hom}(C_c^\infty(U), C^\infty(U))$ formado por los operadores de la forma T_K, con $K \in C^\infty(U \times U)$.

Observación 4.1.4. Si extendemos la definición de T_K a $\mathcal{E}'(U)$, que son las distribuciones de soporte compacto en U, por la fórmula

$$T_K u(x) := u(K(x,\cdot))$$

resulta que $T_K(u)$ es suave. Esto se debe a que $x \mapsto K(x, \cdot)$ es una función suave en U que toma valores en el espacio de Fréchet $C^\infty(U)$ y que $u : C^\infty(U) \to \mathbb{C}$ es continua y lineal. Más aún, tenemos que $T_K : \mathcal{E}'(U) \to C^\infty(U)$ es lineal y continuo.

Por otro lado, por el teorema del núcleo de Schwartz se tiene que cualquier mapa continuo y lineal $T : \mathcal{E}'(U) \to C^\infty(U)$ es de la forma T_K, para un único $K \in C^\infty(U \times U)$. En definitiva, $\Psi^{-\infty}(U) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'(U), C^\infty(U))$

Ahora vamos camino a dar la definición de operador pseudodiferencial en $U \subset \mathbb{R}^n$. Fijemos $p \in S^{-\infty}(U)$. Notar que entonces la integral

$$W(p)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) d\xi$$

es absolutamente convergente para todo $x \in U$ y $W(p) \in C^\infty(U)$. En efecto, fijando $x \in U$ y derivando debajo de la integral tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} (\partial_{x_j} + i\xi) p(x, \xi) d\xi$$

Podemos intercambiar el orden de derivación e integración pues el integrando de la derecha es continuo y está dominado por una función integrable, lo que probamos a continuación. Si fijamos $x \in U$ y tomamos $K \subset U$ compacto que contiene a x vale

$$\begin{aligned}
|e^{i\xi x}(\partial_{x_j} + i\xi)p(x, \xi)| &\leq |\partial_{x_j} p(x, \xi)| + |\xi p(x, \xi)| \\
&\leq (1 + \|\xi\|)^{-n-2} \nu_{K,1,n+2}(p) + (1 + \|\xi\|)|p(x, \xi)| \\
&\leq (1 + \|\xi\|)^{-n-2} \nu_{K,1,n+2}(p) + (1 + \|\xi\|)(1 + \|\xi\|)^{-n-2} \nu_{K,1,n+2}(p) \\
&= (1 + \|\xi\|)^{-n-2} \nu_{K,1,n+2}(p) + (1 + \|\xi\|)^{-n-1} \nu_{K,1,n+2}(p)
\end{aligned}$$

Concluimos recordando que $(1 + \|\xi\|)^{-\alpha}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ cuando $\alpha > n$. Iterando esto deducimos que $W(p)$ es una función suave.

Además, si $p \in S^d(U)$ y $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aplicando la regla de Leibniz se prueba que la función pF definida por $(x, \xi) \mapsto p(x, \xi)F(\xi)$ pertenece a $S^{-\infty}(U)$. Estos comentarios justifican las siguientes definiciones.

Definición 4.1.5. Sea $p \in S^d(U)$. Definimos el operador $\Psi_p : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dado por

$$\Psi_p f(x) := W(p\widehat{f})(x)$$

Definición 4.1.6. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $d \in \mathbb{R}$. Un operador pseudodiferencial de orden d en U es un operador lineal continuo $P : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ de la forma

$$P = \Psi_p + T$$

con $p \in S^d(U)$ y $T \in \Psi^{-\infty}(U)$. Al espacio de estos operadores lo anotamos $\Psi^d(U)$.

Esta noción generaliza a los operadores diferenciales, pues si P es un operador diferencial de orden d en U, entonces su símbolo principal p pertenece a $S^d(U)$ y tenemos $P = \Psi_p$.

Observación 4.1.7. Si utilizando el teorema del núcleo de Schwartz pensamos a los operadores pseudodiferenciales como distribuciones, se tiene que su soporte singular está incluido en la diagonal de $U \times U$. Esto significa que el operador puede tener singularidades en la diagonal, pero no por fuera de ella. Como nos centraremos en estudiar los operadores pseudodiferenciales en fibrados, vamos a asumir esto. Para una prueba ver Proposición 4.19 de [2].

Notar que si el operador no tiene ninguna singularidad entonces necesariamente es un smoothing operator.

En general la composición de operadores pseudodiferenciales no tiene sentido, pues tienen como dominio $C_c^\infty(U)$ y codominio $C^\infty(U)$. Por ello introducimos la siguiente definición.

Definición 4.1.8. Un operador $T : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ es propiamente soportado si

- Para todo conjunto compacto $A \subset U$ existe un conjunto compacto $B \subset U$ tal que si $\text{sop}(u) \subset A$, entonces $\text{sop}(Tu) \subset B$.
- Para todo conjunto compacto $A \subset U$ existe un conjunto compacto $C \subset U$ tal que si $u = 0$ en C, entonces $Tu = 0$ en A.

Observación 4.1.9. Los operadores diferenciales son propiamente soportados. Además, si T es propiamente soportado, entonces $I - T$ también lo es.

Si $T : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ es propiamente soportado, a partir de la primer condición de la definición deducimos que mapea funciones de soporte compacto en funciones de soporte compacto, mientras que la segunda condición nos permite extender de forma continua T a $C^\infty(U)$. En particular, esto hace que tenga sentido la composición de operadores pseudodiferenciales propiamente soportados.

Para terminar esta introducción definimos la noción de símbolo para estos operadores. Para ello primero enunciamos el siguiente resultado, que es el Teorema 5.4.5 de [8].

Teorema 4.1.10. El mapa $p \mapsto \Psi_p$ induce un isomorfismo lineal

$$S^d(U)/S^{-\infty}(U) \xrightarrow{\simeq} \Psi^d(U)/\Psi^{-\infty}(U)$$

Definición 4.1.11. La inversa del isomorfismo del Teorema 4.1.10, que anotamos

$$\sigma : \Psi^d(U)/\Psi^{-\infty}(U) \xrightarrow{\simeq} S^d(U)/S^{-\infty}(U)$$

lo llamamos mapa símbolo.

Definición 4.1.12. El mapa símbolo principal σ^d de orden d el siguiente mapa inducido por el mapa símbolo

$$\sigma^d : \Psi^d(U)/\Psi^{d-1}(U) \xrightarrow{\simeq} S^d(U)/S^{d-1}(U)$$

Expansión de símbolos

Lo que resta de esta sección vamos a dedicarlo a hablar sobre expansión de símbolos. Ahora mismo esto parece desconectado de lo anterior, pero va a tomar relevancia al probar la existencia de parametrices.

Definición 4.1.13. Sean $p \in S^\infty(U)$ y $\{d_j\} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ con $\text{lím}_{j\to\infty} d_j = -\infty$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ sea $p_j \in S^{d_j}(U)$. Entonces

$$p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j \tag{4.1.14}$$

significa que para todo $d \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ vale

$$p - \sum_{j=0}^{k} p_j \in S^d(U)$$

Decimos que (4.1.14) es una expansión asintótica del símbolo p.

Observación 4.1.15. Si dos símbolos $p, p' \in S^{\infty}(U)$ tienen la misma expansión, entonces $p - p' \in S^d(U)$ para todo $d \in \mathbb{R}$, por lo que $p - p' \in S^{-\infty}(U)$. En definitiva, una expansión asintótica determina el símbolo p módulo $S^{-\infty}(U)$.

Antes de probar el resultado que nos interesa sobre las expansiones asintóticas, damos una definición más.

Definición 4.1.16. Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $A \subset U$ compacto y $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, definimos

$$S^d_A(U) := \{p \in S^d(U) \mid \mathrm{pr}_1(\mathrm{sop}\ p) \subset A\}$$

siendo $\mathrm{pr}_1 : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la proyección.

Proposición 4.1.17. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\{d_j\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $\mathrm{lím}_{j\to\infty} d_j = -\infty$. Supongamos que para cada j tenemos un símbolo $p_j \in S^{d_j}(U)$ dado. Entonces existe un símbolo $p \in S^d(U)$, con $d = \mathrm{máx}\, d_j$, tal que

$$p \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j$$

y $\mathrm{pr}_1(\mathrm{sop}\ p) \subset \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{pr}_1(\mathrm{sop}\ p_j)}$.

Demostración. Notar que usando una partición de la unidad en U podemos reducirlo al caso en que estamos trabajando en un compacto $A \subset U$ y tenemos dados $p_j \in S^{d_j}_A(U)$. Así basta con probar la existencia de un $p \in S^d_A(U)$ tal que vale la tesis. Otra acotación es que a menos de agrupar términos, podemos asumir que la sucesión es estrictamente decreciente, por lo que tenemos $d = d_0$.

Tomamos $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(\xi) = 0$ si $\|\xi\| \le 1$ y $\chi(\xi) = 1$ si $\|\xi\| \ge 2$. Ahora, para $t > 0$ definimos $\chi_t : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\chi_t(x, \xi) = \chi(t\xi)$. Notar que $\mathrm{sop}(\chi_t) \cap (U \times B(0, t^{-1})) = \emptyset$.

Consideramos $\{t_j\} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathrm{lím}_{j\to\infty} t_j = 0$ y definimos nuestro candidato

$$p := \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{t_j} p_j$$

Esto define una función suave en $U \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pues la suma es localmente finita con respecto a la variable ξ. Además, como cada $p_j \in S^{d_j}_A(U)$, tenemos que $\mathrm{pr}_1(\mathrm{sop}\ p) \subset A$. Sin embargo, no nos sirve cualquier sucesión $\{t_j\}$ para la demostración, por lo que consideramos la siguiente afirmación, la cual probaremos luego.

Afirmación: Existe $\{t_j\} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ con $\mathrm{lím}_{j\to\infty} t_j = 0$ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ la siguiente serie converge uniformemente en $U \times \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j\ge l} (1 + \|\xi\|)^{|\beta| - d_l} \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi [\chi_{t_j} p_j]$$

Continuamos con la prueba. Usando una tal $\{t_j\}$, deducimos que las series

$$r_l := \sum_{j\ge l} \chi_{t_j} p_j$$

convergen absolutamente en $S^{d_l}_A(U)$ (relativo a las seminormas $\nu_{K,k,N}$ definidas en (4.1.2)). Al ser $S^{d_l}_A(U)$ un espacio completo, $r_l \in S^{d_l}_A(U)$ para todo $l \in \mathbb{N}$. En particular, $p = r_0 \in S^d_A(U)$. Luego

$$p - \sum_{j=0}^{l-1} p_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{l-1} (\chi_{t_j} - 1) p_j}_{\in S^{-\infty}_A(U)} + \underbrace{r_l}_{\in S^{d_l}_A(U)}$$

Notar que $\sum_{j=0}^{l-1}(\chi_{t_j}-1)p_j \in S_A^{-\infty}(U)$ por tener ξ-soporte compacto. Así deducimos que lo que está a la izquierda de la igualdad pertenece a $S_A^{d_l}(U)$ y concluimos la prueba.

□

Vamos con la prueba de la afirmación, por lo que en los siguientes dos lemas p_j y χ_t son los usados en la Proposición 4.1.17. Para ello primero necesitamos el siguiente resultado.

Lema 4.1.18. Sea $j \geq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Entonces existe una constante $C_{j,\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\chi_t p_j](x,\xi)\right| \leq C_{j,\alpha,\beta}(1+\|\xi\|)^{d_j-\beta}$$

para todo $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ y $0 < t \leq 1$.

Demostración. La desigualdad es clara cuando $\|\xi\| \leq t^{-1}$, pues en ese caso $\chi_t = 0$. Por otro lado, cuando $||\xi|| \geq 2t^{-1}$ tenemos $\chi_t = 1$, por lo que se deduce directamente de la definición de $S^{d_j}(U)$. Resta estudiar el caso en que $t^{-1} \leq \|\xi\| \leq 2t^{-1}$.

Notar que $\partial_\xi^\beta(\chi_t p_j)$ es una combinación lineal de $\partial_\xi^\gamma \chi_t \, \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j$ con $\gamma \leq \beta$. Por lo tanto, nos basta con tener la cota para $|\partial_x^\alpha(\partial_\xi^\gamma \chi_t \, \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j)(x,\xi)|$. Si anotamos $(\partial_\xi^\gamma \chi)_t(x,\xi) := (\partial_\xi^\gamma \chi)(x, t\xi)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \left(\partial_\xi^\gamma \chi_t \, \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j\right)(x,\xi)\right| &= \left|\partial_\xi^\gamma \chi_t \; \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j\,(x,\xi)\right| \\ &= t^{|\gamma|}\left|(\partial_\xi^\gamma \chi)_t \; \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j\,(x,\xi)\right| \end{aligned}$$

Además, al ser $p_j \in S_A^{d_j}(U)$ y tener $(\partial_\xi^\gamma \chi)_t$ ξ-soporte compacto (recordar también que χ en realidad no depende de x), existen constantes no negativas $C_{j,\alpha,\beta-\gamma}$ y C_γ tales que

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j\,(x,\xi)\right| \leq C_{j,\alpha,\beta-\gamma}(1+\|\xi\|)^{d_j-\beta+\gamma} \qquad \left|(\partial_\xi^\gamma \chi)_t\,(x,\xi)\right| \leq C_\gamma$$

para todo $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ y $0 < t \leq 1$. Usando estas cotas deducimos

$$\left|\partial_x^\alpha \left(\partial_\xi^\gamma \chi_t \partial_\xi^{\beta-\gamma} p_j\right)(x,\xi)\right| \leq C_\gamma C_{j,\alpha,\beta-\gamma} t^{|\gamma|}(1+\|\xi\|)^{d_j-\beta+\gamma} \tag{4.1.19}$$

Recordar que estamos tomando $0 < t \leq 1$ y $t^{-1} \leq \|\xi\| \leq 2t^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} t^{|\gamma|} &= 3^{|\gamma|}(3t^{-1})^{-|\gamma|} \\ &\leq 3^{|\gamma|}(1+2t^{-1})^{-|\gamma|} \\ &\leq 3^{|\gamma|}(1+\|\xi\|)^{-|\gamma|} \end{aligned}$$

Luego sustituyendo en (4.1.19) tenemos la desigualdad deseada.

□

Ahora sí vamos con la afirmación y terminamos esta sección.

Lema 4.1.20 (Afirmación)**.** Existe $\{t_j\} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ con $\lim_j t_j = 0$ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ la serie

$$\sum_{j \geq l}(1+\|\xi\|)^{|\beta|-d_l}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta[\chi_{t_j} p_j]$$

converge uniformemente en $U \times \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $j \in \mathbb{N}$. Consideramos $t_j > 0$ tal que

$$C_{j,\alpha,\beta}(1 + t_j^{-1})^{d_j - d_l} < 2^{-j}$$

para todos α, β, l tal que $|\alpha| + |\beta| + l < j$, siendo $C_{j,\alpha,\beta}$ la constante del Lema 4.1.18. Notar que al ser $l < j$ tenemos que $d_l > d_j$, pues en la demostración de Proposición 4.1.17 asumimos que $\{d_j\}$ es estrictamente decreciente. Luego para tales α, β, l y para todo $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ con $\|\xi\| \geq t_j^{-1}$ vale

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\chi_{t_j} p_j](x, \xi)\right| &\leq C_{j,\alpha,\beta}(1 + \|\xi\|)^{d_j - |\beta|} \\ &= C_{j,\alpha,\beta}(1 + ||\xi||)^{d_j - d_l}(1 + \|\xi\|)^{d_l - |\beta|} \\ &\leq C_{j,\alpha,\beta}(1 + t_j^{-1})^{d_j - d_l}(1 + \|\xi\|)^{d_l - |\beta|} \\ &\leq 2^{-j}(1 + \|\xi\|)^{d_l - |\beta|} \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\|\xi\| \leq t_j^{-1}$, tenemos $\chi_{t_j}(x, \xi) = 0$. Concluimos que para todos α, β, l tales que $|\alpha| + |\beta| + l < j$ y para todos $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ vale

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\chi_{t_j} p_j](x, \xi)\right| \leq 2^{-j}(1 + \|\xi\|)^{d_l - |\beta|}$$

Esto implica la tesis, pues en definitiva probamos que la cola de la serie converge uniformemente a 0.

$\square$

4.2. Operadores pseudodiferenciales en variedades

Las definiciones anteriores se puede generalizar a variedades. Sea M una variedad. Recordar que anotamos $\mathbb{C}_M = M \times \mathbb{C}$ y D_M a las formas de grado máximo en M. También vamos a necesitar al producto tensorial de estos fibrados, que es el fibrado en $M \times M$ dado por

$$\mathbb{C}_M \boxtimes D_M := \mathrm{pr}_1^*(\mathbb{C}_M) \otimes \mathrm{pr}_2^*(D_M)$$

en donde pr_1 y pr_2 son las correspondientes proyecciones de $M \times M$ en M. En definitiva, la fibra en (x, y) es $(\mathbb{C}_M)_x \otimes (D_M)_y$.

Definición 4.2.1. Sea $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y M una variedad. Un operador pseudodiferencial de orden d en M es un operador lineal continuo $P : C_c^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por un núcleo $K_P \in \Gamma^{-\infty}(M \times M, \mathbb{C}_M \boxtimes D_M)$ tal que

1. K_P es suave por fuera de la diagonal de $M \times M$.
2. Para cada $a \in M$ existe una carta (U, κ) que contiene a a tal que el operador $P_\kappa : C_c^\infty(\kappa(U)) \to C^\infty(\kappa(U))$ definido por

   $$P_\kappa(f)(\kappa(x)) := P(f \circ \kappa)(x) \quad (x \in U)$$

   pertenece a $\Psi^d(\kappa(U))$.

Observación 4.2.2. Hay varios comentarios para hacer sobre esta definición. Primero que nada, recordar que la existencia del núcleo K_P viene dada por la correspondencia mencionada en la Observación 3.2.8, que es un análogo al Teorema del núcleo de Schwartz en variedades.

Por otro lado, es natural pensar que no es necesario pedir la primer condición y que basta con la segunda. De hecho, cuando tomamos $M \subset \mathbb{R}^n$, entonces podemos tomar a M como parche coordenado y recordando la Observación 4.1.7 (que el soporte singular está por fuera de la diagonal), tenemos que $2 \Rightarrow 1$. Más aún, en este caso la definición coincide con la de operador pseudodiferencial en $\mathbb{R}^n$. Para esto último, ver Lema 7.3.3 de [8].

Sin embargo, cuando pasamos a variedades hay que tener más cuidado. El detalle es que los parches coordenados no dicen nada sobre puntos que están lejos entre sí, lo que no nos permite asegurar nada sobre el comportamiento del núcleo distribucional por fuera de la diagonal. Luego de la Definición 11.1 de [4] se puede encontrar un ejemplo que ilustra esto.

En definitiva tenemos que la primer condición nos asegura que el soporte singular de K_P está incluido en la diagonal, mientras que la segunda hace que las singularidades en la diagonal sean del mismo tipo que las que tienen los núcleos de operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Ahora definimos el espacio de símbolos. Primero consideramos $U \subset M$ y $\kappa : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ una parametrización. Tenemos el difeomorfismo inducido $T^*\kappa : T^*U \to U' \times (\mathbb{R}^n)^* \simeq U' \times \mathbb{R}^n$ dado por

$$T^*\kappa(\xi_x) := (\kappa(x), \xi_x \circ T_x\kappa^{-1}) \qquad (x \in U, \xi_x \in T_x^*M)$$

Haciendo pullback por la inversa de $T^*\kappa$ inducimos un isomorfismo

$$\kappa_* : C^\infty(T^*U) \to C^\infty(U' \times \mathbb{R}^n)$$

Para $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ definimos

$$S^d(U) := \{p \in C^\infty(T^*U) | \kappa_*(p) \in S^d(U')\}$$

Definición 4.2.3. El espacio de símbolos $S^d(M)$ son las funciones $p : T^*M \to \mathbb{C}$ con la propiedad que para cada $a \in M$ existe un entorno coordenado U de a tal que $p|_{T^*U} \in S^d(U)$.

Observación 4.2.4. Esta definición es equivalente a pedir que para todo entorno coordenado U vale $p|_{T^*U} \in S^d(U)$.

Nos resta dar la definición del símbolo principal. Primero se define para el caso local y a partir de esto el verdadero símbolo principal. Sea $U \subset M$ un abierto parametrizado por κ. Definimos el mapa $\sigma_U^d : \Psi^d(U) \to S^d(U)/S^{d-1}(U)$ dado por

$$\kappa_*\sigma_U^d(P) := \sigma_{\kappa(U)}^d(\kappa_*P)$$

donde $\sigma_{\kappa(U)}^d$ es el mapa símbolo de $S^d(\kappa(U))$ que ya conocemos.

Definición 4.2.5. Sea $d \in \mathbb{R}$. Llamamos mapa símbolo principal de orden d al único mapa lineal $\sigma^d : \Psi^d(M) \to S^d(M)/S^{d-1}(M)$ tal que para todo $U \subset M$ parche coordenado vale

$$\sigma^d(P)_U = \sigma_U^d(P_U)$$

Al igual que antes, esto nos induce un isomorfismo

$$\sigma^d : \Psi^d(M)/\Psi^{d-1}(M) \xrightarrow{\simeq} S^d(M)/S^{d-1}(M)$$

Terminamos la sección de variedades enunciando un resultado que usaremos luego. Dado $\psi \in C^\infty(M)$, anotamos M_ψ al operador en $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ dado por multiplicar por ψ. En definitiva, $M_\psi(f) := \psi f$.

Lema 4.2.6. Sean $P \in \Psi^d(M)$ y $\chi, \psi \in C^\infty(M)$. Entonces $M_\chi \circ P \circ M_\psi \in \Psi^d(M)$ y

$$\sigma^d(M_\chi \circ P \circ M_\psi) = \chi\psi\sigma^d(P)$$

Demostración. Lema 7.5.1 de [8].

□

4.3. Operadores pseudodiferenciales en fibrados

Desde un principio dijimos que lo que nos interesa son los operadores pseudodiferenciales en fibrados vectoriales. Ahora que ya presentamos los operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$ y en variedades, estamos listos para dar este paso.

Smoothing operators

Sean M y N variedades, $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to N$ fibrados vectoriales complejos suaves. El producto tensorial exterior $F \boxtimes E$ es el fibrado vectorial en $N \times M$ dado por

$$F \boxtimes E = \mathrm{pr}_1^*(F) \otimes \mathrm{pr}_2^*(E)$$

siendo $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ las proyecciones de $N \times M$ sobre N y M, respectivamente. Fijamos una densidad dy en M y sean $k \in \Gamma^\infty(N \times M, F \boxtimes E^*)$ y $f \in \Gamma_c^\infty(M, E)$. Para cada $x \in N$, pensamos a $y \mapsto k(x,y)f(y)dy$ como una densidad en M de soporte compacto que toma valores en F_x. Usando una partición de la unidad se prueba que integrar esta densidad varia suavemente con x. Por lo tanto, definimos el operador $T : \Gamma_c^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(N, F)$ como

$$Tf(x) := \int_M k(x,y)f(y)dy$$

Los operadores de esta forma son conocidos como smoothing operators de $\Gamma_c^\infty(M, E)$ en $\Gamma^\infty(N, F)$, y al espacio formado por ellos lo anotamos $\Psi^{-\infty}(E, F)$. Notar que en el caso en que el fibrado es $\mathbb{C}_M = M \times \mathbb{C}$, naturalmente podemos identificar $\Psi^{-\infty}(\mathbb{C}_M, \mathbb{C}_M)$ con $\Psi^{-\infty}(M)$.

Operadores pseudodiferenciales

Ahora que tenemos a los smoothing operators, queremos definir el espacio de los operadores pseudodiferenciales entre fibrados vectoriales complejos suaves $E \to M$, $F \to M$. Primero vamos con el caso en que los fibrados son triviales en un abierto $U \subset M$, o sea, $E = U \times \mathbb{C}^k$ y $F = U \times \mathbb{C}^l$. Entonces tenemos las identificaciones $\Gamma_c^\infty(U, E) \simeq C_c^\infty(U, \mathbb{C}^k) \simeq C_c^\infty(U)^k$ y $\Gamma^\infty(U, F) \simeq C^\infty(U, \mathbb{C}^l) \simeq C^\infty(U)^l$. Por lo tanto definimos $\Psi^d(U, E, F) = \Psi^d(E_U, F_U) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma_c^\infty(U, E), \Gamma^\infty(U, F))$ por

$$\Psi^d(E_U, F_U) := M_{l,k}(\Psi^d(U))$$

que son las matrices $l \times k$ con entradas en $\Psi^d(U)$. Usando esta identificación, la acción de $P \in \Psi^d(E_U, F_U)$ en $f \in \Gamma_c^\infty(U, E)$ está dada por

$$(Pf)_i = \sum_{1 \le j \le k} P_{ij} f_j$$

Supongamos que τ_E y τ_F son automorfismos de los fibrados triviales $E = U \times \mathbb{C}^k$, $F = U \times \mathbb{C}^l$. Notar que entonces τ_E es un mapa de la forma $(x, v) \mapsto (x, \gamma_E(x)v)$, siendo $\gamma_E : E \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ un mapa suave. Por lo tanto tenemos un automorfismo inducido τ_{E*} de $\Gamma_c^\infty(U, E) \simeq C_c^\infty(U)^k$ dado por

$$(\tau_{E*} f)(x) = \gamma_E(x) f(x) \qquad (x \in U)$$

Para ver que es un isomorfismo, notar que si anotamos $\gamma_E(x) = (\gamma_{ij}(x))$, entonces tenemos

$$(\tau_{E*} f)(x)_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij}(x) f_j(x)$$

De igual forma, τ_F está dado por un $\gamma_F : F \to \mathrm{GL}(l, \mathbb{C})$ y tenemos un automorfismo inducido τ_{F*} de $\Gamma^\infty(U, F)$. A patir de esto, inducimos un automorfismo τ_* de $\mathrm{Hom}(\Gamma_c^\infty(U, E), \Gamma_c^\infty(U, F))$. El mismo está dado por $\tau_*(Q) := \tau_{F*} \circ Q \circ \tau_{E*}^{-1}$, o

$$\tau_*(Q)(f) = \gamma_F Q(\gamma_E^{-1} f) \quad (f \in \Gamma_c^\infty(U, E) \simeq C_c^\infty(U)^k)$$

Usando el Lema 4.2.6 coordenada a coordenada, tenemos que $\tau_*(\Psi^d(E_U, F_U)) \subset \Psi^d(E_U, F_U)$. Como podemos hacer lo mismo con τ_*^{-1}, concluimos que τ_* es un automorfismo de $\Psi^d(E_U, F_U)$.

Este comentario nos permite dar la definición de operador pseudodiferencial en el caso que los fibrados son trivializables en un abierto $U \subset M$, pues necesitamos tener una independencia con respecto a las trivializaciones elegidas. Sean $\tau_E : E \to E' = U \times \mathbb{C}^k$ y $\tau_F : F \to F' = U \times \mathbb{C}^l$ trivializaciones. Anotamos $\tau_{E*} : \Gamma_c^\infty(U, E) \to \Gamma_c^\infty(U, E')$ y $\tau_{F*} : \Gamma^\infty(U, F) \to \Gamma^\infty(U, F')$ a los correspondientes mapas inducidos. Teniendo esto, definimos $\Psi^d(U, E, F)$ como el espacio de los $Q : \Gamma_c^\infty(U, E) \to \Gamma^\infty(U, F)$ tales que

$$\tau_*(Q) = \tau_{F*} \circ Q \circ \tau_{E*}^{-1} \in \Psi^d(U, E', F')$$

Recordar que dado $E \to M$ fibrado anotamos $E^\vee = E^* \otimes D_M$, siendo E^* el fibrado dual de E. Teniendo esto ya podemos dar la definición de operador pseudodiferencial.

Definición 4.3.1. Sea E, F fibrados vectoriales suaves en una variedad M y sea $d \in \mathbb{R}$. Un operador pseudodiferencial de orden a lo sumo d de E a F es un operador lineal continuo $P : \Gamma_c^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ con kernel $K_P \in \Gamma^{-\infty}(M \times M, F \boxtimes E^\vee)$ tal que

1. K_P es suave por fuera de la diagonal de $M \times M$
2. Para cada $a \in M$ existe un entorno abierto $U \subset M$ en el que tanto E como F admiten trivializaciones y tal que el operador $P_U : \Gamma_c^\infty(U, E) \to \Gamma^\infty(U, F)$, $f \mapsto Pf|_U$ pertenece a $\Psi^d(E_U, F_U)$.

A este espacio lo anotamos $\Psi^d(E, F)$.

Observación 4.3.2. Veamos que $\Psi^d(E, F)$ se preserva bien por isomorfismos de fibrados vectoriales. Sea $\varphi : M_1 \to M_2$ isomorfismo entre variedades y $\varphi_E : E_1 \to E_2$ isomorfismo compatible con φ entre los fibrados vectoriales $E_1 \to M_1, E_2 \to M_2$. Esto induce un isomorfismo $\varphi_{E*} : \Gamma_c^\infty(M_1, E_1) \to \Gamma_c^\infty(M_2, E_2)$ dado por $\varphi_{E*} f := \varphi_E \circ f \circ \varphi^{-1}$.

De igual forma, tomamos un isomorfismo $\varphi_F : F_1 \to F_2$ compatible con φ, siendo $F_1 \to M_1, F_2 \to M_2$ fibrados. Tenemos luego el isomorfismo inducido $\varphi_{F*} : \Gamma^\infty(M_1, F_1) \to \Gamma^\infty(M_2, F_2)$. Juntando φ_{E*} y φ_{F*} construimos el mapa

$$\varphi_* : \mathrm{Hom}(\Gamma_c^\infty(M_1, E_1), \Gamma^\infty(M_1, F_1)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(\Gamma_c^\infty(M_2, E_2), \Gamma^\infty(M_2, F_2))$$

dado por $\varphi_*(Q) := \varphi_{F*} \circ Q \circ \varphi_{E*}^{-1}$, el cual se restringe a un isomorfismo

$$\varphi_* : \Psi^d(M_1, E_1, F_1) \xrightarrow{\simeq} \Psi^d(M_2, E_2, F_2)$$

Símbolo principal

Queremos definir el símbolo principal de un operador pseudodiferencial entre fibrados vectoriales complejos suaves. Para ello antes debemos definir el espacio de símbolos en este contexto. Sea $\pi_H : H \to M$ un fibrado vectorial. Vamos a anotar

$$\Gamma^\infty(T^*M, H) := \{f \in C^\infty(T^*M, H) : \forall x \in M \ f(T_x^*M) \subset H_x\}$$

Al igual que antes, primero vamos con el caso en el que el fibrado es trivial, o sea, es de la forma $H = M \times \mathbb{C}^N$. En este caso $\Gamma^\infty(T^*M, H)$ consiste exactamente de las funciones de la forma $\xi_x \mapsto (x, f(\xi_x))$, siendo $f \in C^\infty(T^*M, \mathbb{C}^N)$. En definitiva, $\Gamma^\infty(T^*M, H) \simeq C^\infty(T^*M, \mathbb{C}^N)$. Esto nos motiva a definir el espacio de símbolos como

$$S^d(M, H) := \{f \in \Gamma^\infty(T^*M, H) : \forall j\ f_j \in S^d(M)\} \simeq S^d(M)^N$$

El caso general vamos a reducirlo a este utilizando trivializaciones. Dado un $\tau : H_1 \to H_2$ isomorfismo de fibrados vectoriales, definimos un isomorfismo

$$\tau_* \colon \Gamma^\infty(T^*M, H_1) \longrightarrow \Gamma^\infty(T^*M, H_2)$$

dado por $\tau_*(f)(\xi_x) = \tau_x(f(\xi_x))$, siendo $x \in M, \xi_x \in T_x^*M$.

Si consideramos τ un automorfismo de $H = M \times \mathbb{C}^N$, notar que entonces es de la forma $\tau(x, v) = (x, \tau_x(v))$ con $x \mapsto \tau_x$ mapa suave de M en $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Por lo tanto τ_* se convierte en un automorfismo de $\Gamma^\infty(T^*M, H)$. Más aún, se restringe a un automorfismo de $S^d(M, H)$. Para esto último, notar que si anotamos $\tau_x = (\tau_{ij}(x))$ y tomamos $p = (p_1, \ldots, p_N) \in S^d(M, H)$, entonces $\tau_x(p) = (q_1, \ldots, q_N)$ siendo los $q_j \in S^d(M)$ dados por

$$q_j = \sum_{i=1}^{N} \tau_{ij}(x) p_i$$

Si el fibrado no es trivial, lo podemos reducir a la definición anterior usando trivializaciones. Supongamos que H es trivializable, siendo $\tau : H \to H' = M \times \mathbb{C}^N$ una trivialización. Entonces definimos

$$S^d(M, H) := \tau_*^{-1}(S^d(M, H'))$$

La independencia con respecto a la trivialización elegida se deduce los comentarios anteriores. Teniendo esto, ahora sí podemos definir al espacio de símbolos en este contexto.

Definición 4.3.3. Sea $H \to M$ un fibrado vectorial. Para $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definimos $S^d(M, H)$ como el espacio de las secciones $p \in \Gamma^\infty(T^*M, H)$ tal que para todo entorno abierto U de M en el que H admite una trivialización, la restricción $p_U = p|_{T^*U}$ pertenece a $S^d(U, H_U)$.

Observación 4.3.4. Para que $p \in S^d(M, H)$ basta con que para todo $x \in M$ exista un entorno abierto U trivializable tal que $p_U \in S^d(U, H_U)$.

Si H es un fibrado vectorial de M, vamos a anotar

$$S^d/S^{d-1}(M, H) := S^d(M, H)/S^{d-1}(M, H)$$

Lo único que nos falta es definir el símbolo principal en el contexto de fibrados. Si E, F son fibrados vectoriales complejos de M, el mapa símbolo principal va a ser un mapa

$$\sigma^d : \Psi^d(M, E, F) \longrightarrow S^d/S^{d-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(E, F))$$

siendo $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$ el fibrado vectorial de M dado por $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)_x = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_x, F_x)$.

Observación 4.3.5. En un principio no parece natural considerar a $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$, pero es un espacio que nos permite generalizar la definición para el caso de fibrados no triviales. Para el caso de fibrados triviales, vamos a ver que $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$ se reduce a una definición más natural al saber que los pseudodiferenciales son las matrices $M_{l,k}(\Psi^d(M))$.

Observación 4.3.6. Si $U \subset M$ es un abierto en el cual tanto E como F admiten trivializaciones, las cuales anotamos $\tau_E : E_U \to U \times \mathbb{C}^k$ y $\tau_F : F_U \to U \times \mathbb{C}^l$, entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$ admite la trivialización

$$\tau : \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)_U \longrightarrow U \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$$

dada por $\tau_x(T) := (\tau_F)_x \circ T \circ (\tau_E)_x^{-1}$.

Al igual que hicimos con las definiciones previas, primero vamos a definir el mapa símbolo principal para el caso en que los fibrados son triviales. Supongamos que $E = M \times \mathbb{C}^k$ y $F = M \times \mathbb{C}^l$, por lo que $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F) = M \times \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$. Entonces tenemos

$$\Psi^d(M, E, F) = M_{l,k}(\Psi^d(M))$$

$$S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) \simeq M_{l,k}(S^d(M))$$

$$S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) \simeq M_{l,k}(S^d(M)/S^{d-1}(M))$$

En este contexto de fibrados triviales, definimos el mapa símbolo principal $\sigma^d = \sigma^d_{E,F}$ coordenada a coordenada como

$$\sigma^d(P)_{ij} = \sigma^d(P_{ij}) \quad (1 \le i \le l,\ 1 \le j \le k)$$

Antes de pasar al caso de fibrados trivializables, probamos el siguiente lema que nos dice que la definición anterior se porta bien respecto a isomorfismos del fibrado trivial.

Lema 4.3.7. Sean τ_E y τ_F automorfismos de los fibrados triviales $E = M \times \mathbb{C}^k$ y $F = M \times \mathbb{C}^l$, respectivamente. Anotamos τ al automorfismo inducido en $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$ y τ_* a los automorfismos inducidos en $\Psi^d(E, F)$ y $S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F))$. Entonces para todo $P \in \Psi^d(E, F)$ vale

$$\sigma^d(\tau_*(P)) = \tau_*(\sigma^d(P))$$

Esto significa que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Psi^d(E, F) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\sigma^d_{E,F}"] & \Psi^d(E, F) \arrow[d, "\sigma^d_{E,F}"] \\
S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) \arrow[r, "\tau_*"] & S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F))
\end{tikzcd}$$

Demostración. Notar que para $f \in \Gamma^\infty(M, E) \simeq C^\infty(M)^k$ tenemos

$$(\tau_*(P)f)_i = \sum_{r,s,j} (\tau_{Fx})_{ir} P_{rs} (\tau_{Ex}^{-1})_{sj} f_j$$

por lo que por Lema 4.2.6

$$\begin{aligned}
\sigma^d(\tau_*(P)_{ij}) &= \sum_{r,s} (\tau_F)_{ir} (\tau_E^{-1})_{sj} \sigma^d(P_{rs}) \\
&= \sum_{r,s} (\tau_F)_{ir} (\tau_E^{-1})_{sj} \sigma^d(P)_{rs} \\
&= (\tau_* \sigma^d(P))_{ij}
\end{aligned}$$

Concluimos recordando que por definición $\sigma^d(\tau_*(P))_{ij} = \sigma^d(\tau_*(P)_{ij})$.

$\square$

Veamos el caso en que los fibrados son trivializables. Si E y F admiten trivializaciones $\tau_E : E \to E' = M \times \mathbb{C}^k$ y $\tau_F : F \to F' = M \times \mathbb{C}^l$, definimos el mapa símbolo principal $\sigma^d_{E,F}$ en $\Psi^d(E,F)$ como el mapa que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\Psi^d(E,F) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\sigma^d_{E,F}"] & \Psi^d(E',F') \arrow[d, "\sigma^d_{E',F'}"] \\
S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)) \arrow[r, "\tau_*"] & S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E',F'))
\end{tikzcd}$$

siendo τ_* los mapas inducidos por τ_E y τ_F. La independencia con respecto a la trivialización es debido al Lema 4.3.7. En efecto, sean ν_E y ν_F otras trivializaciones de E y F, respectivamente, y ν_* los correspondientes isomorfismos inducidos. Si anotamos $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F) = H$, $\underline{\mathrm{Hom}}(E',F') = H'$, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Psi^d(E,F) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\sigma^d_{E,F}"] & \Psi^d(E',F') \arrow[r, "\nu_*\circ(\tau_*)^{-1}"] \arrow[d, "\sigma^d_{E',F'}"] & \Psi^d(E',F') \arrow[d, "\sigma^d_{E',F'}"] \\
S^d/S^{d-1}(M,H) \arrow[r, "\tau_*"] & S^d/S^{d-1}(M,H')) \arrow[r, "\nu_*\circ(\tau_*)^{-1}"] & S^d/S^{d-1}(M,H')
\end{tikzcd}$$

El primer cuadrado conmuta porque es de lo que partimos, mientras que el segundo lo hace por el Lema 4.3.7. ya que $\nu_* \circ (\tau_*)^{-1}$ es el automorfismo inducido por $\nu_E \circ (\tau_E)^{-1}$ y $\nu_F \circ (\tau_F)^{-1}$.

Ahora solo nos resta ver el caso en general, que va a estar definido a partir del próximo lema.

Lema 4.3.8. Sean $E \to M$ y $F \to M$ fibrados complejos arbitrarios de rango k y l, respectivamente. Sea $P \in \Psi^d(E,F)$. Entonces existe un único

$$\sigma^d = \sigma^d_{E,F} \in S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$$

tal que para todo abierto $U \subset M$ en el cual E y F admiten trivializaciones, vale

$$\sigma^d(P)_U = \sigma^d_{E_U,F_U}(P_U) \tag{4.3.9}$$

Demostración. La unicidad es clara, por lo que vamos a construir el mapa símbolo. Sea $\{U_j\}$ un cubrimiento por abiertos de M en los que E y F admiten trivializaciones. Asumimos que el cubrimiento es localmente finito y tenemos una partición de la unidad $\{\psi_j\}$ en M con $\mathrm{sop}(\psi_j) \subset U_j$ para todo j. Dado $P \in \Psi^d(E,F)$ definimos

$$\sigma^d(P) = \sum_j \psi_j \sigma^d_{E_{U_j},F_{U_j}}(P_{U_j})$$

Al ser la suma localmente finita, esto define un elemento de $S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$. Resta ver que se cumple la ecuación (4.3.9).

$$\begin{aligned}
\sigma^d(P)_U &= \sum_j \psi_j|_U \sigma^d_{E_{U_j},F_{U_j}}(P_{U_j})_{U\cap U_j} \\
&= \sum_j \psi_j|_U \sigma^d_{E_{U\cap U_j},F_{U\cap U_j}}(P_{U\cap U_j}) \\
&= \sum_j \psi_j|_U \sigma^d_{E_U,F_U}(P_U)_{U\cap U_j} \\
&= \sum_j \psi_j|_U \sigma^d_{E_U,F_U}(P_U) \\
&= \sigma^d_{E_U,F_U}\left(\sum_j M_{\psi_j}|_U \circ P_U\right) \\
&= \sigma^d_{E_U,F_U}(P_U)
\end{aligned}$$

Notar que entre la primer igualdad y la tercera en definitiva lo que estamos haciendo es tomar restricciones en distintos ordenes, mientras que para la cuarta igualdad estamos usando que $\mathrm{sop}(\psi_j) \subset U_j$.

□

Definición 4.3.10. Sea $P \in \Psi^d(E,F)$. Definimos el $d-$ésimo símbolo principal de P como el único elemento $\sigma^d(P) \in S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ que satisface el Lema 4.3.8.

Observación 4.3.11. $P \mapsto \sigma^d(P)$ es lineal. Además, el mapa símbolo se comporta bien bajo isomorfismos de fibrados vectoriales. Esto significa que si $\tau_E : E_1 \to E_2$ y $\tau_F : F_1 \to F_2$ son isomorfismos de fibrados vectoriales en M, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Psi^d(M,E_1,F_1) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\sigma^d_{E,F}"] & \Psi^d(M,E_2,F_2) \arrow[d, "\sigma^d_{E',F'}"] \\
S^d/S^{d-1}(M,\underline{\mathrm{Hom}}(E_1,F_1)) \arrow[r, "\tau_*"] & S^d/S^{d-1}(M,\underline{\mathrm{Hom}}(E_2,F_2))
\end{tikzcd} \tag{4.3.12}$$

La versión local de este diagrama es verdadera por Lema 4.3.7, mientras que el caso global es debido a la caracterización del símbolo dada en 4.3.8.

Ahora queremos probar un análogo al isomorfismo dado en la Definición 4.1.12 o al que está luego de la Definición 4.2.5. Arrancamos con un lema.

Lema 4.3.13. Sean $\psi, \chi \in C^\infty(M)$. Entonces para todo $P \in \Psi^d(E,F)$

$$\sigma^d(M_\psi \circ P \circ M_\chi) = \psi\chi\sigma^d(P)$$

Demostración. Para fibrados trivializables es consecuencia directa del Lema 4.2.6. Para el caso general, consideremos $U \subset M$ abierto en cual E y F admiten trivializaciones. Entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^d(M_\psi \circ P \circ M_\chi)_U &= \sigma^d_U(M_{\psi|U} \circ P_U \circ M_{\chi|U}) \\
&= (\psi|_U\chi|_U)\sigma_{E_U,F_U}(P_U) \\
&= (\psi\chi\sigma^d(P))_U
\end{aligned}$$

De lo que se deduce la propiedad.

□

Observación 4.3.14. Sea $T_K : \Gamma_c^\infty(M,E) \to \Gamma^\infty(M,F)$ operador con núcleo $K \in \Gamma^{-\infty}(M \times M, F \boxtimes E^\vee)$. Si $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$. Entonces

$$[M_\psi \circ T \circ M_\varphi](f)(x) = T_{K(\psi\otimes\varphi)}(f)(x)$$

Por lo tanto el núcleo de $M_\psi \circ T \circ M_\varphi$, que es $K(\psi \otimes \phi)$, está soportado en $\mathrm{sop}(\psi) \times \mathrm{sop}(\varphi)$.

Teorema 4.3.15. El mapa símbolo principal σ^d induce un isomorfismo lineal

$$\Psi^d(E,F)/\Psi^{d-1}(E,F) \xrightarrow{\simeq} S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$$

Demostración. Si los fibrados son triviales, se deduce del resultado análogo en el caso escalar. En el caso que sean trivializables, ahora se deduce del diagrama 4.3.12.

Vamos con el caso en que E, F son fibrados vectoriales complejos arbitrarios en M. Anotamos $H = \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$. Probaremos que $\sigma^d : \Psi^d(E,F) \to S^d/S^{d-1}(M,H)$ tiene como núcleo a $\Psi^{d-1}(E,F)$ y es sobreyectivo.

Sea $P \in \Psi^d(E,F)$ tal que $\sigma^d(P) = 0$. Esto es equivalente a que para todo abierto $U \subset M$ en el que E, F admiten trivializaciones vale $\sigma^d(P)_U = 0$. Notar que esto último es equivalente a que $\sigma^d_{E_U,F_U}(P_U) = 0$, que por lo que ya probamos esto implica que $P_U \in \Psi^d(E_U, F_U)$. Concluimos que $\mathrm{Ker}(\sigma^d) = \Psi^{d-1}(E,F)$.

Veamos la sobreyectividad. Sea $p \in S^d(M,H)$ y anotamos $[p] \in S^d/S^{d-1}$ a su clase en $S^d/S^{d-1}(M,H)$. Sea $\{U_j\}$ un cubrimiento localmente finito por abiertos de M en los que E y F admiten trivializaciones y existe una partición de la unidad $\{\psi_j\}$ con $\mathrm{sop}(\psi_j) \subset U_j$ para todo j. Por la primer parte de la prueba, sabemos que para todo j existe un $P_j \in \Psi^d(E_{U_j}, F_{U_j})$ tal que

$$\sigma^d(P_j) = [p]_{U_j} \in S^d/S^{d-1}(U_j, H_{U_j})$$

Para cada j consideramos $\chi_j \in C_c^\infty(U_j)$ tal que $\chi_j = 1$ en $\mathrm{sop}(\psi_j)$. Entonces $M_{\psi_j} \circ P_j \circ M_{\chi_j} \in \Psi^d(E,F)$ y su núcleo distribucional está soportado en $\mathrm{sop}(\psi_j) \times \mathrm{sop}(\chi_j)$. Notar que el conjunto de los soportes de los $M_{\psi_j} \circ P_j \circ M_{\chi_j}$ es localmente finito, por lo que podemos definir el siguiente operador pseudodiferencial en $\Psi^d(E,F)$.

$$P = \sum_j M_{\psi_j} \circ P_j \circ M_{\chi_j}$$

Sea $U \subset M$ abierto de clausura compacta en el que E y F admiten trivializaciones. Por lo tanto U corta a finitos U_j del cubrimiento y tenemos

$$\sigma^d(P)_U = \sum_j \left(\chi_j \psi_j \sigma^d(P_j)\right)_U = \sum_j \left(\psi_j \sigma^d(P_j)\right)_U = \sum_j \psi_j|_U [p]_U = [p]_U$$

Notar que por la elección de U solo finitos términos de la suma son distintos de cero. Concluimos que $\sigma^d(P) = [p]$ y por lo tanto σ^d es sobreyectivo.

□

Adjunto y composición

Terminamos la sección hablando sobre tres cosas que son conocidos (aunque no las probamos en este texto) para el caso de operadores pseudodiferenciales escalares:

- La fórmula del símbolo del adjunto.
- A menos de smoothing operators, podemos asumir que los operadores son propiamente soportados. Ver Lema 6.1.6 de [8].

- La fórmula del símbolo de la composición de operadores propiamente soportados. La sección 7.1 de [8] está dedicada a esto, aunque el resultado concreto es el Corolario 7.1.10.

Recordar que si $E \to M$ es un fibrado, anotamos $E^\vee = E^* \otimes D_M$, siendo E^* el fibrado dual de E y $D_M = \Lambda^n T^*M \otimes \mathbb{C}$ las formas de grado máximo en M.

Consideramos el siguiente lema, que nos sirve para obtener la fórmula del símbolo del adjunto.

Lema 4.3.16. El mapa

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F^*, E^*)_x \ni T_x \longmapsto T_x \otimes I_{D_M x} \in \underline{\mathrm{Hom}}(F^\vee, E^\vee)_x$$

define un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Para tener una fórmula para el adjunto, precisamos un análogo al "tomar conjugado" que se usa en el caso escalar. Dado $p \in S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F))$ definimos $p^\vee : T^*M \to \underline{\mathrm{Hom}}(F^\vee, E^\vee)$ como

$$p^\vee(\xi_x) = p(-\xi_x)^* \otimes I_{D_M x} \quad (x \in M, \xi_x \in T_x^*M)$$

Luego $p^\vee \in S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F^\vee, E^\vee))$. Más aún, vale $p^{\vee\vee} = p$, por lo que el mapa $p \mapsto p^\vee$ define un isomorfismo

$$S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) \longrightarrow S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F^\vee, E^\vee))$$

Naturalmente, esto induce un isomorfismo

$$S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E, F)) \longrightarrow S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F^\vee, E^\vee))$$

Observación 4.3.17. Sea $P \in \Psi^d(E, F)$. Al ser P un operador de la forma $\Gamma_c^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$, entonces su adjunto es un operador $P^t : \Gamma_c^{-\infty}(M, F^\vee) \to \Gamma^{-\infty}(M, E^\vee)$, el cual para todo $f \in \Gamma_c^\infty(M, E), g \in \Gamma_c^{-\infty}(M, F^\vee)$ satisface

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, P^t g\rangle$$

Además tenemos que el mapa $\Gamma^\infty(M, E^\vee) \times \Gamma_c^\infty(M, E) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_M (f, g)$$

induce un encaje $\Gamma^\infty(M, E^\vee) \hookrightarrow \Gamma^{-\infty}(M, E^\vee)$. De la misma forma obtenemos un encaje $\Gamma_c^\infty(M, F^\vee) \hookrightarrow \Gamma_c^{-\infty}(M, F^\vee)$.

El siguiente lema nos dice que la operación $p^\vee$ es la buena forma de poder expresar el símbolo del operador adjunto en función del símbolo del operador original.

Lema 4.3.18. Sea $P \in \Psi^d(E, F)$. El adjunto $P^t : \Gamma_c^{-\infty}(M, F^\vee) \to \Gamma^{-\infty}(M, E^\vee)$ se restringe a un mapa continuo $\Gamma_c^\infty(M, F^\vee) \to \Gamma^\infty(M, E^\vee)$, el cual es un operador pseudodiferencial en $\Psi^d(F^\vee, E^\vee)$ con símbolo principal dado por

$$\sigma^d(P^t) = \sigma^d(P)^\vee$$

Demostración. Lema 8.3.3 de [8].

□

Observación 4.3.19. Sea $P \in \Psi^d(E, F)$. El lema anterior nos permite extender P a un mapa continuo $\Gamma_c^{-\infty}(M, E) \to \Gamma^{-\infty}(M, F)$, pues es el adjunto de $P^t : \Gamma_c^\infty(M, F^\vee) \to \Gamma^\infty(M, E^\vee)$. La extensión es única porque $\Gamma_c^\infty(M, E)$ es denso en $\Gamma_c^{-\infty}(M, E)$.

Al igual que en el caso escalar, no tiene sentido la composición de operadores pseudodiferenciales. La definición de operador propiamente soportado dada en 4.1.8 se adapta a operadores en fibrados de la forma esperable.

Definición 4.3.20. Un operador $T : \Gamma_c^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ es propiamente soportado si

- Para todo conjunto compacto $A \subset U$ existe un conjunto compacto $B \subset U$ tal que si $\text{sop}(u) \subset A$, entonces $\text{sop}(Tu) \subset B$.
- Para todo conjunto compacto $A \subset U$ existe un conjunto compacto $C \subset U$ tal que si $u = 0$ en C, entonces $Tu = 0$ en A.

Observación 4.3.21. Si M es una variedad compacta, entonces todos los operadores de la forma $\Gamma_c^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ son propiamente soportados.

Antes de probar que los operadores son propiamente soportados a menos de smoothing operators, necesitamos el siguiente lema topológico.

Lema 4.3.22. Sea M una variedad y $\Omega \subset M \times M$ un entorno abierto de la diagonal. Entonces para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de M existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$ tal que para todo $V, V' \in \mathcal{V}$ con $V \cap V' \neq \emptyset$ vale $V \times V' \subset \Omega$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{W}$ refinamiento de $\mathcal{U}$ tal que $W \times W \subset \Omega$ para todo $W \in \mathcal{W}$. Al ser M paracompacta, podemos asumir que es localmente finito. Por lo tanto, para todo $x \in M$ existe un entorno abierto V_x que cumple:

- Si $W \in \mathcal{W}$ es tal que $x \in W$, entonces $V_x \subset W$.
- Si $W \in \mathcal{W}$ es tal que $x \notin W$, entonces $V_x \cap W = \emptyset$.

Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento localmente finito de $\{V_x\}_{x \in M}$. Sean $V, V' \in \mathcal{V}$ con un punto x en común. Entonces $x \in W$ para algún $W \in \mathcal{W}$ y tenemos $V \subset W$, $V' \subset W$, por lo que $V \times V' \subset W \times W \subset \Omega$.

□

Lema 4.3.23. Sea $\Omega \subset M \times M$ un entorno abierto de la diagonal. Entonces para todo $P \in \Psi^d(E, F)$ existe un $P_0 \in \Psi^d(E, F)$ propiamente soportado con $\text{sop}(K_{P_0}) \subset \Omega$ tal que $P - P_0 \in \Psi^{-\infty}(E, F)$.

Demostración. Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ cubrimiento localmente finito de M tal que para todo $i, j \in J$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ vale $U_i \times U_j \subset \Omega$. Consideramos una partición de la unidad $\{\psi_j\}$ subordinada a $\{U_j\}$. Para cada j tomamos un $\chi_j \in C_c^\infty(U_j)$ que vale 1 en un entorno abierto de $\text{sop}\psi_j$. Ahora definimos

$$P_0 := \sum_{j \in J} M_{\psi_j} \circ P \circ M_{\chi_j}$$

Notar que $M_{\psi_j} \circ P \circ M_{\chi_j}$ es un operador pseudodiferencial de orden d con kernel soportado en $\text{sop}\psi_j \times \text{sop}\chi_j$. Al ser la suma anterior localmente finita, concluimos que $P_0 \in \Psi^d(E, F)$.

Nos queda probar que $P - P_0 \in \Psi^{-\infty}(E, F)$. Notar que podemos escribir

$$P - P_0 = \sum_j M_{\psi_j} \circ P \circ M_{1 - \chi_j}$$

Al tener $\text{sop}\psi_j \cap \text{sop}(1-\chi_j) = \emptyset$, deducimos que $M_{\psi_j} \circ P \circ M_{1-\chi_j}$ es un smoothing operator, con kernel soportado en $U_j \times M$. Como estos conjuntos forman una colección localmente finita en $M \times M$ tenemos que la suma de estos operadores, que es $P - P_0$, también es smoothing. □

Nos resta hablar sobre el símbolo de la composición de operadores pseudodiferenciales propiamente soportados. Sean E_1, E_2, E_3 fibrados en M. Dados $p \in S^d(M, \underline{\text{Hom}}(E_1, E_2))$ y $q \in S^e(M, \underline{\text{Hom}}(E_2, E_3))$, definimos $qp : T^*M \to \text{Hom}(E_1, E_3)$ como

$$qp : T^*M \ni \xi_x \longmapsto q(\xi_x) \circ p(\xi_x)$$

Se puede probar que $(p, q) \longmapsto qp$ define un mapa bilineal

$$S^d(M, \underline{\text{Hom}}(E_1, E_2)) \times S^e(M, \underline{\text{Hom}}(E_2, E_3)) \longrightarrow S^{d+e}(M, \underline{\text{Hom}}(E_1, E_3))$$

Para ello, ver Lema 8.3.6 de [8]. A partir de esto se induce otro mapa bilineal

$$S^d/S^{d-1}(M, \underline{\text{Hom}}(E_1, E_2)) \times S^e/S^{e-1}(M, \underline{\text{Hom}}(E_2, E_3)) \longrightarrow S^{d+e}/S^{d+e-1}(M, \underline{\text{Hom}}(E_1, E_3))$$

Este producto de símbolos nos interesa porque nos es útil para describir el símbolo de la composición de forma análoga al caso escalar.

Teorema 4.3.24. Sean $P \in \Psi^d(E_1, E_2)$ y $Q \in \Psi^e(E_2, E_3)$ propiamente soportados. Entonces $Q \circ P \in \Psi^{d+e}(E_1, E_2)$ es propiamente soportado con símbolo principal dado por

$$\sigma^{d+e}(Q \circ P) = \sigma^e(Q)\sigma^d(P)$$

Demostración. Teorema 8.3.7 de [8]. □

4.4. Parametrices

Al inicio de este capítulo dijimos que introducimos a los operadores pseudodiferenciales con el objetivo de poder invertir operadores elípticos módulo smoothing operators. A estas inversas las llamaremos parametrices.

Definición 4.4.1. Sea $P \in \Psi^\infty(E, F)$. Decimos que $Q \in \Psi^\infty(F, E)$ es una parametriz de P si cumple que

$$QP - I \in \Psi^{-\infty}(E, E), \qquad PQ - I \in \Psi^{-\infty}(F, F)$$

Lo único que nos falta para poder atacar este problema es definir qué significa que un operador pseudodiferencial sea elíptico, que es lo que haremos ahora.

Operadores elípticos

Sean $E \to M$ y $F \to M$ fibrados vectoriales complejos en M de rango k y l, respectivamente. El espacio de símbolos $S^0(M, \underline{\text{End}}(E))$ tiene un elemento distinguido 1_E dado por

$$1_E : T_x^*M \ni \xi_x \longmapsto I_{E_x} \in \underline{\text{End}}(E)_x \quad (x \in M)$$

De igual forma, $S^0(M, \underline{\text{End}}(F))$ tiene un elemento distinguido 1_F.

Definición 4.4.2. Un símbolo $p \in S^d(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$ se dice elíptico (de orden d) si existe un símbolo $q \in S^{-d}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F,E))$ tal que

$$pq - 1_F \in S^{-1}(M, \underline{\mathrm{End}}(F)) \quad \text{y} \quad qp - 1_E \in S^{-1}(M, \underline{\mathrm{End}}(E))$$

Observación 4.4.3. Si $[p] \in S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$ y $[q] \in S^{-d}/S^{-d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F,E))$ son las clases de la definición anterior, entonces cumplen

$$[p][q] = [1_F] \quad \text{y} \quad [q][p] = [1_E]$$

Por lo tanto, la noción de elipticidad baja bien al cociente.

Definición 4.4.4. Un operador pseudodiferencial $P \in \Psi^d(E,F)$ se dice elíptico si su símbolo principal $\sigma^d(P) \in S^d/S^{d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(E,F))$ es elíptico.

Debido al Teorema 4.3.18 se sigue el próximo resultado.

Proposición 4.4.5. Si $P \in \Psi^d(E,F)$ es elíptico, entonces $P^t \in \Psi^d(F^\vee, E^\vee)$ también lo es.

Esta nueva noción de elipticidad generaliza la que ya se conocemos para el caso de operadores diferenciales. De hecho, tenemos el siguiente resultado, que es Lema 8.4.2 de [8].

Proposición 4.4.6. Sean $d \in \mathbb{N}$ y P un operador diferencial de orden d de E en F. Entonces son equivalentes:

- P es elíptico como operador diferencial.
- P es elíptico como operador pseudodiferencial en $\Psi^d(E,F)$.

Existencia de parametrices

Ya estamos listos para probar la existencia de parametrices. La siguiente definición y la siguiente proposición son los análogos a la Definición 4.1.13 y Lema 4.1.17, pero ahora trabajando con operadores pseudodiferenciales, mientras que los anteriores hacen referencia a símbolos.

Definición 4.4.7. Sean $Q \in \Psi(E,F)$ y $\{d_j\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $\lim_{j\to\infty} d_j = -\infty$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ consideramos $Q_j \in \Psi^{d_j}(E,F)$. Entonces

$$Q \sim \sum_{j=0}^{\infty} Q_j$$

significa que para todo $d \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ vale

$$Q - \sum_{j=0}^{k} Q_j \in \Psi^d(E,F)$$

Ahora vamos a enunciar un resultado sobre los operadores pseudodiferenciales, pero antes necesitamos dar la definición de haz.

Definición 4.4.8. Sea X un espacio topológico. Un prehaz $\mathcal{F}$ en X consiste en los siguientes datos:

- Para cada conjunto abierto U de X, se le asigna un conjunto $\mathcal{F}(U)$. Los elementos de este conjunto se llaman secciones de $\mathcal{F}$ sobre U.

- Para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subset U$, existe una función $\mathrm{res}_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. A estas funciones se las conoce como morfismos de restricción.

Además, se le pide a los morfismos de restricción dos condiciones:

- Para cada U conjunto abierto de X, el morfismo restricción $\mathrm{res}_U^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ es el morfismo identidad en $\mathcal{F}(U)$.
- Si se tiene tres conjuntos abiertos $W \subset V \subset U$, entonces vale $\mathrm{res}_W^V \circ \mathrm{res}_V^U = \mathrm{res}_W^U$.

Definición 4.4.9. Un haz $\mathcal{F}$ en X es un prehaz que satisface las siguientes dos condiciones:

- Sean U un abierto en X, $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de U tal que $U_i \subset U$ para todo $i \in I$, y $s, t \in \mathcal{F}(U)$ secciones. Si vale $\mathrm{res}_{U_i}^U(s) = \mathrm{res}_{U_i}^U(t)$ para todo $i \in I$, entonces $s = t$.
- Sean U un abierto en X, $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento por abiertos de U tal que $U_i \subset U$ para todo $i \in I$, y $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ una familia de secciones. Si vale $\mathrm{res}_{U_i\cap U_j}^{U_i}(s_i) = \mathrm{res}_{U_i\cap U_j}^{U_j}(s_j)$ para todo $i, j \in I$, entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\mathrm{res}_{U_i}^U(s) = s_i$ para todo $i \in I$.

Observación 4.4.10. Las condiciones de la definición de haz juntas establecen que toda colección de secciones compatibles por pares pueden ser pegadas de forma única. Intuitivamente, esto nos dice que para hacer un estudio global basta con hacer un estudio local, siempre y cuando tengamos el cuidado de que la información obtenida no sea contradictoria.

Teniendo la definición de haz, podemos enunciar el siguiente resultado, que es el Ejercicio 7.3.10 de [8]. Este Lema nos dice que para definir un operador pseudodiferencial en una variedad M, en realidad basta con hacerlo en un cubrimiento por abiertos. Más aún, el operador definido de esta forma va a ser único a menos de smoothing operators.

Lema 4.4.11. Sean $U \subset V$ abiertos de M. El mapa $\Psi^d(V) \to \Psi^d(U)$ definido por $P \mapsto P|_U$ induce otro mapa en $\Psi^d(V)/\Psi^{-\infty}(V) \to \Psi^d(U)/\Psi^{-\infty}(U)$.

Teorema 4.4.12. Sea $\{d_\nu\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con $\lim_{\nu\to\infty} d_\nu = -\infty$ y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ un $Q_\nu \in \Psi^{d_\nu}(E, F)$ dado. Entonces existe un operador propiamente soportado $Q \in \Psi(E, F)$ tal que

$$Q \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu$$

Más aún, Q es único módulo $\Psi^{-\infty}(E, F)$.

Demostración. Veamos la unicidad. Si Q' también cumpliese la tesis, entonces por la definición de $\sim$ tenemos que $Q - Q' \in \Psi^d(E, F)$ para todo $d \in \mathbb{R}$. Luego $Q - Q' \in \Psi^{-\infty}(E, F)$.

Ahora vamos con la existencia. Sea $d = \max_\nu d_\nu$. Por Lema 4.3.23 basta con probar que existe un $Q \in \Psi^d(E, F)$ que cumpla la tesis.

Primero veamos el caso en que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y los fibrados son triviales, i.e $E = M \times \mathbb{C}^k$ y $F = M \times \mathbb{C}^l$. Entonces $\Psi(E, F) = M_{l,k}(\Psi(M))$. Fijemos $1 \le i \le l$ y $1 \le j \le k$. Para todo $\nu \in \mathbb{N}$ existe un símbolo $(q_\nu)_{ij} \in S^{d_\nu}(M)$ tal que

$$(Q_\nu)_{ij} = \Psi_{(q_\nu)_{ij}}$$

Por Lema 4.1.17 existe un símbolo $q_{ij} \in S^d(M)$ tal que

$$q_{ij} \sim \sum_{\nu\in\mathbb{N}} (q_\nu)_{ij}$$

Si consideramos $Q \in \Psi^d(E,F)$ dado por $Q_{ij} = \Psi_{q_{ij}}$ para todo $1 \leq i \leq l$ y $1 \leq j \leq k$, entonces Q cumple lo buscado.

Pasemos al caso en que E y F admiten trivializaciones $\tau_E \to E' = E \times \mathbb{C}^k$ y $\tau_F \to F' = F \times \mathbb{C}^l$. Por el caso anterior tenemos que existe un $P \in \Psi(E', F')$ tal que

$$P \sim \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \tau_*(Q_\nu)$$

Luego tomamos $Q = \tau_*^{-1}(P)$, el cual satisface la tesis.

Nos queda probar el caso general. Sea $\{U_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento por abiertos de M tales que cada uno de ellos admite trivializaciones tanto de E como de F. Asumimos que el cubrimiento es localmente finito y que tenemos una partición de la unidad suboridinada $\{\psi_j\}_{j\in J}$ tal que sop $\psi_j \subset U_j$ para todo $j \in J$. Por lo que ya hemos probado, para cada j existe un operador $Q_j \in \Psi^d(E_{U_j}, F_{U_j})$ tal que

$$Q_j \sim \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (Q_\nu)_{U_j}$$

Para índices i, j tales que $U_{ij} = U_i \cap\ U_j \neq \emptyset$, los operadores $(Q_i)_{U_{ij}}$ y $(Q_j)_{U_{ij}}$ tienen la misma expansión, que es $\sum_\nu (Q_\nu)_{U_{ij}}$. Así deducimos que $(Q_i)_{U_{ij}} - (Q_j)_{U_{ij}} \in \Psi^{-\infty}(U_{ij})$. Al ser $\Psi^d(E,F)/\Psi^{-\infty}(E,F)$ un haz, tenemos que existe un $Q \in \Psi^d$ tal que $Q_{U_j} - Q_j \in \Psi^{-\infty}(E_{U_j}, F_{U_j})$ para todo j. Entonces para todo j vale

$$Q_{U_j} \sim \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (Q_\nu)_{U_j}$$

lo que implica la tesis.

□

Con el próximo resultado encontramos una inversa si $P \in \Psi^d(E,F)$ es elíptico y propiamente soportado, pero es módulo operadores de orden -1. Esto es un paso previo para encontrar la inversa módulo smoothing operators (que son operadores de "orden -∞"), que es lo que nos interesa.

Proposición 4.4.13. Sea $P \in \Psi^d(E,F)$ un operador elíptico y propiamente soportado. Entonces existe un operador propiamente soportado $Q \in \Psi^{-d}(F,E)$ tal que $QP - I \in \Psi^{-1}(E,E)$ y $PQ - I \in \Psi^{-1}(F,F)$.

Demostración. Existe un $q \in S^{-d}/S^{-d-1}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(F,E))$ tal que $\sigma^d(P)q = [1_E]$ y $q\sigma^d(P) = [1_F]$. Por Teorema 4.3.15 existe $Q \in \Psi^d(F,E)$ tal que $\sigma^{-d}(Q) = q$, el cual podemos asumir que es propiamente soportado usando el Lema 4.3.23. Como P y Q son propiamente soportados, del Teorema 4.3.24 se sigue que

$$\sigma^0(QP) = [1_E] \quad \text{y} \quad \sigma^0(PQ) = [1_F]$$

Al ser $[1_E]$ el símbolo asociado al operador identidad $I_E : \Gamma_c^\infty(M,E) \to \Gamma_c^\infty(M,E)$ tenemos que $QP - I_E \in \Psi^{-1}(E,E)$ por el Teorema 4.3.15. De forma análoga deducimos que $PQ - I_F \in \Psi^{-1}(F,F)$.

□

Sin más preámbulos, probamos la existencia de parametrices.

Teorema 4.4.14. Sean E, F fibrados vectoriales complejos en una variedad M y $P \in \Psi^d(E,F)$ un operador pseudodiferencial elíptico y propiamente soportado. Entonces existe un operador pseudodiferencial elíptico y propiamente soportado $Q \in \Psi^{-d}(F,E)$ tal que

$$QP - I \in \Psi^{-\infty}(E,E), \qquad PQ - I \in \Psi^{-\infty}(F,F)$$

Además, Q es único módulo $\Psi^{-\infty}(F,E)$. En particular, P admite una parametriz.

Demostración. Por medio de la Proposición 4.4.13 existe un operador propiamente soportado $Q_0 \in \Psi^{-d}(F,E)$ tal que $Q_0P - I \in \Psi^{-1}(E,E)$ y $PQ_0 - I \in \Psi^{-1}(F,F)$. Anotamos $R := I - Q_0P$, que es propiamente soportado. Luego $R^k \in \Psi^{-k}(E,E)$ y existe un $A \in \Psi^0(E,E)$ propiamente soportado tal que $A \sim \sum_{k=0}^{\infty} R^k$.

Es fácil verificar que $A(I-R) - I \in \Psi^{-n}(E,E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si fijamos $n \in \mathbb{N}$ y tomamos $l \geq n$ tal que $A - \sum_{k=0}^{l} R^k \in \Psi^{-n}(E,E)$ tenemos

$$\begin{aligned}
A(I-R) - I &= \left(A - \sum_{k=0}^{l} R^k + \sum_{k=0}^{l} R^k\right)(I-R) - I \\
&= A - \sum_{k=0}^{l} R^k - \left(A - \sum_{k=0}^{l} R^k\right) R + \sum_{k=0}^{l} R^k - \sum_{k=0}^{l} R^{k+1} - I \\
&= A - \sum_{k=0}^{l} R^k - \left(A - \sum_{k=0}^{l} R^k\right) R + I - R^{l+1} - I \\
&= \underbrace{A - \sum_{k=0}^{l} R^k}_{\in \Psi^{-n}(E,E)} - \underbrace{\left(A - \sum_{k=0}^{l} R^k\right) R}_{\in \Psi^{-n-1}(E,E)} - \underbrace{R^{l+1}}_{\in \Psi^{-l-1}(E,E)}
\end{aligned}$$

Al haber tomado $l \geq n$ concluimos $A(I-R) - I \in \Psi^{-n}(E,E)$. Por lo tanto $A(I-R) - I \in \Psi^{-\infty}(E,E)$.

Notar que usando la definición de R tenemos

$$AQ_0P - I = A(I-R) - I$$

Luego para cumplir la primer condición de la tesis basta con tomar $Q = AQ_0$. Observar que es propiamente soportado pues A y Q_0 lo son.

Resta ver que también vale $PQ - I \in \Psi^{-\infty}(F,F)$. Por lo que ya probamos, existe $P_1 \in \Psi^d(E,F)$ propiamente soportado tal que $P_1Q - I \in \Psi^{-\infty}(F,F)$. Anotemos $B := QP - I$ y $C := P_1Q - I$, que son operadores propiamente soportados. Entonces tenemos

$$P + CP = (I + C)P = P_1QP = P_1(I + B) = P_1 + P_1B$$

de donde deducimos que $P - P_1 \in \Psi^{-\infty}(E,F)$, pues

$$P - P_1 = \underbrace{P_1B}_{\in \Psi^{-\infty}(E,F)} - \underbrace{CP}_{\in \Psi^{-\infty}(E,F)}$$

A partir de esto podemos concluir que $PQ - I \in \Psi^{-\infty}(F,F)$. Para ello observamos que

$$\begin{aligned}
PQ - I &= (P - P_1 + P_1)Q - I \\
&= \underbrace{(P - P_1)Q}_{\in \Psi^{-\infty}(F,F)} - \underbrace{P_1Q - I}_{\in \Psi^{-\infty}(F,F)}
\end{aligned}$$

Para probar la unicidad, supongamos que existe un Q' que también cumple la tesis. Anotamos $D := PQ - I$ y $E := Q'P - I$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} Q' - Q &= Q'PQ - Q'D - Q \\ &= \underbrace{EQ}_{\in\Psi^{-\infty}(F,E)} - \underbrace{Q'D}_{\in\Psi^{-\infty}(F,E)} \end{aligned}$$

por lo que $Q - Q' \in \Psi^{-\infty}(F, E)$.

□

Terminamos esta sección dando una prueba de regularidad elíptica. Este resultado todavía no lo necesitamos, pero es un teorema clásico de EDPs y es interesante en sí mismo.

Teorema 4.4.15. Sea M una variedad compacta, E, F fibrados de M y $P \in \Psi^d(E, F)$ un operador elíptico. Entonces Ker P consiste en secciones suaves.

Demostración. Sea $Q \in \Psi^{-d}(F, E)$ una parametriz de P. Tenemos así $QP = 1 - R$ con R smoothing operator. Si $Pu = 0$, entonces

$$QPu = u - Ru = 0$$

por lo que $u = Ru$ y al ser R un smoothing operator deducimos que u es suave.

□

Capítulo 5

Índice de un operador elíptico

Para esta sección usamos como referencia el Capítulo 9 de [8]. Lo único que nos falta para poder probar que los operadores elípticos son Fredholm es poder restringirlos a ciertos dominios y codominios que tengan estructura de espacio de Banach. Para ello, vamos a usar a los espacios de Sobolev locales. Dados $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y U abierto de $\mathbb{R}^n$, anotamos $H_s(U)$ al s-ésimo espacio de Sobolev y $|| \cdot ||_s$ a su norma.

Definición 5.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. El espacio de Sobolev local $H_{s,loc}(U)$ es el espacio de las $f \in C^{-\infty}(U)$ con la propiedad de que $\psi f \in H_s(\mathbb{R}^n)$ para toda $\psi \in C_c^{\infty}(U)$. Lo equipamos con la topología localmente convexa inducida por las seminormas $\nu_\psi : f \mapsto ||\psi f||_s$, con $\psi \in C_c^{\infty}(U)$.

Podemos llevar estos espacios de funciones a variedades con fibrados de la siguiente forma. Primero consideremos una terna (U, κ, τ), siendo U un abierto de M, (U, κ) una carta de M y $\tau : E_U \to U \times \mathbb{C}^p$ una trivialización del fibrado E en U. Esto induce un isomorfismo

$$h_{\kappa,\tau} : \Gamma^{-\infty}(U, E_U) \longrightarrow \Gamma^{-\infty}(\kappa(U))^p$$

Definimos $H_{s,loc}(M, E)$ como el espacio de los $u \in \Gamma^{-\infty}(M, E)$ con la propiedad de que para cualquier terna (U, κ, τ) vale $h_{\kappa,\tau}(u|_U) \in H_{s,loc}(\kappa(U))^p$. Nos resta darle una topología. Sea $\{U_j\}_{j \in J}$ cubrimiento de M que cada abierto admite una terna (U_j, κ, τ). Entonces tenemos la inclusión

$$H_{s,loc}(M, E) \longrightarrow \prod_{j \in J} H_{s,loc}(\kappa_i(U_i))^p$$

A $H_{s,loc}(M, E)$ le damos la topología inducida. La justificación de que este espacio de funciones tiene sentido se debe al Capítulo 3 y al Teorema 9.2.3 de [8].[1] En el caso que M sea una variedad compacta, anotamos $H_{s,loc}(M, E) := H_s(M, E)$.

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $K \subset U$ compacto, anotamos $H_{s,K}(U)$ los elementos de $H_s(U)$ con soporte en K. Teniendo esto, podemos enunciar el **Lema de Rellich**.

Lema 5.2. Sean $s, t \in \mathbb{R}$ tal que $s < t$. Entonces la inclusión $H_{s,K}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_t(\mathbb{R}^n)$ es compacta.

Demostración. Lema 4.5.2 de [8].

□

Ahora lo que haremos será probar el Lema de Rellich en el contexto de espacios de Sobolev en fibrados.

[1] En particular, ver la sección 3.8 que resume lo importante.

Teorema 5.3. Sean $s, y \in \mathbb{R}$ con $s < t$. Entonces $H_{t,loc}(M,E) \subset H_{s,loc}(M,E)$ con inclusión continua. Si M es compacta, entonces la inclusión es compacta.

Demostración. Sea $\{U_j\}_{j\in J}$ cubrimiento de M por abiertos relativamente compactos que admiten una carta y una trivialización del fibrado E. Asumimos que J es numerable. Sea $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ partición de la unidad subordinada al cubrimiento. Si para cada $j \in J$ anotamos $K_j = \mathrm{sop}(\varphi_j)$, entonces el mapa $f \mapsto (\varphi_j f)_{j\in J}$ define para todo $s \in \mathbb{R}$ un encaje lineal

$$H_{s,loc}(M,E) \longrightarrow \prod_{j\in J} H_{s,K_j}(U_j,E)$$

siendo $H_{s,K_j}(U_j,E)$ los elementos de $H_s(U_j,E)$ con soporte en K_j. Al poder trivializar E en cada U_j, tenemos $H_{s,K_j}(U_j,E) \simeq (H_{s,K_j}(U_j))^k$. Además $H_{t,K_j}(U_j)^k \subset H_{s,K_j}(U_j)^k$ con inclusión continua. Entones el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_{t,loc}(M,E) & \longrightarrow & H_{s,loc}(M,E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{j\in J} H_{t,K_j}(U_j,E) & \longrightarrow & \prod_{j\in J} H_{s,K_j}(U_j,E) \end{array}$$

Como las flechas verticales son encajes y la horizontal de abajo acabamos de probar que es continua, entonces la flecha horizontal de arriba también es continua.

Si M es compacta, además podemos asumir que J es finito. Entonces podemos llegar al mismo diagrama, pero ahora tenemos que la flecha horizontal de abajo es el producto directo de finitos mapas compactos, aplicando el Lema de Rellich usual. Por lo tanto, la flecha horizontal de arriba también tiene que ser un mapa compacto.

□

Notar que tenemos $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H_{s,loc}(M,E) = \Gamma^\infty(M,E)$ como conjuntos. Esto se deduce de que esto es válido para los espacios de funciones usuales en $\mathbb{R}^n$ y un argumento parecido al del lema anterior. Entonces definimos $H_{\infty,loc}(M,E) := \Gamma^\infty(M,E)$, siendo la igualdad tanto en conjuntos como en topología. En particular, tenemos que las inclusiones $H_{\infty,loc}(M,E) \hookrightarrow H_{s,loc}(M,E)$ son continuas para todo $s \in \mathbb{R}$.

Antes de probar que podemos restringir los pseudodiferenciales a los espacios de Sobolev, enunciamos un lema, que es el resultado para el caso escalar.

Lema 5.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $P \in \Psi^d(U)$ propiamente soportado y $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Entonces para todo $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ el operador $P : C^{-\infty}(U) \to C^{-\infty}(U)$ se restringe a un operador continuo $P_s : H_{s,loc}(U) \to H_{s-d,loc}(U)$.

Demostración. Proposición 9.1.5 de [8].

□

Teorema 5.5. Sean E, F fibrados sobre M, $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $P \in \Psi^d(E,F)$ propiamente soportado. Entonces $P : \Gamma^{-\infty}(M,E) \to \Gamma^{-\infty}(M,F)$ se restringe a un operador continuo $P_s : H_{s,loc}(M,E) \to H_{s-d,loc}(M,F)$

Demostración. Supongamos que $d = -\infty$ y así P es un smoothing operator. Al tener que la inclusión $H_{s,loc}(M,E) \hookrightarrow \Gamma^{-\infty}(M,E)$ es continua, entonces también lo es la restricción

$$P_s : H_s(M,E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M,F) = H_{\infty,loc}(M,F)$$

Ahora vamos con $s \in \mathbb{R}$. Sea $\{U_j\}_{j\in J}$ cubrimiento de M por abiertos relativamente compactos que admiten parametrizaciones y trivializaciones de los fibrados. Asumimos que el cubrimiento es numerable y localmente finito. Sea $\{\psi_j\}$ partición de la unidad subordinada al cubrimiento. Para cada $j \in J$ tomamos $\chi_j \in C_c^\infty(U_j)$ tal que $\chi_j = 1$ en un entorno abierto de $\text{sop}(\psi_j)$. Si anotamos $P_j := M_\psi \circ P \circ M_{\chi_j}$, entonces

$$T_j := M_{\psi_j} \circ P - P_j$$

es un smoothing operator propiamente soportado. Los núcleos de los T_j forman un conjunto localmente finito, por lo que $T := \sum_j T_j$ es un smoothing operator. Además $P_* := \sum_j P_j \in \Psi^d(E,F)$ y es propiamente soportado, pues $\{U_j\}$ es localmente finito. Como podemos escribir

$$P = P_* - T$$

deducimos que T es propiamente soportado. Por la primer parte de la prueba T lleva continuamente $H_{s,loc}(M,E)$ en $\Gamma^\infty(M,F)$, por lo que también lo hace en $H_{s-d,loc}(M,F)$.

Nos resta probar que a P_* lo podemos pensar como un mapa continuo $H_{s,loc}(M,E) \to H_{s-d,loc}(M,F)$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Basta con probar que

$$M_\varphi \circ P_* : H_{s,loc}(M,E) \to H_{s-d,\text{sop}(\varphi)}(M,F)$$

es continuo. Notar que $M_\varphi \circ P_* = \sum_j M_\varphi \circ P_j$, con los índices en el conjunto finito de los j tales que $\text{sop}(\psi_j) \cap \text{sop}(\varphi) \neq \emptyset$. Por lo tanto, basta con probar la continuidad de los mapas $(P_j)_{U_j} : H_{s,loc}(U_j,E) \to H_{s-d,loc}(U_j,F)$, que debido a que podemos trivializar los fibrados E_{U_j} y F_{U_j}, se sigue del Lema 5.4.

□

Con esto ya podemos probar que los operadores elípticos en variedades compactas son Fredholm, pero primero recordamos dos observaciones:

- Si $P \in \Psi^d(E,F)$ es elíptico, entonces $P^t \in \Psi^d(F^\vee, E^\vee)$ también lo es.
- Si M es una variedad compacta, entonces todo operador pseudodiferencial es propiamente soportado.

Teorema 5.6. Sea M una variedad compacta y E, F fibrados vectoriales de M. Sea $d \in \mathbb{R}$ y $P \in \Psi^d(E,F)$ un operador elíptico. Entonces para cada $s \in \mathbb{R}$ el operador

$$P : H_s(M,E) \longrightarrow H_{s-d}(M,F)$$

es Fredholm. Además el índice es independiente de los espacios de Sobolev a los que nos restringimos.

Demostración. Sea $Q \in \Psi^{-d}(F,E)$ una parametriz de P. Tenemos así $QP = 1 - R$ con $R \in \Psi^{-\infty}(E,E)$ smoothing operator.

Al ser $R : H_s(M,E) \to C^\infty(M,E)$ y la inclusión $C^\infty(M,E) \hookrightarrow H_{s+1}(M,E)$ operadores continuos, tenemos que $R : H_s(M,E) \to H_{s+1}(M,E)$ también lo es. Además la inclusión $H_{s+1}(M,E) \hookrightarrow H_s(M,E)$ es compacta, por lo que concluimos que $R : H_s(M,E) \to H_s(M,E)$ es compacto. Entonces $P : H_s(M,E) \to H_{s-d}(M,F)$ tiene una inversa a izquierda módulo operadores compactos. Usando el mismo argumento, a partir de que $PQ - 1 \in \Psi^{-\infty}(F,F)$ podemos probar que también es invertible a derecha módulo operadores compactos. Por lo tanto $P : H_s(M,E) \to H_{s-d}(M,F)$ es Fredholm.

La invariancia del índice con respecto a qué $H_s(M,E)$ restringimos el operador se deduce de regularidad elíptica y de la inclusión $\Gamma^\infty(M,E) \subset H_s(M,E)$.

Este mismo argumento podemos aplicarlo a P^t pues también es un operador elíptico. De esta forma tenemos que tanto Ker P como Ker P^t consisten en secciones suaves, que están incluidas en cualquier $H_s(M, E)$. Concluimos recordando que podemos calcular el índice como Ind $P = \dim(\text{Ker } P) - \dim(\text{Ker } P^t)$, pues $(\text{Im } P)^\perp = \text{Ker } P^t$.

□

Como el índice no depende del espacio de Sobolev al que nos restringimos, simplemente lo vamos a llamar índice. Terminamos esta sección con un resultado que nos dice que para calcular el índice únicamente nos interesa el símbolo principal. Dicho de otra manera, que los términos que no son de grado máximo no afectan al índice.

Proposición 5.7. Sea M una variedad compacta y E, F fibrados complejos en M. Si $P, P' \in \Psi^d(E, F)$ con $\sigma^d(P) = \sigma^d(P')$, entonces $\text{ind}(P) = \text{ind}(P')$.

Demostración. Al coincidir los símbolos principales, tenemos $P - P' = Q \in \Psi^{d-1}(E, F)$. Para todo $s \in \mathbb{R}$ el operador Q lleva $H_s(M, E)$ en $H_{s-d+1}(M, F)$. Además, como vale $H_{s-d+1}(M, F) \hookrightarrow H_{s-d}(M, F)$ con inclusión compacta, se sigue que Q pensado como operador $H_s(M, E) \to H_{s-d}(M, F)$ es compacto. Luego $P_s - P'_s$ es compacto y concluimos $\text{ind}(P_s) = \text{ind}(P'_s)$.

□

Capítulo 6

Teoría de Hodge

Ahora que ya tenemos las herramientas analíticas que usaremos, comenzamos el camino hacia la prueba de Poincaré-Hopf. En la primera sección de este capítulo definimos el operador estrella de Hodge y en la segunda vamos a utilizarlo para presentar cuál es el operador que tiene como índice la característica de Euler de la variedad: el operador de de Rham-Hodge. Para esto nos basamos en la sección 4.1 de [11].

6.1. Estrella de Hodge en espacios vectoriales

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n equipado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Queremos definir un operador $* : \Lambda^*(V) \to \Lambda^*(V)$, que se llama Estrella de Hodge, el cual cumpla que para toda $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V vale

$$*(e^1 \wedge \cdots \wedge e^k) = e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$$

siendo e^i la 1-forma asociada a e_i y k un número entero tal que $0 \leq k \leq n$. En todo lo que resta de esta sección k va a ser siempre de esta forma.

Sin embargo, no es inmediato ver que esto está bien definido y vamos a tener que hacer unas construcciones auxiliares para verificarlo. Luego de probar esto podemos extender esta definición a variedades, que es lo que nos interesa realmente.

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $B^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ su correspondiente base dual. Si I es un subconjunto de $[n] = \{1, \dots, n\}$ con k elementos, consideramos $e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ siendo $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ con $i_1 < \cdots < i_k$. En el caso que $I = \emptyset$ tomamos $e^I = 1$.

Notar que si consideramos todos los subconjuntos de $[n]$ con k elementos, a través de la identificación anterior obtenemos una base de $\Lambda^k(V)$.

Definición 6.1.1. Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal orientada de V. Definimos el operador $*^B : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ dado por

$$*^B(e^I) = s \cdot e^{\widehat{I}}$$

siendo $\widehat{I} = [n] \backslash I = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ y

$$s = \begin{cases} 1, & \text{si } \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}\} \text{ es una base orientada de V} \\ -1, & \text{si no} \end{cases}$$

Observación 6.1.2. El valor de s se elige de esa forma pues así se cumple que $e^I \wedge *^B e^I = \mathrm{vol}$, siendo vol la forma de volumen. Es más, es equivalente definir

$$s = \begin{cases} 1, & \text{si } e^I \wedge e^{\widehat{I}} = \mathrm{vol} \\ -1, & \text{si } e^I \wedge e^{\widehat{I}} = -\mathrm{vol} \end{cases}$$

En definitiva, esto es lo que queremos que cumpla el Estrella de Hodge para cualquier base. Primero lo definimos dependiendo de una base B y ahora queremos verificar que la propiedad se cumple para cualquier base, no solo para la fijada inicialmente. Dicho de otra forma, vamos a probar que $*^B$ no depende de la base elegida.

Notar que podemos identificar $\mathbb{R}$ y $\Lambda^n(V)$ a través de $x \in \mathbb{R} \mapsto x \cdot \mathrm{vol} \in \Lambda^n(V)$. En la siguiente definición estamos usando esta identificación.

Definición 6.1.3. Dada B base ortonormal de V, consideramos el producto interno en $\Lambda^k(V)$ definido por

$$\langle e^I, e^J \rangle_B = e^I \wedge *^B(e^J)$$

Proposición 6.1.4. Si B y B' son dos bases ortonormales de V orientadas, entonces para todo $\omega, \tau \in \Lambda^k(V)$ vale

$$\langle \omega, \tau \rangle_B = \langle \omega, \tau \rangle_{B'}$$

Demostración. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Notar que cualquier otra base ortonormal orientada B' se escribe $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ para alguna A matriz ortogonal. Vamos a probar que ambos productos internos coinciden en una base.

Si $e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$, entonces vamos a anotar $Ae^I = Ae^{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae^{i_k}$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} \langle Ae^I, Ae^J \rangle_{B'} &= Ae^I \wedge (s \cdot Ae^{\widehat{J}}) \\ &= s \cdot (Ae^I \wedge Ae^{\widehat{J}}) \\ &= s \cdot \det A \cdot e^I \wedge e^{\widehat{J}} \\ &= s \cdot e^I \wedge e^{\widehat{J}} \\ &= e^I \wedge (s \cdot e^{\widehat{J}}) \\ &= \langle e^I, e^J \rangle_B \end{aligned}$$

Ahora deducimos que

$$\begin{aligned} \langle e^I, e^J \rangle_{B'} &= \left\langle \sum_K a_K Ae^K, \sum_L a_L Ae^L \right\rangle_{B'} \\ &= \sum_{K,L} a_K b_L \left\langle Ae^K, Ae^L \right\rangle_{B'} \\ &= \sum_{K,L} a_K b_L \left\langle e^K, e^L \right\rangle_B \\ &= \left\langle \sum_K a_K e^K, \sum_L a_L e^L \right\rangle_B \\ &= \langle e^I, e^J \rangle_B \end{aligned}$$

□

El resultado anterior nos dice que el producto interno que definimos es independiente de la base. Así que a partir de ahora vamos a anotarlo simplemente como $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Observación 6.1.5. Un forma equivalente de definir este producto interno sería tomar

$$\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, w^1, \wedge \cdots \wedge w^k\rangle = \det\langle v_i, v_j\rangle$$

siendo $v_i, w_j \in V$.

Antes de definir el estrella de Hodge, presentamos un operador auxiliar. Sea $\phi : \Lambda^{n-k}(V) \to (\Lambda^k(V))^*$ la función que a cada $\tau \in \Lambda^{n-k}(V)$ le asigna $\phi_\tau \in (\Lambda^k(V))^*$ de forma tal que $\forall\omega \in \Lambda^k(V)$ se cumple

$$\omega \wedge \tau = \phi_\tau(\omega)\,\mathrm{vol}$$

Notar que al ser $\tau \in \Lambda^{n-k}(V)$ y $\omega \in \Lambda^k(V)$, entonces $\omega \wedge \tau \in \Lambda^n(V)$. Como $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1, tenemos que $\omega \wedge \tau$ difiere a menos de una constante de la forma de volumen. La constante que satisface esto es justamente $\phi_\tau(\omega)$.

Definición 6.1.6. Sea $\tau \in \Lambda^k(V)$. Anotamos $*\tau$ al elemento de $\Lambda^{n-k}(V)$ que $\forall\omega \in \Lambda^k(V)$ satisface

$$\omega \wedge *\tau = \langle\omega, \tau\rangle\mathrm{vol}$$

El operador que hace esto para todo $\tau \in \Lambda^k(V)$ es el estrella de Hodge, pero primero tenemos que verificar que existe un tal $*\tau$. Consideremos la transformación lineal $\Phi : \Lambda^{n-k}(V) \to (\Lambda^k(V))^*$ definida mediante $\Phi(\tau) = \phi_\tau$. Al tener $(\Lambda^k(V))^*$ y $\Lambda^{n-k}(V)$ la misma dimensión, es fácil ver que esto es un isomorfismo.

Observar que tienen que darse las siguientes igualdades

$$\omega \wedge *\tau = \phi_{*\tau}(\omega)\,\mathrm{vol} = \langle\omega, \tau\rangle\mathrm{vol}$$

Por lo tanto, si definimos $\tau_b \in (\Lambda^k(V))^*$ dada por $\tau_b(\omega) = \langle\omega, \tau\rangle$ para todo $\omega \in \Lambda^k(V)$, resulta que $\phi_{*\tau} = \tau_b$. Así deducimos que $*\tau = \Phi^{-1}(\tau_b)$.

Observación 6.1.7. Dado τ, tenemos que $*^B\tau$ satisface la definición de $*\tau$. Para probar esto basta con hacerlo en una base de $\Lambda^k(V)$, lo que resulta ser inmediato.

Definición 6.1.8. Llamamos **estrella de Hodge** al operador $* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$ dado por

$$\tau \longmapsto *\tau$$

Debido a la Observación 6.1.7 tenemos que los operadores $*$ y $*^B$ son iguales. En particular, el estrella de Hodge cumple que para toda $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de V vale

$$*(e^1 \wedge \cdots \wedge e^k) = e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$$

De hecho, con lo que vimos sabemos que el operador queda bien definido si lo definimos como el que cumple esta propiedad, que en definitiva es lo que queríamos decir desde un principio.

6.2. Descomposición de Hodge

Sea (M, g) una n-variedad Riemanniana cerrada (compacta y sin borde) orientada. Ahora extendemos la definición de estrella de Hodge a variedades.

Definición 6.2.1. Definimos el operador **estrella de Hodge**

$$* : \Lambda^k(T^*M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(T^*M)$$

de la siguiente forma: si $e_1, \dots, e_n$ es una base ortogonal orientada de TM y $e^1, \dots, e^n$ su correspondiente base dual, entonces para todo k natural entre 1 y n tenemos

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^k \longmapsto e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$$

Notar que en cada tangente de la variedad coincide con el estrella de Hodge para espacios vectoriales. Ahora comentamos algunas propiedades, cuyas demostraciones son directas.

Proposición 6.2.2. 1) Para cada k vale $** = (-1)^{nk+k} : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

2) Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, entonces $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$

3) $\alpha \wedge *\alpha = 0$ si y solo si $\alpha = 0$

4) Si $\alpha = \sum f_I e^I$, entonces $\alpha \wedge *\alpha = \sum f_I^2 \,\mathrm{vol}$

A partir de esto podemos definir un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\Omega(M)$ de la siguiente manera: si $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^l(M)$ definimos

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \begin{cases} \int_M \alpha \wedge *\beta & si \quad k = l \\ \\ 0 & si \quad k \neq l \end{cases}$$

Observación 6.2.3. Este producto interno extiende la norma L^2 definida en $C^\infty(M)$ con respecto a la forma de volumen.

Definición 6.2.4. Sea $d^* : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$ el operador definido por

$$\alpha \in \Omega^k(M) \longmapsto (-1)^{nk+n+1} * d * \alpha \in \Omega^{k-1}(M)$$

siendo $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ la derivada exterior en M.

Resulta que d^* y d son adjuntos formales, como vemos a continuación.

Proposición 6.2.5. Para todo $\alpha \in \Omega^k(M),\ \beta \in \Omega^{k+1}(M)$ vale $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle$

Demostración.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^k \cdot \alpha \wedge d * \beta \\ &= d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *d^*\beta \end{aligned}$$

Ahora aplicamos Stokes y tenemos

$$0 = \int_M (d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *d^*\beta) = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, d^*\beta \rangle$$

□

Observación 6.2.6. Notar que $(\Omega^k(M))^* \simeq \Omega^k(M)$, donde el isomorfismo viene dado por el producto interno que definimos en las k-formas. De esta manera, el adjunto (como operador pseudodiferencial) de $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ lo podemos pensar como un operador de la forma $T : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ tal que para todo $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{k+1}(M)$ vale

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T\beta \rangle$$

Como d^* cumple esto, entonces es el operador pseudodiferencial adjunto de d.

Definición 6.2.7. El **operador de de Rham-Hodge** asociado a g^M es

$$D = d + d^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

El operador D restricto a ciertas formas va a tener como índice a la característica de Euler de M. De esta manera podemos conectar la teoría de índice con el enunciado de Poincaré-Hopf. Lo que resta de esta sección lo dedicamos a hacer esto.

Definición 6.2.8. Llamamos **operador de Laplace-Beltrami** (o simplemente Laplaciano) a

$$\Delta = D^2 = dd^* + d^*d$$

Observación 6.2.9. Δ coincide con el Laplaciano estándar cuando nos restringimos al caso de 0-formas en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, y por eso lo vamos a llamar de la misma forma.

Ahora podemos enunciar el **Teorema de descomposición de Hodge**. Para su demostración recomendamos ver [9], Teorema 6.8.

Teorema 6.2.10. Podemos descomponer $\Omega^*(M)$ como

$$\Omega^*(M) = \mathrm{Ker}(\Delta) \oplus \mathrm{Im}(\Delta)$$

Más aún, si anotamos $\Delta_k = \Delta|_{\Omega^k(M)}$, en cada $\Omega^k(M)$ tenemos

$$\Omega^k(M) = \mathrm{Ker}(\Delta_k) \oplus d\left(\Omega^{k-1}(M)\right) \oplus d^*\left(\Omega^{k+1}(M)\right)$$

Juntando el Teorema de descomposición de Hodge y el siguiente lema podemos probar $\mathrm{Ker}\Delta_k \simeq \mathrm{H}^k_{dR}(M, \mathbb{R})$. O sea, podemos relacionar a los operadores definidos en esta sección con la cohomología de De Rham, la cual define la característica de Euler.

Lema 6.2.11. $\mathrm{Ker}\Delta = \mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Ker}(d^*) = \mathrm{Ker}(D)$

Demostración. $\mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Ker}(d^*) \subset \mathrm{Ker}\Delta$ es clara. La otra inclusión se deduce de que si $\omega \in \mathrm{Ker}\Delta$ tenemos

$$0 = \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \underbrace{\langle d\omega, d\omega \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle d^*\omega, d^*\omega \rangle}_{\geq 0}$$

Por otro lado, $\mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Ker}(d^*) \subset \mathrm{Ker}(D)$ es inmediata. Para la otra inclusión notar que si $d\omega + d^*\omega = 0$ con $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces

$$\Omega^{k+1}(M) \ni d\omega = -d^*\omega \in \Omega^{k-1}(M)$$

de lo que concluimos $d\omega = d^*\omega = 0$.

□

Corolario 6.2.12. $\mathrm{Ker}\Delta_k \simeq \mathrm{H}^k_{dR}(M, \mathbb{R})$

Demostración. Por el Lema 6.2.11 $\mathrm{Ker}\Delta_k \subseteq \mathrm{Ker}(d)$. Además, si $\omega, \omega' \in \mathrm{Ker}\Delta_k$ son tales que $\omega - \omega' = d\alpha$ con $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, por descomposición de Hodge deducimos $\omega = \omega'$. Luego cada elemento de $\mathrm{Ker}\Delta_k$ determina un único elemento de $\mathrm{H}^k_{dR}(M, \mathbb{R})$ al tomar su clase de equivalencia.

Ahora veamos que todo elemento de $\mathrm{H}^k_{dR}(M, \mathbb{R})$ tiene un representante en $\mathrm{Ker}\Delta_k$. Supongamos que $d\omega = 0$. Sabemos que existen únicos $\alpha \in \mathrm{Ker}\Delta_k$, $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$, $\gamma \in \Omega^{k+1}(M)$ tales que $\omega = \alpha + d\beta + d^*\gamma$. Pero podemos decir un poco más, ya que en realidad $d^*\gamma = 0$. En efecto, tenemos $0 = d\omega = dd^*\gamma$, de donde deducimos

$$0 = \langle dd^*\gamma, \gamma\rangle = \langle d^*\gamma, d^*\gamma\rangle$$

Por lo tanto $\omega = \alpha + d\beta$ con $\alpha \in \mathrm{Ker}\Delta_k$, $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ únicos. De esta forma tenemos la correspondencia buscada.

□

Este resultado es clave porque nos permite reescribir a la característica de Euler $\chi(M)$ de la variedad como el índice de un operador. Consideremos

$$\Omega^{\text{par}}(M) = \bigoplus_{i \text{ par}} \Omega^i(M), \qquad \Omega^{\text{impar}}(M) = \bigoplus_{i \text{ impar}} \Omega^i(M)$$

$$D_{\text{par}} : \Omega^{\text{par}}(M) \longrightarrow \Omega^{\text{impar}}(M), \qquad D_{\text{impar}} : \Omega^{\text{impar}}(M) \longrightarrow \Omega^{\text{par}}(M)$$

en donde los operadores son simplemente la restricción de D a $\Omega^{\text{par/impar}}$ respectivamente. Es claro que D_{impar} es el adjunto formal de D_{impar}. Luego directamente del Corolario 6.2.12 tenemos

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim\big(H^i_{\text{dR}}(M, \mathbb{R})\big)\\ &= \text{ind}\left(D_{\text{par}} = d + d^* : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M)\right)\\ &= \dim(\text{Ker } D_{\text{par}}) - \dim(\text{Ker } D_{\text{impar}})\end{aligned}$$

Capítulo 7

Deformaciones de Witten

Este capítulo final lo dedicamos estudiar las deformaciones de Witten, que nos permiten construir una homotopía de operadores cuyos extremos tienen como índice a los términos que aparecen en la tesis de Poincaré-Hopf. Véase, a $\chi(M)$ y a $\sum_{p\in X^{-1}(0)} \operatorname{ind}(dX_p)$.

Usamos como referencias el capítulo 4 de [11] y el capítulo 1 de [5].

7.1. Laplaciano de Witten

Operadores de Clifford

Lo primero que haremos será presentar a los operadores de Clifford, que los usaremos para deformar los operadores D y Δ. Para ello, primero definimos el producto interior.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Para un vector $v \in V$ y una k-forma $\theta \in \Lambda^k(V^*)$, anotamos $i_v\theta \in \Lambda^{k-1}(V^*)$ a la $(k-1)$-forma dada por evaluar θ en v. A ι_v lo llamamos producto interior. Si consideramos $e = (x, v) \in TM$ tal que $\pi_{TM}(e) = x$, tenemos bien definido un producto interior en $\Lambda(T_x^*M)$ dado por

$$\Lambda^k(T_x^*M) \ni \theta \longmapsto i_e\theta = i_v\theta \in \Lambda^{k-1}(T_x^*M)$$

Por lo tanto, si $X : M \to M$ es un campo vectorial y $\theta \in \Lambda^k(T^*M)$, podemos extender la definición de producto interior como $(i_X\theta)_x := i_{X(x)}\theta_x$.

Recordar que para cada $x \in M$ y $v \in T_xM$ tenemos un correspondiente $v^* \in T_x^*M$ tal que para todo $w \in T_xM$ vale $v^*(w) = g_x(v, w)$. Entonces, si tomamos un campo de vectores $X : M \to TM$, tenemos una 1-forma dual $X^* : M \to T^*M$ dada por $X_x^*(v) = g_x(X(x), v)$ para todo $x \in M, v \in T_xM$.

Definición 7.1.1. Sea $X : M \to TM$ campo de vectores. Definimos los **operadores de Clifford** como

$$\begin{aligned} c(X) : \Omega^*(M) &\longrightarrow \Omega^*(M) \\ &\longmapsto X^* \wedge \theta - i_X\theta \\ \widehat{c}(X) : \Omega^*(M) &\longrightarrow \Omega^*(M) \\ &\longmapsto X^* \wedge \theta + i_X\theta \end{aligned}$$

Observación 7.1.2. c y $\widehat{c}$ cambian la paridad de las formas.

$$c(X)\big(\Omega^{\text{par}}(M)\big) \subset \Omega^{\text{impar}}(M), \quad c(X)\big(\Omega^{\text{impar}}(M)\big) \subset \Omega^{\text{par}}(M)$$

$$\widehat{c}(X)\big(\Omega^{\text{par}}(M)\big) \subset \Omega^{\text{impar}}(M), \quad \widehat{c}(X)\big(\Omega^{\text{impar}}(M)\big) \subset \Omega^{\text{par}}(M)$$

Proposición 7.1.3. Sean $X, Y : M \to TM$ campos de vectores. Entonces se cumplen las siguientes identidades

$$\big[c(X) \circ c(Y) + c(Y) \circ c(X)\big] = -2g(X, Y)$$

$$\big[\widehat{c}(X) \circ \widehat{c}(Y) + \widehat{c}(Y) \circ \widehat{c}(X)\big] = 2g(X, Y)$$

$$c(X) \circ \widehat{c}(Y) + \widehat{c}(Y) \circ c(X) = 0$$

Demostración. Vamos a probar la primer igualdad, las restantes se obtienen de forma similar. Sea $\theta \in \Lambda(T^*M)$. Computando tenemos

$$c(X) \circ c(Y)\theta = X^* \wedge Y^* \wedge \theta - X^* \wedge (i_Y\theta) - i_Y(X^* \wedge \theta) + i_Y i_X\theta$$

$$c(Y) \circ c(X)\theta = Y^* \wedge X^* \wedge \theta - Y^* \wedge (i_X\theta) - i_X(Y^* \wedge \theta) + i_X i_Y\theta$$

Al sumarlos algunos términos se cancelan y obtenemos

$$\big[c(X) \circ c(Y) + c(Y) \circ c(X)\big]\theta = -X^* \wedge (i_Y\theta) - Y^* \wedge (i_X\theta) - i_X(Y^* \wedge \theta) - i_Y(X^* \wedge \theta)$$

Los términos restantes los calculamos y ya podemos concluir.

$$i_X(Y^* \wedge \theta) = Y^*(X) \wedge \theta = g(X, Y)\theta$$

$$i_Y(X^* \wedge \theta) = X^*(Y) \wedge \theta = g(Y, X)\theta$$

$$Y^* \wedge i_X\theta = g(Y, -) \wedge \theta(X, -, \ldots, -) = -g(X, -) \wedge \theta(Y, -, \ldots, -) = -X^* \wedge i_Y\theta$$

□

Laplaciano de Witten

Ahora que ya conocemos a los operadores de Clifford, los usamos para definir las deformaciones que D y Δ que vamos a estudiar de aquí hasta el final del texto.

Definición 7.1.4. Sea $\nu > 0$ y $X : M \to TM$ campo de vectores, el cual asumimos que es una sección transversal. Definimos los siguientes operadores:

- $D_\nu := d + d^* + \nu^{-1}\widehat{c}(X) : \Omega(M) \to \Omega(M)$
- $\Delta_\nu := D_\nu^2 : \Omega(M) \to \Omega(M)$

Notar que los operadores de Clifford son de orden 0, mientras que d y d^* son de orden 1, por lo que tenemos $\sigma_{D_\nu} = \sigma_D$ y $\sigma_{\Delta_\nu} = \sigma_\Delta$. Al ser Δ un operador elíptico[1] deducimos que Δ_ν también lo es. Por el mismo argumento tenemos que D_ν es un operador elíptico.

Observación 7.1.5. Recordar que vale $\chi(M) = \operatorname{ind}(D : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M))$. Como el índice solo depende del símbolo principal, tenemos $\chi(M) = \operatorname{ind}(D_\nu : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M))$ para todo $\nu > 0$.

[1] Ver página 181 y final de la 182 de [7].

Ahora lo que haremos es reescribir a Δ_ν. Primero vamos a reescribir a d y a d^*, para luego directamente hacer la cuenta con la definición de Δ_ν.

Un comentario importante es que la conexión de Levi-Civita de M, que está definida en TM, se puede extender a $\Omega(M)$. Dados $\omega \in \Omega^k(M)$ y $X, Y_1, \ldots, Y_k$ campos de vectores, definimos

$$\nabla_X \omega(Y_1, \ldots, Y_k) := X\big(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)\big) - \sum_j \omega(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_k)$$

Para el caso de 0-formas lo definimos como la derivada direccional. Usando esta conexión, podemos reescribir a d y a d^*. Por ahora asumimos la siguiente proposición, pero luego la probaremos.

Proposición 7.1.6. Sea $e_1, \ldots, e_n$ base local del fibrado tangente, $\nabla_i = \nabla_{e_i}$ y $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base dual en T^*M. Entonces vale

(I) $d = \sum_{j=1}^n (e_j^* \wedge -) \circ \nabla_j : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$

(II) $d^* = -\sum_{j=1}^n i_{e_j} \circ \nabla_j : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$

Lema 7.1.7. Para todo X, Z campos de vectores vale $\nabla_X(Z^*) = (\nabla_X Z)^*$

Demostración. Sea Y un campo vectorial. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_X(Z^*)(Y) &= X(Z^*Y) - Z^*(\nabla_X Y) \\ &= X\big(g(Z,Y)\big) - g(Z, \nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X Z, Y) \\ &= (\nabla_X Z)^*(Y) \end{aligned}$$

□

Ahora sí estamos listos para calcular Δ_ν.

Teorema 7.1.8. Sea $e_1, \ldots, e_n$ base local del fibrado tangente y $\nabla_j = \nabla_{e_j}$. Entonces tenemos

$$\Delta_\nu = \Delta + \frac{1}{\nu} \sum_j c(e_j) \circ \widehat{c}\big(\nabla_j X\big) + \frac{g(X,X)}{\nu^2}$$

Demostración. Al reescribir a d y d^*, ahora también podemos reescribir su suma.

$$D = d + d^* = \sum_j c(e_j) \circ \nabla_j$$

A partir de esto, la prueba sigue de hacer la cuenta utilizando las propiedades de los operadores de Clifford. Anotamos $[-,-]$ al conmutador y $\{-,-\}$ al anticonmutador.

$$\begin{aligned}
\Delta_\nu &= \big(D+\widehat{c}(X)\big)^2 \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\big\{D,\widehat{c}(X)\big\} + \frac{g(X,X)}{\nu^2} \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\left(\sum_j \Big\{c(e_j)\circ\nabla_j,\widehat{c}(X)\Big\}\right) + \frac{g(X,X)}{\nu^2} \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\left(\sum_j c(e_j)\circ\nabla_j\circ\widehat{c}(X) + \sum_j \widehat{c}(X)\circ c(e_j)\circ\nabla_j\right) + \frac{g(X,X)}{\nu^2} \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\left(\sum_j c(e_j)\circ\nabla_j\circ\widehat{c}(X) - \sum_j c(e_j)\circ\widehat{c}(X)\circ\nabla_j\right) + \frac{g(X,X)}{\nu^2} \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j)\circ\Big[\nabla_j,\widehat{c}(X)\Big] + \frac{g(X,X)}{\nu^2}
\end{aligned}$$

Notar que de la definición de conexión tenemos $\nabla_Z\circ i_X = i_X\circ\nabla_Z + i_{\nabla_Z X}$. Luego

$$\begin{aligned}
\Big[\nabla_j,\widehat{c}(X)\Big]\theta &= \nabla_j\big(\widehat{c}(X)\theta\big) - \widehat{c}(X)\big(\nabla_j\theta\big) \\
&= \nabla_j(X^*\wedge\theta) + \nabla_j(i_X\theta) - X^*\wedge\nabla_j\theta - i_X\big(\nabla_j\theta\big) \\
&= \nabla_j(X^*)\wedge\theta + X^*\wedge\nabla_j\theta - X^*\wedge\nabla_j\theta + i_{\nabla_j X}\theta \\
&= \big(\nabla_j X\big)^*\wedge\theta + i_{\nabla_j X}\theta \\
&= \widehat{c}\big(\nabla_j X\big)\theta
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Delta_\nu &= \Delta + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j)\circ\Big[\nabla_j,\widehat{c}(X)\Big] + \frac{g(X,X)}{\nu^2} \\
&= \Delta + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j)\circ\widehat{c}\big(\nabla_j X\big) + \frac{g(X,X)}{\nu^2}
\end{aligned}$$

□

Fórmula de Bochner (I)

El estudio de los operadores D_ν y Δ_ν lo continuamos en la Sección 7.2, ahora vamos a probar las fórmulas dadas en la Proposición 7.1.6. El primer punto lo deducimos demostrando lo siguiente:

- $\nabla_X(\omega\otimes\tau) = \big(\nabla_X\omega\big)\otimes\tau + \omega\otimes\big(\nabla_X\tau\big)\ \forall\omega,\tau\in\Omega(M)$
- $\nabla_X(\omega\wedge\tau) = \big(\nabla_X\omega\big)\wedge\tau + \omega\wedge\big(\nabla_X\tau\big)\ \forall\omega,\tau\in\Omega(M)$
- Si la fórmula vale para ω y para τ, entonces vale para $\omega\wedge\tau$.
- Probarlo para 0-formas y para 1-formas exactas.

Luego usando que localmente toda k-forma se puede escribir como suma de términos del tipo $adx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ con a función suave, concluimos que vale para todas las formas.

Proposición 7.1.9. Para toda $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^p(M)$ vale

$$\nabla_X(\omega \otimes \tau) = \big(\nabla_X \omega\big) \otimes \tau + \omega \otimes \big(\nabla_X \tau\big)$$

Demostración. Sean $Y_1, \ldots, Y_{k+p}$ campos.

$$\begin{aligned}
&\Big(\nabla_X(\omega \otimes \tau)\Big)(Y_1, \ldots, Y_{k+p}) \\
&\quad = X\Big((\omega \otimes \tau)(Y_1, \ldots, Y_{k+p})\Big) - \sum_j (\omega \otimes \tau)(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_{k+p}) \\
&\quad = \Big(X\big(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)\big)\Big)\tau(Y_{k+1}, \ldots, Y_{k+p}) + \omega(Y_1, \ldots, Y_k)\Big(X\big(\tau(Y_{k+1}, \ldots, Y_{k+p})\big)\Big) \\
&\qquad - \sum_{j \leq k} \omega(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_k)\tau(Y_{k+1}, \ldots, Y_{k+p}) \\
&\qquad - \sum_{j > k} \omega(Y_1, \ldots, Y_k)\tau(Y_{k+1}, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_{k+p}) \\
&\quad = \Big(\big(\nabla_X \omega\big) \otimes \tau + \omega \otimes \big(\nabla_X \tau\big)\Big)(Y_1, \ldots, Y_{k+p})
\end{aligned}$$

□

Lema 7.1.10. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ y π una permutación de k elementos. Entonces

$$\nabla_X(\omega^\pi) = \big(\nabla_X \omega\big)^\pi$$

Demostración. Sean $Y_1, \ldots, Y_k$ campos.

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_X \omega^\pi\big)(Y_1, \ldots, Y_k) &= X\big(\omega^\pi(Y_1, \ldots, Y_k)\big) - \sum_j \omega^\pi(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_k) \\
&= X\Big(\omega\big(Y_{\pi(1)}, \ldots, Y_{\pi(k)}\big)\Big) - \sum_j \omega\big(Y_{\pi(1)}, \ldots, \nabla_X Y_{\pi(j)}, \ldots, Y_{\pi(k)}\big) \\
&= \big(\nabla_X \omega\big)\big(Y_{\pi(1)}, \ldots, Y_{\pi(k)}\big) \\
&= \big(\nabla_X \omega\big)^\pi\big(Y_1, \ldots, Y_k\big)
\end{aligned}$$

□

Usando este resultado, es inmediato que vale $\nabla_X\big(\mathrm{Alt}(\omega)\big) = \mathrm{Alt}\big(\nabla_X \omega\big)$ para toda $\omega \in \Omega(M)$. Con esto ya podemos probar el segundo paso.

Proposición 7.1.11. Para toda $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^p(M)$ vale

$$\nabla_X(\omega \wedge \tau) = \big(\nabla_X \omega\big) \wedge \tau + \omega \wedge \big(\nabla_X \tau\big)$$

Demostración.

$$\nabla_X(\omega \wedge \tau) = \nabla_X\big(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \tau)\big) = \mathrm{Alt}\big(\nabla_X \omega \otimes \tau + \omega \otimes \nabla_X \tau\big) = \nabla_X \omega \wedge \tau + \omega \wedge \nabla_X \tau$$

□

Proposición 7.1.12. Si la fórmula de Bochner vale para $\omega \in \Omega(M)$ y $\tau \in \Omega(M)$, entonces también vale para $\omega \wedge \tau$.

Demostración. Supongamos que

$$d\omega = \sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j}\omega, \qquad d\tau = \sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j}\tau$$

Entonces computamos.

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \tau) &= d\omega \wedge \tau + (-1)^{\mathrm{gr}\omega}\omega \wedge d\tau \\
&= \sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j}\omega \wedge \tau + (-1)^{\mathrm{gr}\omega}\omega \wedge e_j^* \wedge \nabla_{e_j}\tau \\
&= \sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j}\omega \wedge \tau + e_j^* \wedge \omega \wedge \nabla_{e_j}\tau \\
&= \sum_j e_j^* \wedge \big(\nabla_{e_j}\omega \wedge \tau + \omega \wedge \nabla_{e_j}\tau\big) \\
&= \sum_j e_j^* \wedge \big(\nabla_{e_j}(\omega \wedge \tau)\big)
\end{aligned}$$

□

Lo único que nos falta es probar el último paso.

Proposición 7.1.13. Vale la fórmula de Bochner para 0-formas y para 1-formas exactas.

Demostración. Sea $f \in \Omega^0(M)$. Entonces tenemos

$$\sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j} f = \sum_j e_j(f) e_j^*$$

Evaluamos en la base $e_1, \ldots, e_n$ para comprobar que tenemos la fórmula.

$$\sum_j e_j(f) e_j^*(e_i) = e_i(f) = df(e_i)$$

Ahora supongamos que $\omega = df$ con $f \in \Omega^0(M)$. Por un lado, sabemos que $d(df) = 0$. Entonces tenemos que probar que

$$\sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j} df = 0$$

Para ello, vamos evaluar $\sum_j e_i^* \wedge \nabla_{e_j}(df)$ en elementos de la forma (e_k, e_l) y ver que vale 0.

$$\begin{aligned}
\sum_j e_j^* \wedge \nabla_{e_j} df(e_k, e_l) &= \sum_j e_j^*(e_k) \wedge \nabla_{e_j} df(e_l) \\
&= \sum_j e_j^*(e_k)\nabla_{e_j} df(e_l) - e_j^*(e_l)\nabla_{e_j} df(e_k) \\
&= \nabla_{e_k} df(e_l) - \nabla_{e_l} df(e_k) \\
&= e_k\big(df(e_l)\big) - df\big(\nabla_{e_k}(e_l)\big) - \Big(e_l\big(df(e_k)\big) - df\big(\nabla_{e_l}(e_l)\big)\Big) \\
&= e_k\big(e_l(f)\big) - e_l\big(e_k(f)\big) - df(\nabla_{e_k} e_l - \nabla_{e_l} e_k) \\
&= [e_k, e_l](f) - df[e_k, e_l] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Fórmula de Bochner (II)

La demostración consiste en probar que la fórmula dada es el adjunto de d. Para ello necesitamos saber que para toda $\alpha \in \Omega^k(M)$ vale

- $*\nabla_X \alpha = \nabla_X * \alpha$
- $i_{e_j}(\alpha) = (-1)^{n(k+1)} * (e_j^* \wedge *\alpha)$

En efecto, si asumimos esto para todo $\alpha, \beta \in \Omega(M)$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M d(\alpha \wedge *\beta) \\
&= \int_M \sum_j e_j^* \wedge \nabla_j(\alpha \wedge *\beta) \\
&= \int_M \sum_j \big(e_j^* \wedge \nabla_j \alpha \wedge *\beta + e_j^* \wedge \alpha \wedge \nabla_j * \beta\big) \\
&= \int_M \sum_j \big(e_j^* \wedge \nabla_j \alpha \wedge *\beta + e_j^* \wedge \alpha \wedge *\nabla_j \beta\big) \\
&= \int_M \Big(d\alpha \wedge *\beta + \alpha \wedge * \sum_j i_{e_j} \nabla_j \beta\Big) \\
&= \langle d\alpha, \beta\rangle + \langle \alpha, \sum_j i_{e_j} \nabla_j \beta\rangle
\end{aligned}$$

El segundo punto es el Ejercicio 2.14 de [9] y su demostración es simplemente computar. El primero es un poco más fino, así que vamos a hacer algún comentario.

A partir de la métrica en M podemos inducir una en $\Omega(M)$. Si X, Y son campos en M, definimos

$$\langle X^*, Y^*\rangle_{\Omega^1(M)} := \langle X, Y\rangle$$

Luego para k-formas lo extendemos de forma análoga a lo que hicimos en espacios vectoriales (recordar la Observación 6.1.5).

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k\rangle_{\Omega^k(M)} := \det\langle v_i, w_j\rangle$$

De esta manera se cumple que $\omega \wedge *\tau = \langle \omega, \tau\rangle \mathrm{vol}$. Además, directamente computando se puede ver que:

- Si X, Y, Z son campos, entonces
$$Z\langle X^*, Y^*\rangle = \langle \nabla_Z(X^*), Y^*\rangle + \langle X^*, \nabla_Z(Y^*)\rangle$$
- Si X es un campo y v^i, w^j 1-formas, entonces
$$\begin{aligned}
X\Big(\big\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, w^1 \wedge \cdots \wedge w^k\big\rangle\Big) &= \big\langle \nabla_X\big(v^1 \wedge \cdots \wedge v^k\big), w^1 \wedge \cdots \wedge w^k\big\rangle \\
&\quad + \big\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, \nabla_X\big(w^1 \wedge \cdots \wedge w^k\big)\big\rangle
\end{aligned}$$

Sabiendo esto, casi podemos concluir. Si aplicamos la conexión a la igualdad $\omega \wedge *\tau = \langle \omega, \tau\rangle \mathrm{vol}$, obtenemos

$$\omega \wedge \nabla_X(*\tau) = \omega \wedge *\nabla_X \tau + \langle \omega, \tau\rangle \nabla_X \mathrm{vol}$$

Como la igualdad es para todo $\omega, \tau \in \Omega(M)$ y vale $\nabla_X \mathrm{vol} = 0$, deducimos que la conexión y el estrella de Hodge conmutan.

Para ver este último detalle, notar que para calcular la conexión en un punto p no importa quién es X, solo importa el valor de $X(p)$. Por lo tanto, podemos considerar una curva $\alpha : I \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = X(p)$, y un referencial ortonormal paralelo a lo largo de la curva $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$, o sea, que cumple $\frac{De_i}{dt} = 0$. Luego tenemos

$$\nabla_X \mathrm{vol}(p)(e_1(0), \ldots, e_n(0)) = \dot{\alpha}(0) \underbrace{\mathrm{vol}\big(e_1(t), \ldots, e_n(t)\big)}_{=1} - \sum_i \mathrm{vol}\Bigg(e_1, \ldots, \underbrace{\frac{De_i}{dt}}_{=0}, \ldots e_n\Bigg) = 0$$

7.2. Últimos preparativos

En esta sección estudiamos a los operadores D_ν y Δ_ν. Recordar que lo que queremos es poder calcular el índice de estos operadores, por lo que vamos a dar información sobre sus núcleos.

Un estimativo lejos de $X^{-1}(0)$

El siguiente resultado nos dice que lejos de $X^{-1}(0)$, Δ_ν es inyectivo. Por lo tanto, podemos "localizar" la prueba de Poincaré-Hopf a entornos de $X^{-1}(0)$, ya que el núcleo de Δ_ν está formado por formas con soporte concentrado en $X^{-1}(0)$.

Proposición 7.2.1. Sea U un entorno abierto de los ceros de X. Entonces existen constantes $C > 0$ y ν_0 tal que para todo $\nu \leq \nu_0$ y toda $\theta \in \Omega^*(M)$ con soporte disjunto de U vale

$$\|\theta\| \leq C\sqrt{\nu}\|D_\nu\|$$

Demostración. Sea θ en las hipótesis. Entonces existe una $C_1 > 0$ tal que $||X||^2 \geq C_1/2$ para todo $x \in M \setminus U$. Usando el Teorema 7.1.8 deducimos que existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|D_\nu\theta\|^2 = (D_\nu\theta, D_\nu\theta) = (\Delta_\nu\theta, \theta) \geq \left(\frac{C_1}{\nu^2} - \frac{C_2}{\nu}\right)\|\theta\|^2 = \frac{C_1 - \nu C_2}{\nu^2}\|\theta\|^2$$

Luego para ν suficientemente chico tenemos

$$\|\theta\| \leq \frac{\nu}{\sqrt{C_1 - \nu C_2}}\|D_\nu\theta\| \leq C\sqrt{\nu}\|D_\nu\theta\|$$

□

Osciladores armónicos en espacios euclídeos

Ahora vamos a considerar unas simplificaciones, tanto en la métrica como en el campo. Sea $p \in X^{-1}(0)$ y U_p un entorno abierto de p tal que la métrica g allí es de la forma

$$g = (dy^1)^2 + \cdots (dy^n)^2$$

Entonces podemos pensar a cada U_p como un abierto de E_n, que es el espacio euclídeo de dimensión n. Supongamos que allí el campo es $X(y) = Ay$, siendo A una matriz invertible. Entonces podemos escribir

$$\Delta_\nu = -\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j) \circ \widehat{c}(Ae_j) + \frac{1}{\nu^2}Ay \cdot Ay$$

Si anotamos

$$H_\nu = -\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)^2 - \frac{1}{\nu}\mathrm{tr}\left(\sqrt{A^t A}\right) + \frac{1}{\nu^2} Ay\cdot Ay$$

$$K_\nu = \frac{1}{\nu}\mathrm{tr}\left(\sqrt{A^t A}\right) + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j)\circ \widehat{c}(Ae_j)$$

entonces tenemos $\Delta_\nu = H_\nu + K_\nu$, siendo H_ν el Hamiltoniano de un oscilador armónico. Por resultados estándar sobre osciladores armónicos, sabemos que para $\nu > 0$, H_ν es un operador elíptico no-negativo con núcleo de dimensión 1 generado por

$$\exp\left(-\frac{|yA|^2}{2\nu}\right)$$

Más aún, los valores propios distintos de cero son todos mayores que C/ν para alguna constante $C > 0$ (ver Teorema 1.5.1 de [1]). Ahora estudiamos al operador K_ν.

Lema 7.2.2. El operador

$$K = \mathrm{tr}\left(\sqrt{A^t A}\right) + \sum_j c(e_j)\circ \widehat{c}(Ae_j)$$

actuando en $\Lambda^*(E_n^*)$ es no-negativo. Además, $\dim(\ker(K)) = 1$ con $\ker(K) \subset \Lambda^{\mathrm{par}}(E_n^*)$ si $\det(A) > 0$, mientras que $\ker(K) \subset \Lambda^{\mathrm{impar}}(E_n^*)$ si $\det(A) < 0$.

Demostración. Escribimos $A = U\sqrt{A^*A}$ con $U \in O(n)$. Sea $W \in SO(n)$ tal que $\sqrt{A^*A} = W\mathrm{diag}(s_1,\ldots,s_n)W^*$, siendo $s_i > 0$ para todo i. Entonces deducimos que

$$\mathrm{tr}\left(\sqrt{A^t A}\right) = \sum_i s_i$$

$$\sum_i c(e_i)\widehat{c}(e_i A) = \sum_i c(e_i)\widehat{c}(e_i U W \mathrm{diag}(s_1,\ldots,s_n)W^*)$$

Si anotamos $UW = \{w_{ij}\}_{n\times n}$ ahora tenemos

$$\sum_i c(e_i)\widehat{c}(e_i A) = \sum_{i,j} c(e_i)\widehat{c}(e_j w_{ij} s_j W^*) = \sum_j s_j c(e_j W^* U^*)\widehat{c}(e_j W^*)$$

Tomamos $f_j = e_j W^*$, con $1 \le j \le n$, que forma otra base ortonormal orientada de E_n. Usando las igualdades anteriores llegamos a una nueva expresión para K.

$$K = \sum_i s_i\big(1 + c(f_i U^*)\widehat{c}(f_i)\big)$$

Consideremos $\eta_j = c(f_j U^*)\widehat{c}(f_j)$ para $1 \le j \le n$. Entonces usando la Proposición 7.1.3 se puede verificar que vale:

- η_j es autoadjunto para todo j.
- $\eta_j^2 = 1$ para todo j.
- $\eta_i\eta_j = \eta_j\eta_i$ para todo i, j.
- $\widehat{c}(f_j)\eta_j = -\eta_j\widehat{c}(f_j)$ para todo j.

- $\widehat{c}(f_j)\eta_i = \eta_i\widehat{c}(f_j)$ para todo $i \neq j$.

Usando el primer punto, el segundo punto y la expresión encontrada para K, deducimos que K es un operador no negativo. De los puntos restantes, vía inducción, se prueba que

$$\dim\{x \in \Lambda^*(E_n^*) : (1+\eta_j)x = 0 \ \text{ con } \ 1 \leq j \leq n\} = 1$$

Sea $\rho \in \Lambda^*(E_n^*)$ elemento de $\mathrm{Ker}(K)$ con norma 1. Luego tenemos

$$\begin{aligned}\rho &= (-1)^n \left(\prod_i \eta_i\right) \rho \\ &= (-1)^n \big(\det(U)\big) \left(\prod_i c(f_i)\widehat{c}(f_i)\right) \rho\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a las siguientes afirmaciones, que son directas pero tediosas.

- Si $e_1, \ldots, e_n$ es un base ortonormal bien orientada de E_n vale[2]

$$\left(\prod_i c(e_i)\right)\Bigg|_{\Lambda^k(E_n^*)} = (-1)^{nk+\sum_{l=0}^{k-1} l} \ *$$

- Si $e_1, \ldots, e_n$ es un base ortonormal mal orientada de E_n vale

$$\left(\prod_i c(e_i)\right)\Bigg|_{\Lambda^k(E_n^*)} = (-1)^{nk+1+\sum_{l=0}^{k-1} l} \ *$$

Además se puede ver que

$$(-1)^n \left(\prod_i c(f_i)\widehat{c}(f_i)\right)\Bigg|_{\Lambda^{\mathrm{par/impar}}(E_n^*)} = \pm \,\mathrm{Id}|_{\Lambda^{\mathrm{par/impar}}(E_n^*)}$$

de lo que deducimos que $\rho \in \Lambda^{\mathrm{par/impar}}(E_n^*)$ si y solo $\det(U) = \pm 1$.

□

Juntando el lema anterior con lo dicho sobre H_ν, ya podemos dar una mejor descripción de los elementos del núcleo de Δ_ν.

Proposición 7.2.3. Para todo $\nu > 0$ el operador

$$-\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)^2 + \frac{1}{\nu}\sum_j c(e_j) \circ \widehat{c}(Ae_j) + \frac{1}{\nu^2} Ay \cdot Ay$$

actuando en $\Gamma(\Lambda^*(E_n^*))$ es no-negativo. Además, su núcleo es de dimensión 1 generado por

$$\exp\left(-\frac{|Ay|^2}{2\nu}\right)\rho$$

siendo ρ una forma en $\ker(K_\nu)$ de norma 1. Más aún, todos los valores propios de este operador son mayores que C/ν para alguna constante positiva C.

[2]Para el caso de 0-formas, en ambas afirmaciones, el término de la sumatoria no va.

Descomposición de D_ν

Lo que nos queda por estudiar es al operador D_ν. Primero vamos a dar una descomposición de este operador, para luego estudiar cada una de estas componentes por separado.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que cada U_p, con $p \in X^{-1}(0)$, es una bola abierta de radio $4a$. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to [0,1]$ función suave tal que $\gamma(z) = 1$ si $|z| \leq a$ y $\gamma(z) = 0$ si $|z| > 2a$. Para todo $p \in X^{-1}(0)$, $\nu > 0$ definimos

$$\alpha_{p,\nu} := \int_{U_p} \gamma(|y|)^2 \exp\left(-\frac{|yA_p|^2}{\nu}\right) dv_{U_p}$$

$$\rho_{p,\nu} := \frac{\gamma(|y|)}{\sqrt{\alpha_{p,\nu}}} \exp\left(-\frac{|yA_p|^2}{2\nu}\right) \cdot \rho_p$$

siendo ρ_p el de la Proposición 7.2.3. Entonces $\rho_{p,\nu} \in \Omega^*(M)$ es una forma de norma 1 con soporte en U_p. Lo que haremos es trabajar con el conjunto de todas las $\rho_{p,\nu}$, lo que nos permite estudiar al operador D_ν sin restringirnos a trabajar en un entorno de una singularidad concreta.

Notar que podemos asumir que los U_p son disjuntos, ya que son entornos arbitrariamente chicos. Por lo tanto, los $\rho_{p,\nu}$ tienen soportes disjuntos y forman un conjunto linealmente independiente. Anotamos E_ν al subespacio generado por los $\rho_{p,\nu}$. En definitiva,

$$E_\nu := \bigoplus_{p \in X^{-1}(0)} \operatorname{span}(\rho_{p,\nu})$$

Además, descomponemos E_ν como

$$E_\nu = E_\nu^{\text{par}} \oplus E_\nu^{\text{impar}}$$

siendo E_ν^{par} la suma directa de los subespacios generados por los $\rho_{p,\nu}$ tales que $\det(A_p) > 0$, mientras que E_ν^{impar} es lo mismo para los $\rho_{p,\nu}$ tales que $\det(A_p) < 0$. Notar que por el Lema 7.2.2 resulta que E_ν^{par} está formado por formas de grado par y E_ν^{impar} por formas de grado impar.

Sea $E_\nu^\perp$ el complemento ortogonal de E_ν en $H_0(M)$. Así podemos descomponer

$$H_0(M) = E_\nu \oplus E_\nu^\perp$$

Consideramos las proyecciones ortogonales $p_1 : H_0(M) \to E_\nu$ y $p_2 : H_0(M) \to E_\nu^\perp$ con respecto a $H_0(M)$. Usándolas reescribimos a D_ν como

$$D_\nu = \begin{pmatrix} D_{\nu,11} & D_{\nu,12} \\ D_{\nu,21} & D_{\nu,22} \end{pmatrix} : E_\nu \oplus E_\nu^\perp \longrightarrow E_\nu \oplus E_\nu^\perp$$

siendo $D_{\nu,ij} = p_j D_\nu p_i$

Observación 7.2.4. Tenemos una fórmula explícita para p_1.

$$p_1\theta = \sum_{p \in X^{-1}(0)} \rho_{p,\nu} \langle \rho_{p,\nu}, \theta \rangle$$

Estimativos para $D_{\nu,ij}$

En lo que resta de esta sección damos información sobre cada uno de los $D_{\nu,ij}$, que es el remate que nos falta para hacer la demostración de Poincaré-Hopf.

Proposición 7.2.5. Para todo $\nu > 0$, $D_{\nu,11} = 0$.

Demostración. Tenemos $D_{\nu,11}\theta = p_1 D_\nu p_1 \theta$. Por la observación anterior, basta con probar que $p_1 D_\nu \rho_{\nu,p} = 0$ para todo $p \in X^{-1}(0)$. Para ello, notar que si $\rho_{p,\nu}$ es una k-forma, entonces $D_\nu \rho_{p,\nu} \in \Omega^{k+1}(M) \oplus \Omega^{k-1}(M)$ con soporte incluido en U_p. Por lo tanto, $p_1 D_{11} \rho_{\nu,11} = 0$. □

Proposición 7.2.6. Existe $\nu_1 > 0$ tal que si $\nu \le \nu_1$, entonces para toda $\theta \in E_\nu^\perp \cap H_1(M)$ y para toda $\theta' \in E_\nu$ vale

$$\|D_{\nu,12}\theta\| \le \nu\|\theta\|$$

$$\|D_{\nu,21}\theta'\| \le \nu\|\theta'\|$$

Demostración. Notar que $D_{\nu,12}$ y $D_{\nu,21}$ son adjuntos, por lo que basta con probar la primer desigualdad.

$$\begin{aligned}
D_{\nu,12}\theta &= \sum_{p\in X^{-1}(0)} \rho_{p,\nu} \int_{U_p} \langle \rho_{p,\nu}, D_\nu\theta\rangle dv_{U_p} \\
&= \sum_{p\in X^{-1}(0)} \rho_{p,\nu} \int_{U_p} \left\langle D_\nu \left(\frac{\gamma(|y|)}{\sqrt{\alpha_{p,\nu}}} e^{-|yA_p|^2/2\nu} \rho_p, \theta \right) \right\rangle dv_{U_p} \\
&= \sum_{p\in X^{-1}(0)} \rho_{p,\nu} \int_{U_p} \left\langle \frac{c(d\gamma(|y|))}{\sqrt{\alpha_{p,\nu}}} e^{-|yA_p|^2/2\nu} \rho_p, \theta \right\rangle dv_{U_p}
\end{aligned}$$

Explicamos un poco la última igualdad. Si anotamos $\omega = e^{-|yA_p|^2/2\nu}\rho_p$, tenemos $\Delta_\nu\omega = D_\nu^2\omega = 0$ por la Proposición 7.2.3. Es más, deducimos

$$\langle D_\nu\omega, D_\nu\omega\rangle = \langle D_\nu^2\omega, \omega\rangle = 0,$$

por lo que $D_\nu\omega = 0$. Usando esto calculamos $D_\nu(\gamma\omega)$.

$$\begin{aligned}
D_\nu(\gamma\omega) &= (d + d^*)(\gamma\omega) + \gamma\nu^{-1}\widehat{c}(X) \\
&= \sum_i c(e_i)\nabla_{e_i}(\gamma\omega) + \gamma\nu^{-1}\widehat{c}(X) \\
&= \sum_i c(e_i)e_i(\gamma)\omega + \underbrace{\gamma \sum_i c(e_i)\nabla_{e_i}\omega}_{\gamma(d+d^*)\omega} + \gamma\nu^{-1}\widehat{c}(X)\omega \\
&= \sum_i c(e_i)e_i(\gamma)\omega + \gamma \underbrace{\left(d + d^* + \nu^{-1}\widehat{c}(X)\right)\omega}_{D_\nu\omega=0} \\
&= \sum_i c(e_i\gamma e_i)\omega \\
&= c\left(\sum_i e_i(\gamma)e_i\right) \\
&= c(d\gamma)\omega
\end{aligned}$$

Todavía nos resta tener la cota. Al ser $\gamma(y) = 1$ si $|y| \leq a$, entonces $d\gamma(y) = 0$ si $|y| \leq a$. Por lo tanto, existen constantes $A_p, B_p > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\int_{U_p} \langle c(d\gamma(|y|))\omega, \theta\rangle \, dv_{U_p} &= \underbrace{\int_{|y|\leq a} \langle c(d\gamma(|y|))\omega, \theta\rangle \, dv_{U_p}}_{0} + \int_{|y|>a} \langle c(d\gamma(|y|))\omega, \theta\rangle \, dv_{U_p} \\
&\leq \int_{|y|>a} \left(\|c(d\gamma(|y|))\omega\|^2 \, \|\theta\|^2\right)^{1/2} \\
&\leq A_p e^{-B_p/\nu}\|\theta\|
\end{aligned}$$

Luego, existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
\|D_{\nu,12}\theta\| &\leq \sum_{p\in X^{-1}(0)} A_p e^{-B_p/\nu} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu,p}}} \|\rho_{p,\nu}\| \, \|\theta\| \\
&= \sum_{p\in X^{-1}(0)} A_p e^{-B_p/\nu} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu,p}}} \|\theta\| \\
&\leq A e^{-B/\nu} \|\theta\|
\end{aligned}$$

Finalmente, si consideramos ν suficientemente chico deducimos la desigualdad deseada.

$$\|D_{\nu,12}\theta\| \leq A e^{-B/\nu} \|\theta\| \leq \nu\|\theta\|$$

$\square$

Proposición 7.2.7. Existe $\nu_2 > 0$ y $C > 0$ tal que si $\nu \leq \nu_2$, entonces para toda $\theta \in E_\nu^\perp \cap H_1(M)$ vale

$$\|D_\nu\theta\| \geq \frac{C}{\sqrt{\nu}}\|\theta\|$$

Demostración. Para todo $0 \leq b \leq 4a$, anotamos $U_p(b)$ la bola abierta de radio b centrada en $p \in X^{-1}(0)$. Lo probamos en tres pasos:

(I) Asumimos $\mathrm{sop}(\theta) \subset \cup_{p\in X^{-1}(0)} U_p(4a)$.

(II) Asumimos $\mathrm{sop}(\theta) \subset M \setminus \cup_{p\in X^{-1}(0)} U_p(2a)$.

(III) Probamos el caso general.

Paso (I). Podemos asumir que estamos en una unión de espacios euclídeos E_p's que contienen a los U_p's. Para todo $\nu > 0$, $p \in X^{-1}(0)$, anotamos

$$\rho'_{p,\nu} = \exp\left(\frac{-|yA_p|^2}{2\nu}\right)\rho_p$$

Para todo θ tal que $\mathrm{sop}(\theta) \subset \cup_{p\in X^{-1}(0)} U_p(4a)$, anotamos

$$p'_\nu(\theta) = \sum_{p\in X^{-1}(0)} \rho'_{p,\nu} \int_{E_p} \langle \rho'_{p,\nu}, \theta\rangle \mathrm{vol}_{E_p}$$

En definitiva, p'_ν es la proyección ortogonal de $\bigoplus_{p\in X^{-1}(0)} H_0(E_p)$ sobre el espacio de dimensión finita generado por los $\rho'_{p,\nu}$, el cual está incluido en el núcleo de D_ν. Por lo tanto se cumple

$$D_\nu p'_\nu \theta = 0$$

Al tener $p_\nu\theta = 0$, podemos reescribir p'_ν.

$$p'_\nu\theta = \sum_{p\in X^{-1}(0)} \rho'_{p,\nu} \int_{E_p} \left\langle \big(1-\gamma(|y|)\big)\exp\left(\frac{-|yA_p|}{2\nu}\right)\rho_\nu, \theta \right\rangle \mathrm{vol}_{E_p}$$

Como $\gamma = 1$ cerca de cada p, existe una constante $C_1 > 0$ tal que para ν suficientemente chico vale

$$\|p'_\nu\theta\|^2 \leq C_1\sqrt{\nu}\|\theta\|^2$$

Además, por la desigualdad anterior y la Proposición 7.2.3, existen constantes $C_2, C_3 > 0$ tal que

$$\|D_\nu\theta\|^2 = \|D_\nu(\theta - p'_\nu\theta)\|^2 \geq \frac{C_2}{\nu}\|\theta - p'_\nu\theta\|^2 \geq \frac{C_2}{2\nu}\|\theta\|^2 - C_3\frac{1}{\sqrt{\nu}}\|\theta\|^2$$

De esto es inmediato que para ν suficientemente chico tenemos

$$\|D_\nu\theta\| \geq \frac{\sqrt{C_2}}{2\sqrt{\nu}}\|\theta\|$$

Paso (II). Al tener $\mathrm{sop}(\theta) \subset C^\infty(M) \setminus \cup_{p\in X^{-1}(0)}U_p(2a)$ podemos imitar la prueba de la Proposición 7.2.1 y obtener una constante C_3 tal que para ν suficientemente grande vale

$$\|D_\nu\theta\| \geq \frac{C_3}{\sqrt{\nu}}\|\theta\|$$

Paso (III). Sea $\widetilde{\gamma} \in C^\infty(M)$ tal que $\widetilde{\gamma}(|y|) = \gamma(|y|/2)$ en cada U_p, y $\widetilde{\gamma}|_{M-\cup_{p\in X^{-1}(0)}U_p(4a)} = 0$. Primero veamos que para todo $\theta \in E_\nu^\perp \cap H_1(M)$ vale $\widetilde{\gamma}\theta \in E_\nu^\perp \cap H_1(M)$. Si anotamos $\omega = e^{-|yA_p|^2/2\nu}\rho_{p\nu}$, entonces $\rho_{p,\nu} = \gamma\omega$ y queremos probar que $\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle$=0.

$$\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle = \int_{|y|\leq 2a}\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle + \int_{|y|\geq 2a}\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle$$

Notar que el segundo sumando desaparece por tener $\gamma(|y|) = 0$ si $|y| \geq 2a$, mientras que si $|y| \leq 2a$ vale $\widetilde{\gamma}(y) = 1$. Por lo tanto

$$\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle = \int_{|y|\leq 2a}\langle\gamma\omega, \widetilde{\gamma}\theta\rangle = \int_{|y|\leq 2a}\langle\gamma\omega, \theta\rangle = \langle\gamma\omega, \theta\rangle = 0$$

Entonces para ν suficientemente chico, usando los pasos anteriores, existe una constante C_4 tal que

$$\begin{aligned}
\big\|D_\nu\theta\big\| &\geq \frac{1}{2}\Big(\big\|(1-\widetilde{\gamma})D_\nu\theta\big\| + \big\|\widetilde{\gamma}D_\nu\theta\big\|\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\big\|D_\nu\big((1-\widetilde{\gamma})\theta\big) + [D_\nu, \widetilde{\gamma}]\theta\big\| + \big\|D_\nu(\widetilde{\gamma}\theta) + [\widetilde{\gamma}, D_\nu]\theta\big\|\Big)\\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{\nu}}\Big(C_3\big\|(1-\widetilde{\gamma})\theta\big\| + \sqrt{C_2}\big\|\widetilde{\gamma}\theta\big\|\Big) - C_4\big\|\theta\big\|\\
&\geq \frac{C_5}{\sqrt{\nu}}\big\|\theta\big\| - C_4\big\|\theta\big\|
\end{aligned}$$

siendo $C_5 = \mathrm{mín}\{\sqrt{C_2}/2, C_3/2\}$.

□

Consideremos el siguiente lema de análisis, para el cual contamos los pasos de la prueba.

Lema 7.2.8. Si $A : V \to W$ es un operador lineal continuo autoadjunto tal que existe $\alpha > 0$ que cumple $|Av| \geq \alpha|v|$ para todo $v \in V$, entonces A es biyectivo.

Demostración. Se prueba que si un operador cumple la hipótesis, entonces la imagen es un espacio de Hilbert. Además se tiene que A^* es sobreyectiva, pero al ser autoadjunto deducimos que A es invertible.

□

Proposición 7.2.9. El operador $D_{\nu,22} : E_\nu^\perp \cap H_1(M) \to E_\nu^\perp$ es invertible si ν es suficientemente chico.

Demostración. Basta con probar que existe $\nu_3 > 0$ y $C > 0$ tal que para todo $\theta \in E_\nu^\perp \cap H_1(M)$ y $\nu < \nu_3$ vale

$$\|D_{\nu,22}\theta\| \geq C\|\theta\|$$

Observar que en $E_\nu^\perp \cap H_1(M)$ tenemos $D_\nu = D_{\nu,12} + D_{\nu,21}$, por lo que usando las desigualdades de la Proposición 7.2.6 y 7.2.7 podemos concluir.

□

7.3. Prueba de Poincaré-Hopf

Juntando lo que conocemos sobre los operadores $D_{\nu,ij}$ obtenemos una homotopía de operadores Fredholm, que tiene como extremos a D_ν y a $D_{\nu,11} + D_{\nu,22}$.

Corolario 7.3.1. El operador

$$D_\nu(u) := D_{\nu,11} + D_{\nu,22} + u(D_{\nu,12} + D_{\nu,21}) : H_1(M) \to H_0(M)$$

es Fredholm para todo $0 \leq u \leq 1$, si ν es suficientemente chico.

Demostración. De la Proposición 7.2.6 tenemos que $D_{\nu,12}$ y $D_{\nu,21}$ son operadores compactos. Por lo tanto basta con probar que $D_{\nu,11} + D_{\nu,22} : H_1(M) \to H_0(M)$ es Fredholm. Observar que de las proposiciones 7.2.5, 7.2.9 y las definiciones de los operadores tenemos

$$\mathrm{Ker}(D_{\nu,11} + D_{\nu,22}) = \mathrm{Ker}(D_{\nu,11}) \cap \mathrm{Ker}(D_{\nu,22}) = H_1(M) \cap E_\nu = E_\nu$$

$$\mathrm{Im}(D_{\nu,11} + D_{\nu,22}) = \mathrm{Im}(D_{\nu,11}) \oplus \mathrm{Im}(D_{\nu,22}) = \{0\} \oplus E_\nu^\perp = E_\nu^\perp$$

En definitiva, el operador tiene núcleo y coimagen de dimensión finita.

□

Como ya hemos hecho hasta ahora, dado un conjunto A de formas diferenciales, anotamos A^{par} a las formas en A de grado par, y de forma idéntica para las de grado impar. Con toda esta maquinaria ya estamos listos para probar Poincaré-Hopf, no sin antes recordar su enunciado.

Teorema (Poincaré-Hopf). Sea M una variedad compacta sin borde y $X \to TM$ una sección transversal. Entonces vale

$$\sum_{X(p)=0} \mathrm{sign}(dX_p) = \chi(M)$$

Demostración. Recordar que a partir de la Sección 7.2 estamos suponiendo que el campo X en un entorno de cada singularidad p es multiplicar por una matriz invertible A_p, así que ahora también vamos a asumir eso. Por otro lado, por la Observación 7.1.5 tenemos que para todo $\nu > 0$ vale

$$\chi(M) = \operatorname{ind}\big(D_\nu : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M)\big)$$

Luego, por el Corolario 7.3.1 y la invariancia por homotopías del índice, si tomamos ν suficientemente chico vale la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \operatorname{ind}\big(D_\nu : \Omega^{\text{par}}(M) \to \Omega^{\text{impar}}(M)\big) \\
&= \operatorname{ind}\big(D_\nu : H_1^{\text{par}}(M) \to H_0^{\text{impar}}(M)\big) \\
&= \operatorname{ind}\big(D_\nu(0) : H_1^{\text{par}}(M) \to H_0^{\text{impar}}(M)\big) \\
&= \operatorname{ind}\big(D_{\nu,11} + D_{\nu,22} : H_1^{\text{par}}(M) \to H_0^{\text{impar}}(M)\big) \\
&= \operatorname{ind}\big(D_{\nu,11} + D_{\nu,22} : H_1^{\text{par}}(M) \to E_\nu^{\text{impar}} \oplus E_\nu^{\perp,\text{impar}}\big)
\end{aligned}$$

Notar que tenemos

$$\begin{aligned}
H_1^{\text{par}}(M) &= H_1^{\text{par}}(M) \cap H_0^{\text{par}}(M) \\
&= H_1^{\text{par}}(M) \cap \big(E_\nu^{\text{par}} \oplus E_\nu^{\perp,\text{par}}\big) \\
&= \big(H_1^{\text{par}}(M) \cap E_\nu^{\text{par}}\big) \oplus \big(H_1^{\text{par}}(M) \cap E_\nu^{\perp,\text{par}}\big) \\
&= E_\nu^{\text{par}} \oplus \big(H_1^{\text{par}}(M) \cap E_\nu^{\perp,\text{par}}\big)
\end{aligned}$$

Para la última igualdad estamos usando que $E_\nu \subset H_1(M)$, por ser E_ν un conjunto formado por formas diferenciales (que son las secciones suaves en este contexto). Por lo tanto, tiene sentido escribir

$$D_{\nu,11} + D_{\nu,22} : E_\nu^{\text{par}} \oplus \big(H_1^{\text{par}}(M) \cap E_\nu^{\perp,\text{par}}\big) \to E_\nu^{\text{impar}} \oplus E_\nu^{\perp,\text{impar}}$$

Recordar que $D_{\nu,22} : H_1(M) \cap E_\nu^\perp \to E_\nu^\perp$ es invertible (Proposición 7.2.9). Usando que $D_{\nu,22}$ cambia la paridad de las formas, tenemos que el siguiente mapa es invertible

$$D_{\nu,22} : H_1^{\text{par}}(M) \cap E_\nu^{\perp,\text{par}} \to E_\nu^{\perp,\text{impar}}$$

Al tener $D_{\nu,11} = 0$, $D_{\nu,22}(E_\nu^{\text{par}}) = 0$ y $D_{\nu,22}$ ser un operador invertible si se lo restringe de la manera anterior, entonces vale

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}\big(D_{\nu,11} + D_{\nu,22} : H_1^{\text{par}}(M) \to E_\nu^{\text{impar}} \oplus E_\nu^{\perp,\text{impar}}\big) &= \operatorname{ind}\big(D_{\nu,11} : E_\nu^{\text{par}} \to E_\nu^{\text{impar}}\big) \\
&= \dim\big(E_\nu^{\text{par}}\big) - \dim\big(E_\nu^{\text{impar}}\big)
\end{aligned}$$

Acordarse que

$$E_\nu = \bigoplus_{p \in X^{-1}(0)} \operatorname{span}(\rho_{p,\nu})$$

y a cada singularidad le corresponde exactamente una forma $\rho_{p,\nu}$, siendo $\{\rho_{p,\nu}\}_{p\in X^{-1}(0)}$ un conjunto linealmente independiente. Además, E_ν^{par} es el subespacio generado por los $\rho_{p,\nu}$ tales que $\det(A_p) > 0$, mientras que E_ν^{impar} es lo mismo para los $\rho_{p,\nu}$ tales que $\det(A_p) < 0$. Juntando las dos cadenas de igualdades de índices concluimos la prueba.

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \dim\big(E_\nu^{\text{par}}\big) - \dim\big(E_\nu^{\text{impar}}\big) \\
&= \sum_{p \in X^{-1}(0)} \operatorname{sgn}\big(\det(A_p)\big)
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] James Glimm and Arthur Jaffe. *Quantum physics: A functional integral point of view.* Springer Science & Business Media, 1987.

[2] Peter Hintz. *Introduction to microlocal analysis.* Disponible en `https://people.math.ethz.ch/~hintzp/notes/micro.pdf`, 2023.

[3] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I, Distribution Theory and Fourier Analysis.* Springer Science & Business Media, 1990.

[4] MS Joshi. Introduction to pseudo-differential operators. *arXiv preprint math.AP/9906155*, 1999.

[5] Leonardo Masci. Witten deformations, geometry and dynamics. Master's thesis, Università degli Studi di Padova, 2018.

[6] John Willard Milnor and David W Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton University Press, 1997.

[7] Michael E Taylor. *Partial differential equations I*, volume 115. Springer Science & Business Media, 2 edition, 2011.

[8] Erik van den Ban and Marius Crainic. *Analysis on Manifolds.* Disponible en `webspace.science.uu.nl/~ban00101/geoman2017/AS-2017rev.pdf`, 2017.

[9] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 1983.

[10] Edward Witten. Supersymmetry and morse theory. *Journal of differential geometry*, 17(4):661–692, 1982.

[11] Weiping Zhang. *Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations*, volume 4. World Scientific, 2001.