Monoides Algebraicos e Inmersiones en Grupos

Luciano Muñiz Manasliski

Orientador: Dr. Alvaro Rittatore

20 de febrero de 2025

Índice general

Introducción

En este trabajo, $\Bbbk$ será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0, aunque en general los resultados son válidos para característica arbitraria. El motivo por el cual consideramos característica 0 es para simplificar la prueba del teorema 3.3.2 (y aquí es el único momento donde realmente usamos característica 0), ya que los morfismos siempre serán *separables*. Cuando la característica del cuerpo no es 0, la principal herramienta para analizar la separabilidad de un morfismo es el diferencial, pero en esta monografía no exponemos sobre dicho tema.

Un *monoide algebraico* es un monoide (conjunto con una operación bilateral asociativa y un elemento neutro) que tiene una estructura de $\Bbbk$-variedad algebraica donde la multiplicación es un morfismo de variedades algebraicas. Un *grupo algebraico* es un monoide algebraico donde todo elemento es invertible y la operación de tomar inversos es un morfismo de variedades algebraicas. Si bien tomamos dicha definición de grupo algebraico, un resultado que surge de la prueba del teorema 3.3.2 es que si G es un monoide algebraico donde todo elemento es invertible, entonces G es un grupo algebraico, es decir que tomar inversos es necesariamente un morfismo de variedades [11].

Si M es un monoide, se denota por $G(M)$ al grupo de invertibles de M. El principal objetivo es probar que si M es un monoide algebraico, entonces $G(M)$ es un grupo algebraico abierto en M [11].

Sea $M_n(\Bbbk)$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en $\Bbbk$ y $GL_n(\Bbbk)$ el grupo de matrices invertibles de $M_n(\Bbbk)$. Entonces $M_n(\Bbbk)$ con el producto usual de matrices es un monoide algebraico. Si M es un monoide algebraico afín (M es una variedad afín), entonces M es isomorfo a un cerrado de $M_n(\Bbbk)$ para algún n [14, teorema 3.15]. Por lo tanto se puede considerar que $M \subset M_n(\Bbbk)$ y $G(M) = GL_n(\Bbbk) \cap M \subset M_n(\Bbbk)$, así que $G(M)$ es un grupo algebraico que además es abierto en M porque $GL_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) : \det(A) \neq 0\}$ es abierto ya que $\det\colon M_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ es polinomial. En [11, teorema 1] se prueba que $G(M)$ es un grupo algebraico abierto en M para un monoide algebraico irreducible arbitrario. En esta monografía seguimos las ideas de esa misma prueba y extendemos la prueba al caso no irreducible.

Si bien el objetivo de esta monografía es el teorema 3.3.2, gran parte de este trabajo es el estudio de toda la geometría algebraica involucrada en el mencionado teorema. La mayoría de los temas presentados en los capítulos 1 y 2 podrían ser parte de un curso avanzado de geometría algebraica pero en esta monografía se presentan como parte de un estudio independiente de dichos temas. Lo primero que presentamos son las variedades afines porque son como el análogo a los abiertos de $\mathbb{R}^n$ en la geometría diferencial. Inmediatamente se sigue el camino tradicional, donde se definen los conjuntos algebraicos y mostramos la dualidad que existe con las variedades afines. En este trabajo intentamos que la definición de variedad algebraica permita una extensión natural a la idea de esquemas. Si bien no presentamos este tema, algunas de las definiciones, ideas y teoremas llevan como por detrás del telón a los esquemas. En un esquema, el objeto básico es el espectro primo de un anillo (conmutativo y con unidad); aquí está la diferencia con las variedades algebraicas, nosotros consideramos el espectro maximal de una $\mathbb{k}$-álgebra, además es importante remarcar que en esta monografía los *espacios anillados* son en realidad de $\mathbb{k}$-álgebras.

Capítulo 1

Preliminares

En esta monografía todos los anillos considerados son conmutativos y con unidad, la principal referencia para los resultados del álgebra conmutativa es [1].

En este capítulo definiremos el concepto de *variedad algebraica afín* como el espectro maximal de una $\mathbb{k}$-álgebra con cierta estructura de espacio topológico.

Luego, para definir una *variedad algebraica* lo haremos a través de un *haz* de $\mathbb{k}$-álgebras en espacios topológicos. Entonces dedicaremos una sección para tratar el tema de *haces* y algunas de sus propiedades.

También introduciremos el concepto de *dimensión* de una variedad algebraica. Para esto hablaremos de tres aspectos importantes que se relacionan entre sí a la hora de hablar de una variedad algebraica: la *dimensión de un espacio topológico*, la *dimensión de un anillo* y el *grado de trascendencia* de una extensión de cuerpos.

La idea de este capítulo es presentar las variedades algebraicas. Si bien gran parte del contenido puede encontrarse en un curso básico de introducción a la geometría algebraica, se le da un enfoque muy personal; se intenta, entre otras cosas, que las ideas presentadas sean fácilmente generalizables al contexto de esquemas. En líneas generales seguimos [2] y como complemento usamos [6] y [10].

1.1. Variedad algebraica afín

Definición 1.1.1. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Definimos el *espectro maximal* de A como el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es:

$$\mathrm{Spm}(A) = \{M \subset A \ / \ M \text{ es un ideal maximal de } A\}$$

y cuya topología es la que tiene como *base* los conjuntos:

$$\mathrm{Spm}(A)_f = \{M \in \mathrm{Spm}(A) \ / \ f \notin M\} \quad \text{para } f \in A.$$

Llamemos $X = \mathrm{Spm}(A)$ y verifiquemos que los conjuntos X_f forman una base de una topología para X:

1. $\bigcup\limits_{f \in A} X_f = X$, se debe a que si M es un ideal maximal entonces $M \subsetneq A$ por lo tanto existe $f \in A$ tal que $f \notin M$.

2. Sean f y $g \in A$, entonces
$$M \in X_f \cap X_g \Leftrightarrow f \notin M \text{ y } g \notin M \Leftrightarrow fg \notin M \Leftrightarrow M \in X_{fg},$$
luego $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

3. Observemos que, como el elemento nulo $0 \in A$ pertenece a todo ideal de A, tenemos en particular que $\mathrm{Spm}(A)_0 = \varnothing$, el conjunto vacío.

Definición 1.1.2.

1. Diremos que una $\Bbbk$-álgebra A es *reducida* si no tiene elementos nilpotentes diferentes del nulo, es decir que si A es reducida y $a \in A$ es tal que $a^n = 0$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces $a = 0$.

2. Diremos que una $\Bbbk$-álgebra es *afín* si es finitamente generada y reducida.

Ejemplo 1.1.3.

1. Toda $\Bbbk$-álgebra que sea un dominio de integridad es reducida dado que no tiene divisores de cero. El álgebra de este tipo que juega un rol central en la teoría es el anillo de polinomios con n indeterminadas, $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

2. El álgebra de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\Bbbk$, $M_n(\Bbbk)$, es finitamente generada, de hecho es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, pero no es reducida. Aunque, claramente, no es un álgebra conmutativa. Como un ejemplo de un álgebra conmutativa y finitamente generada que no es reducida tenemos $\Bbbk[x]/\langle x^2 \rangle$, la clase de la indeterminada x es no nulo pero elevado al cuadrado resulta el elemento nulo.

Definición 1.1.4 (Variedad afín)**.** Diremos que la terna (X, A, φ) es una $\Bbbk$-*variedad algebraica afín* o, simplemente, una *variedad afín* si X es un espacio topológico, el conjunto A es una $\Bbbk$-álgebra afín y $\varphi : X \to \mathrm{Spm}(A)$ un homeomorfismo. Diremos que el espacio topológico X es el *espacio topológico subyacente* de la variedad afín y muchas veces nos referiremos a la variedad afín mencionando sólo el espacio topológico X sin especificar el álgebra y el homeomorfismo asociados.

Observación 1.1.5. Es evidente que si A es una $\Bbbk$-álgebra afín, entones $\mathrm{Spm}(A)$ es una variedad afín dada por la terna $\big(\mathrm{Spm}(A), A, id\big)$, donde $id : \mathrm{Spm}(A) \to \mathrm{Spm}(A)$ es el mapa identidad.

Si $I \subset A$ es un ideal e $Y = \{M \in \mathrm{Spm}(A) \ / \ I \subset M\} \subset \mathrm{Spm}(A)$, la correspondencia entre los ideales de A que contienen a I y los ideales de A/I

establece un homeomorfismo $\varphi\colon Y \to \mathrm{Spm}(A/I)$ donde Y tiene la topología relativa (heredada de $\mathrm{Spm}(A)$), entonces la terna $(Y, A/I, \varphi)$ es una variedad afín (ver proposición 1.1.32). Observar que el conjunto Y es un cerrado de $\mathrm{Spm}(A)$ y que todo cerrado es de ese tipo para algún ideal $I \subset A$, por lo que cualquier cerrado de una variedad afín es una variedad afín.

Ahora veamos qué pasa con un abierto básico de una variedad afín, particularmente un abierto básico de $\mathrm{Spm}(A)$. Para eso usamos la siguiente notación.

Notación: Si A es un anillo y $P \subset A$ es un ideal primo denotamos por A_P al anillo de fracciones $S^{-1}A$ donde $S = A \setminus P$. Si $0 \neq a \in A$ denotamos por A_a al anillo de fracciones $S^{-1}A$ donde el conjunto multiplicativo es $S = \{a^n \ / \ n \geq 0\}$ (ver en [1, Capítulo 3]).

Si A es una $\Bbbk$-álgebra afín, entonces A_a es una $\Bbbk$-álgebra afín; en efecto, si $a_1, \ldots, a_n$ son los generadores de A, entonces $\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_n}{1}, \frac{1}{a}$ generan A_a; además, si $\left(\frac{b}{a^m}\right)^n = 0$ entonces $b^n = 0$ y como A es reducida $b = 0$.

Observación 1.1.6. Sean A una $\Bbbk$-álgebra afín, $X = \mathrm{Spm}(A)$ y $0 \neq f \in A$. Veremos que el abierto $X_f = \{M \in X : f \notin M\}$ puede ser visto como una variedad afín definiendo un homeomorfismo $\varphi\colon X_f \to \mathrm{Spm}(A_f)$. Consideremos el conjunto multiplicativo $S = \{f^n \ / \ n \geq 0\}$ y para cada $M \in \mathrm{Spm}(A)$ el conjunto $S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \ / \ m \in M, s \in S\}$ que es un ideal de $A_f = S^{-1}A$, entonces definimos $\varphi(M) = S^{-1}M$; en efecto, veamos que $S^{-1}M \in \mathrm{Spm}(A_f)$: si $M \in X_f$ es un ideal maximal, $f \notin M$ por lo que $S \cap M = \varnothing$, entonces $S^{-1}M \subsetneq A_f$ ($1 \notin S^{-1}M$) es maximal ya que si $\frac{a}{s} \notin S^{-1}M$ se tiene que $a \notin M$, pero M es maximal así que $\langle a, M\rangle = A$ (el ideal generado por a y M), por lo que existen $b \in A \setminus M$, $m \in M$ tales que

$$ab + m = 1.$$

Entonces

$$\frac{a}{s}\frac{b}{1} + \frac{m}{s} = \frac{1}{s},$$

que es una unidad de A_f, por lo tanto $S^{-1}M$ es maximal porque junto con cualquier elemento $\frac{a}{s} \notin S^{-1}M$ genera todo el anillo A_f. Por otro lado, todo ideal primo de A_f es de la forma $S^{-1}P$ para algún $P \subset A$ primo tal que $P \cap S = \varnothing$ (esta correspondencia es biyectiva [1, Proposición 3.11]). Como todo ideal maximal en particular es primo, entonces todo ideal maximal de A_f es de la forma $S^{-1}P$ con $P \subset A$ primo. Pero P debe ser maximal, porque si $P \subset M$ donde M es maximal, entonces $S^{-1}P = S^{-1}M$ (es maximal), de donde $P = M$ ([1, Proposición 3.11]). Así que φ establece una biyección entre X_f y $\mathrm{Spm}(A_f)$. Que esta biyección es continua con inversa continua (donde X_f tiene la topología relativa, es decir que un abierto básico es de la forma $X_f \cap X_h = X_{fh}$) se deduce de la siguiente igualdad:

$$\varphi(X_{fh}) = \mathrm{Spm}(A_f)_{\frac{h}{s}}$$

que vale para todo $h \in A$ y para todo $s \in S$:

$$S^{-1}M \in \operatorname{Spm}(A_f)_{\frac{h}{s}} \Leftrightarrow \frac{h}{s} \notin S^{-1}M \Leftrightarrow h \notin M \Leftrightarrow fh \notin M \text{ (porque } f \notin M)$$
$$\Leftrightarrow M \in X_{fh} \Leftrightarrow S^{-1}M = \varphi(M) \in \varphi(X_{fh}).$$

Se concluye entonces que la terna (X_f, A_f, φ) es una variedad afín.

1.1.1. Conjuntos algebraicos

Presentaremos ahora los *conjuntos algebraicos* de $\Bbbk^n$ y sus propiedades; un conjunto algebraico será el espacio topológico subyacente de una variedad afín, y recíprocamente, el espacio topológico subyacente de una variedad afín es homeomorfo a un conjunto algebraico (ver proposiciones 1.1.32 y 1.2.38).

Definición 1.1.7. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Bbbk^n$, denotamos por $\epsilon_a : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk$ al *mapa evaluación* en a, definido como el único morfismo de $\Bbbk$-álgebras tal que $\epsilon_a(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Observación 1.1.8. Sea $\psi : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^{\Bbbk^n}$ el morfismo de $\Bbbk$-álgebras dado por $\psi(f)(a) = \epsilon_a(f)$. Como $\Bbbk$ es infinito (ya que es algebraicamente cerrado), tenemos que ψ es inyectivo [9, 1. §1. Proposition 5.]. Entonces dado un polinomio $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, este se identifica con una única función de $\Bbbk^n$ en $\Bbbk$ por medio del morfismo ψ. A partir de ahora veremos a los polinomios como funciones y usamos la misma notación para un elemento $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ y su imagen por ψ, es decir que adoptamos la notación $f(a) := \psi(f)(a)$ y decimos que estamos evaluando el polinomio f en a; asimismo también decimos que el polinomio f se anula en un punto $a \in \Bbbk^n$, o que a es un cero de f, si $f(a) = 0$. Será útil además usar la notación usual de restricción de funciones $f|_X$ para un polinomio f restringido a un conjunto $X \subset \Bbbk^n$.

Definición 1.1.9. Sea $S \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ un subconjunto no vacío de polinomios del anillo de polinomios en n indeterminadas. El *conjunto algebraico* definido por S es el conjunto

$$\mathcal{V}(S) = \{a \in \Bbbk^n \ / \ f(a) = 0 \ \forall f \in S\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{V}(S)$ son los ceros comunes de los polinomios de S.

Notaciones: Sean A un anillo, $T, S \subset A$ dos subconjuntos no vacíos de A e $I \subset A$ un ideal de A. Entonces $\langle S \rangle$ denota el *ideal generado* por S; TS es el conjunto $\{ts \in A \ / \ t \in T, s \in S\}$ y

$$\sqrt{I} = \{a \in A \ / \ a^n \in I \text{ para algún número natural } n > 0\}$$

el *radical* de I. Recordamos que un ideal I se dice *radical* si $\sqrt{I} = I$; el conjunto $\sqrt{I}$ es el menor ideal radical que contiene a I. Observar que para todo ideal I se cumple $I \subset \sqrt{I}$.

Proposición 1.1.10. *Sean $S, T \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ dos subconjuntos del anillo de polinomios.*

1. *Si $S \subset T$, entonces $\mathcal{V}(T) \subset \mathcal{V}(S)$.*
2. *$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$.*
3. *$\mathcal{V}(S) \cup \mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(ST)$.*
4. *Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ donde Ω es un conjunto de índices, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Omega} \mathcal{V}(S_\alpha) = \mathcal{V}\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} S_\alpha\right)$.*
5. *Si S en un ideal, entonces $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}\left(\sqrt{S}\right)$.*

Demostración.

1. Si $a \in \Bbbk^n$ anula los polinomios de T entonces en particular, como $S \subset T$, a anula los polinomios de S.

2. Dado que $S \subset \langle S \rangle$ se tiene que $\mathcal{V}(\langle S \rangle) \subset \mathcal{V}(S)$. Para probar la otra inclusión sean $a \in \mathcal{V}(S)$ y $f \in \langle S \rangle$. Consideremos $s_1, \ldots, s_r \in S$ y $g_1, \ldots, g_r \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f = g_1 s_1 + \cdots + g_r s_r$, entonces $f(a) = g_1(a)s_1(a) + \cdots + g_r(a)s_r(a) = 0$ ya que para todo i, $s_i \in S$ y $a \in \mathcal{V}(S)$. Entonces $f(a) = 0$ para todo $f \in \langle S \rangle$, así que $a \in \mathcal{V}(\langle S \rangle)$.

3. Sea $a \in \mathcal{V}(S) \cup \mathcal{V}(T)$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $a \in \mathcal{V}(S)$, así que $f(a) = 0$ para todo $f \in S$ y por lo tanto, si $g \in \mathcal{V}(T)$, tenemos que $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0$. Entonces $a \in \mathcal{V}(ST)$.

Sea $a \in \mathcal{V}(ST)$ y supongamos que $a \notin \mathcal{V}(S)$. Entonces existe $f \in S$ tal que $f(a) \neq 0$, pero $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0$ para todo $g \in T$, por lo tanto $a \in \mathcal{V}(T)$.

4. $a \in \bigcap_{\alpha \in \Omega} \mathcal{V}(S_\alpha) \Leftrightarrow f(a) = 0 \; \forall f \in S_\alpha \; \forall \alpha \in \Omega \Leftrightarrow a \in \mathcal{V}\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} S_\alpha\right)$.

5. Como $S \subset \sqrt{S}$ entonces $\mathcal{V}\left(\sqrt{S}\right) \subset \mathcal{V}(S)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $a \in \mathcal{V}(S)$ y $f \in \sqrt{S}$. Existe $n > 0$ tal que $f^n \in S$, entonces $f^n(a) = (f(a))^n = 0 \in \Bbbk$ y por lo tanto $f(a) = 0$, así que $a \in \mathcal{V}\left(\sqrt{S}\right)$. □

Observación 1.1.11. 1. Por la proposición 1.1.10 los conjuntos algebraicos son ceros comunes de ideales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Debido al teorema de la base de Hilbert [1, Theorem 7.5] si I es un ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ existen $f_1, \ldots, f_r \in I$ tal que $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, entonces $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$. Más aún, si $S \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es un conjunto de polinomios, entonces existen una cantidad finita de elementos $g_1, \ldots, g_m \in S$ tal que $\mathcal{V}(S) =$

$\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_m)$; esto es debido a que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle)$ y un generador finito del ideal $\langle S \rangle$ es posible hallarlo contenido en S.

2. Si 1 y 0 son la unidad y el nulo de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ respectivamente, es claro que $\mathcal{V}(0) = \Bbbk^n$ y $\mathcal{V}(1) = \varnothing$. Por lo tanto, considerando además los items 3 y 4 de la proposición 1.1.10, vemos que los conjuntos algebraicos cumplen las condiciones de ser cerrados de una topología para $\Bbbk^n$.

Definición 1.1.12. Llamamos *topología de Zariski* a la topología en $\Bbbk^n$ cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos. Usamos la notación $\mathbb{A}^n$ para referirnos al espacio $\Bbbk^n$ con esta topología. Si $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbb{A}^n_f$ denota el conjunto abierto que es complemento de $\mathcal{V}(f)$ en $\Bbbk^n$, es decir:

$$\mathbb{A}^n_f = \mathcal{V}(f)^c = \{a \in \mathbb{A}^n_f \ / \ f(a) \neq 0\}.$$

Cuando $X \subset \Bbbk^n$ es un conjunto algebraico definimos:

$$X_f = X \cap \mathbb{A}^n_f,$$

es decir $X_f = \{x \in X \ / \ f(x) \neq 0\}$.

Observación 1.1.13. La topología de Zariski es T_1, es decir que los puntos son cerrados; en efecto, si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ y consideramos los polinomios $x_i - a_i \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ para $i = 1, \ldots, n$ tenemos que:

$$\{a\} = \mathcal{V}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Lema 1.1.14. *Los conjuntos $\mathbb{A}^n_f$ con $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ constituyen una base de la topología de Zariski para $\mathbb{A}^n$.*

Demostración. Sea $U \subset \mathbb{A}^n$ un abierto. Entonces U^c es un cerrado de $\mathbb{A}^n$, luego es de la forma $U^c = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r)$ con $f_i \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ (observación 1.1.11). Por lo tanto, considerando la proposición 1.1.10, tenemos que:

$$U^c = \bigcap_i \mathcal{V}(f_i)$$

y tomando complementos resulta que:

$$U = \Big(\bigcap_i \mathcal{V}(f_i)\Big)^c = \bigcup_i \mathcal{V}(f_i)^c = \bigcup_i \mathbb{A}^n_{f_i}.$$

Concluimos en particular que todo subconjunto abierto de $\mathbb{A}^n$ es unión finita de abiertos de la base. □

Observación 1.1.15. Si X es un conjunto algebraico y lo dotamos de la topología inducida de $\mathbb{A}^n$ entonces es claro que los conjuntos X_f con $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ forman una base para esta topología. Dichos abiertos básicos, verifican además la siguiente propiedad:

$$X_f \cap X_g = X_{fg};$$

en efecto, $f(x)g(x) \neq 0$ si y sólo si $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$.

Definición 1.1.16. Decimos que un espacio topológico es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito.

Lema 1.1.17. *Todo subconjunto abierto de $\mathbb{A}^n$ es compacto. En particular $\mathbb{A}^n$ es compacto.*

Demostración. Sea $U \subset \mathbb{A}^n$ un conjunto abierto. Para probar que es compacto es suficiente considerar un cubrimiento por abiertos de la base. Sea $S \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y $U = \bigcup_{f \in S} \mathbb{A}^n_f$, entonces

$$U^c = \bigcap_{f \in S} (\mathbb{A}^n_f)^c = \bigcap_{f \in S} \mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(S).$$

Por la observación 1.1.11 existen una cantidad finita $f_1, \ldots, f_r$ de elementos de S tal que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_r) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{V}(f_i)$. Entonces $U = \bigcup_{i=1}^r \mathbb{A}^n_{f_i}$. $\square$

Corolario 1.1.18. *Todo conjunto algebraico, considerado como subconjunto de $\mathbb{A}^n$, es compacto.*

Demostración. Se deduce de que $\mathbb{A}^n$ es compacto y los conjuntos algebraicos son cerrados en $\mathbb{A}^n$. $\square$

Observación 1.1.19. Observar que en la definición 1.1.16 de espacio compacto no imponemos que el espacio sea de Hausdorff. En la literatura sobre geometría algebraica, a un espacio topológico de este tipo se le suele llamar *casi-compacto*. De hecho, el espacio $\mathbb{A}^n$ (con $\Bbbk$ infinito) no es de Hausdorff si $n \neq 0$. Por ejemplo, en $\mathbb{A}^1$, la topología de Zariski es la topología de los complementos finitos (los conjuntos abiertos no vacíos son los que tienen complemento finito), así que todo par de abiertos no vacíos se intersectan, por lo que en particular no es de Hausdorff.

Veremos más adelante que $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico *noetheriano* (1.4.4), por lo tanto (lema de Zorn mediante) es compacto.

1.1.2. El teorema de los ceros de Hilbert

Recordamos que el cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado, esta es una hipótesis fundamental en esta subsección.

El teorema de los ceros de Hilbert puede enunciarse de varias maneras equivalentes, útiles en diferentes contextos, quizás el más natural es que si $I \subsetneq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal propio, entonces $\mathcal{V}(I) \neq \varnothing$, es decir que un conjunto de polinomios que generan un ideal propio del anillo de polinomios siempre tienen algún cero en común.

Comenzamos enunciando una versión algebraica del mismo, que se puede deducir del siguiente lema que nos da ciertas condiciones suficientes sobre una extensión $B \subset A$ de anillos para que todo morfismo $f \colon B \to \Bbbk$ se pueda extender a todo A.

Lema 1.1.20. *Sean $B \subseteq A$ dominios integrales, tal que A es finitamente generada sobre B (como B-álgebra). Sea $v \in A$ un elemento no nulo. Entonces existe $u \in B$ no nulo con la siguiente propiedad: dado cualquier morfismo $f : B \to \mathbb{k}$ tal que $f(u) \neq 0$ existe $\tilde{f} : A \to \mathbb{k}$ morfismo tal que $\tilde{f}|_B = f$ y $\tilde{f}(v) \neq 0$.*

Demostración. [1, Prop. 5.23]. □

El siguiente resultado es una de las formas usuales de enunciar el teorema de los ceros de Hilbert.

Teorema 1.1.21 (Teorema de los ceros de Hilbert)**.** *Si A es una $\mathbb{k}$-álgebra finitamente generada tal que A también es un cuerpo, entonces $A \cong \mathbb{k}$.*

Demostración. Si en el lema 1.1.20 tomamos $B = \mathbb{k}$, $v = 1$ y $f = id : \mathbb{k} \to \mathbb{k}$, entonces f se puede extender a un morfismo de cuerpos $\tilde{f} : A \to \mathbb{k}$, pero como todo morfismo de cuerpos es inyectivo tenemos que $A \cong \mathbb{k}$. □

Observación 1.1.22. Sean $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{k}^n$, $M_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle \subset \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ y $\epsilon_a : \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{k}$ el mapa evaluación en a. Notemos que aunque $\mathbb{k}$ no sea algebraicamente cerrado, si $f \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$, aplicando el algoritmo de división [9, 2. §3. Teorema 3] dividiendo f entre $x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n$ se obtiene:

$$f = (x_1 - a_1)q_1 + (x_2 - a_2)q_2 + \cdots + (x_n - a_n)q_n + r$$

donde $q_i, r \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ y además r es una combinación lineal de monomios de los cuales ninguno es divisible por los x_i, por lo que $r \in \mathbb{k}$. Si tenemos que $f \in \ker(\epsilon_a)$, entonces $r(a) = 0$, así que $r = 0$, por lo tanto tenemos que $\ker(\epsilon_a) \subset M_a$. Es claro que $M_a \subset \ker(\epsilon_a)$, entonces $M_a = \ker(\epsilon_a)$. El mapa evaluación en a es sobreyectivo y por lo tanto $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/M_a \cong \mathbb{k}$, entonces M_a es un ideal maximal. Como estamos considerando que nuestro cuerpo de base es algebraicamente cerrado, el siguiente teorema (1.1.23) nos garantiza que todo ideal maximal es de esa forma.

Notación: De aquí en más, cuando $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{k}^n$ adoptamos la notación:

$$M_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle.$$

Teorema 1.1.23. *Si $M \subset \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal maximal, entonces existe $a \in \mathbb{k}^n$ tal que $M = M_a$.*

Demostración. Sea $A = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]/M$. Entonces A es una $\mathbb{k}$-álgebra finitamente generada que también es un cuerpo. Si restringimos la proyección canónica $\pi : \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \to A$ al cuerpo $\mathbb{k}$, tenemos un morfismo de cuerpos $\pi|_{\mathbb{k}} \colon \mathbb{k} \to A$ dado por $\pi|_{\mathbb{k}}(\lambda) = \lambda + M$. Por el teorema 1.1.21 tenemos que $A \cong \mathbb{k}$, así que el mapa $\pi|_{\mathbb{k}}$ tiene que ser un isomorfismo. Por lo tanto para cada x_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un único $a_i \in \mathbb{k}$ tal que $\pi(a_i) = x_i + M$, es decir que $x_i - a_i \in M$, entonces $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle \subset M$, lo que implica que $M = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ ya que este ideal es maximal como vimos en la observación 1.1.22. $\square$

Ejemplo 1.1.24. En el teorema 1.1.23 es imprescindible que $\Bbbk$ sea algebraicamente cerrado. Por ejemplo, en $\mathbb{R}[x]$, el ideal $M = \langle x^2+1 \rangle$ es maximal (porque el polinomio x^2+1 es irreducible en $\mathbb{R}[x]$) y no se puede generar por un polinomio de grado 1, es decir no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $M = \langle x - a \rangle$. Además la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}[x]/M$ es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$ y no a $\mathbb{R}$; en efecto, la unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio irreducible x^2+1, por lo que $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[i] \cong \mathbb{R}[x]/M$.

Proposición 1.1.25. *Si $I \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal y $a \in \Bbbk^n$, entonces $a \in \mathcal{V}(I)$ si y sólo si $I \subset M_a$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{V}(I)$, entonces $\epsilon_a(f) = 0$ para todo $f \in I$, por lo tanto $I \subset \ker(\epsilon_a) = M_a$ (ver la observación 1.1.22).

Si $I \subset M_a$, tenemos que $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(M_a) = \{a\}$ (ver observación 1.1.13). $\square$

A partir de un ideal I de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ obtenemos un conjunto algebraico $\mathcal{V}(I) \subset \Bbbk^n$. Ahora definiremos, a partir de un subconjunto de $\Bbbk^n$, un ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y veremos que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales radicales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y los conjuntos algebraicos de $\Bbbk^n$; en particular los ideales maximales se corresponden con puntos de $\Bbbk^n$ (teorema 1.1.23). Dicha correspondencia permite demostrar que el espacio $\mathbb{A}^n$ es el espacio subyacente de una variedad afín cuya álgebra asociada es $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ (ver la proposición 1.1.32).

Definición 1.1.26. Sea $X \subset \Bbbk^n$ un subconjunto arbitrario, definimos $\mathcal{I}(X)$ como el conjunto:

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \;/\; f(a) = 0 \;\forall\, a \in X\} \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

Notemos que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$; en efecto, si dos polinomios se anulan en X también lo hace su suma, y el producto de un polinomio que se anula en X por cualquier otro polinomio, también se anula en X. Además es claro que $\mathcal{I}(\varnothing) = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ e $\mathcal{I}(\Bbbk^n) = \{0\}$.

Si $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y $X \subset \Bbbk^n$, como estamos considerando que los polinomios son funciones definidas en $\Bbbk^n$ a valores en $\Bbbk$ y también adoptamos la notación $f|_X$ de restricción de funciones, entonces podemos decir que $f \in \mathcal{I}(X)$ si y sólo si $f|_X = 0$.

Proposición 1.1.27. *Sean $X, Y \subset \Bbbk^n$ dos subconjuntos. Entonces*

1. *El ideal $\mathcal{I}(X)$ es radical.*
2. *Si $X \subset Y$, entonces $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$.*
3. *$\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.*

4. $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.

Demostración. 1. Sea $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f^n \in \mathcal{I}(X)$ con $n \geq 0$. Como $f^n(a) = (f(a))^n = 0 \in \Bbbk$ para todo $a \in X$, se tiene que $f(a) = 0$ para todo $a \in X$, entonces $f \in \mathcal{I}(X)$.

2. Es suficiente observar que si f es un polinomio que se anula en Y, entonces f se anula en X ya que $X \subset Y$.

3. Como $X, Y \subset X \cup Y$, por el item *2* tenemos que $\mathcal{I}(X \cup Y) \subset \mathcal{I}(X)$ e $\mathcal{I}(X \cup Y) \subset \mathcal{I}(Y)$, entonces $\mathcal{I}(X \cup Y) \subset \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.

Si $f \in \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$, entonces $f|_X = 0$ y $f|_Y = 0$, por lo tanto $f|_{X \cup Y} = 0$, así que tenemos la igualdad $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.

4. Como $f \in \mathcal{I}(X)$ si y sólo si $f|_X = 0$, tenemos que para todo $a \in X$ y para todo $f \in \mathcal{I}(X)$ se cumple que $f(a) = 0$, entonces $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)))$ por definición de conjunto algebraico. □

Lema 1.1.28. *Si $I \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal, entonces $\sqrt{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. En particular $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.*

Demostración. Comenzamos con el caso particular: si $f \in I$ entonces $f|_{\mathcal{V}(I)} = 0$ ya que $\mathcal{V}(I)$ son los ceros comunes de I, por lo que $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ y entonces tenemos la inclusión: $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.

Ahora, como $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ es un ideal radical (proposición 1.1.27) tenemos que:

$$\sqrt{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)).$$

□

Proposición 1.1.29. *Si $X \subset \Bbbk^n$ es un subconjunto y $\overline{X}$ denota su clausura con la topología de Zariski, entonces $\overline{X} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.*

Demostración. De la proposición 1.1.27 sabemos que

$$X \subset \mathcal{V}(J),$$

entonces:

$$\mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)).$$

Por el lema 1.1.28 sabemos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) \supset J$, por lo tanto

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subset \mathcal{V}(J),$$

lo que prueba la proposición. □

Observación 1.1.30. Si $X \subset \Bbbk^n$ consta de un sólo punto: $X = \{a\}$, entonces $\mathcal{I}(X) = M_a$; en efecto, $\mathcal{I}(X)$ son los polinomios que se anulan en a, es decir $\mathcal{I}(X) = \ker(\epsilon_a) = M_a$ (ver la observación 1.1.22).

Otro enunciado del teorema de los ceros de Hilbert, en su versión geométrica, es el siguiente.

Teorema 1.1.31. *Sea* $I \subsetneq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *un ideal propio, entonces:*

1. $\mathcal{V}(I) \neq \varnothing$.
2. $\sqrt{I} = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$*, donde* $\mathcal{M}$ *es el conjunto de ideales maximales de* $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *que contienen a* I.
3. $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Demostración.

1. Como I es un ideal propio, existe un ideal maximal que contiene a I [1, Corolario 1.4]. Por el teorema 1.1.23 este ideal maximal es de la forma M_a con $a \in \Bbbk^n$. Entonces $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(M_a) = \{a\}$ (observación 1.1.13). Luego $\mathcal{V}(I) \neq \varnothing$.

2. Como el radical de un ideal es igual a la intersección de todos los ideales primos que lo contienen [1, Proposición 1.14.], la inclusión $\sqrt{I} \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ es trivial, ya que los ideales maximales son primos.

   Para probar la otra inclusión, sea

   $$f \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n].$$

   Consideremos $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n][y] \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$ el anillo de polinomios con $n+1$ indeterminadas. Observar que el anillo $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ se identifica canónicamente con un subanillo de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$ y podemos considerar que $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$. Sea J el ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$ generado por I y el polinomio $1 - yf$:

   $$J = \langle I, 1 - yf \rangle \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y].$$

   Veamos que $\mathcal{V}(J) = \varnothing$ en $\Bbbk^{n+1}$. Para evitar confusiones usamos la notación $\mathcal{V}^{n+1}(S)$ para indicar el conjunto algebraico de $\Bbbk^{n+1}$ definido por un subconjunto S del anillo de polinomios en $n + 1$ indeterminadas. Así, con esta notación, queremos probar que $\mathcal{V}^{n+1}(J) = \varnothing$. Debido a la proposición 1.1.10 (4) tenemos que:

   $$\mathcal{V}^{n+1}(J) = \mathcal{V}^{n+1}(I) \cap \mathcal{V}^{n+1}(1 - yf).$$

   Observar que si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n$ y $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in \Bbbk^{n+1}$, entonces para todo $g \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y]$ se tiene que $\epsilon_a(g) = \epsilon_{\tilde{a}}(g)$. Por lo tanto $\tilde{a} \in \mathcal{V}^{n+1}(I)$ si y sólo si $a \in \mathcal{V}(I)$, que es no vacío por 1. Tomemos un elemento $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathcal{V}^{n+1}(I)$, un cero común de I en $\Bbbk^{n+1}$. Por la proposición 1.1.25 tenemos que $I \subset M_a$. Por otro lado f está contenido en todos los ideales maximales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a I, así que $f \in M_a$, por lo que $0 = \epsilon_a(f) = \epsilon_{\tilde{a}}(f)$. Entonces

$\epsilon_{\tilde{a}}(1-yf) = \epsilon_{\tilde{a}}(1)-\epsilon_{\tilde{a}}(y)\epsilon_{\tilde{a}}(f) = 1$, por lo que $\tilde{a}$ no es un cero del polinomio $1-yf$ así que no hay ceros comunes para ideal J en $\mathbb{k}^{n+1}$. Esto implica, por 1, que $J = \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n,y]$ y por lo tanto existen $f_1,\dots,f_m \in I \subset \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ y $g_1,\dots,g_m,g \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n,y]$ tales que

$$1 = f_1g_1 + \cdots + f_mg_m + (1-yf)g \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n,y]. \tag{1.1}$$

Sea $\mathbb{k}(x_1,\dots,x_n)$ el cuerpo de fracciones de $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ (ver [1, Capítulo 3]). Como $f \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] \setminus \{0\}$, si en la ecuación (1.1) hacemos la sustitución $y = \frac{1}{f}$ obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{k}(x_1,\dots,x_n)$:

$$1 = f_1g_1\big(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f}\big) + \cdots + f_mg_m\big(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f}\big).$$

Multiplicando por f^r, donde r es el grado mayor en y de los polinomios g_i, podemos eliminar denominadores y obtener la siguiente igualdad en $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$:

$$f^r = f^rf_1g_1\big(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f}\big) + \cdots + f^rf_mg_m\big(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f}\big),$$

donde ahora $f^rg_i\big(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{f}\big) \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ para todo $i = 1,\dots,m$ y como f_i pertenece I para todo i, entonces $f^r \in I$, por lo tanto $f \in \sqrt{I}$.

3. Del lema 1.1.28 tenemos la inclusión $\sqrt{I} \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Como vimos en el item anterior, el radical de I es la intersección de todos los ideales maximales que lo contienen, entonces para probar la otra inclusión consideramos M un ideal maximal que contiene a I, queremos ver que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ está contenido en M. Por el teorema 1.1.23, existe $a \in \mathbb{k}^n$, tal que $M = M_a$. Entonces:

$$\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(M) = \{a\}$$
$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \mathcal{I}\big(\{a\}\big) = M.$$

Así que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ está contenido en todos los ideales maximales que contienen a I, por lo tanto $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \sqrt{I}$.

□

En la proposición que sigue (1.1.32) probaremos que si $I \subsetneq \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ es un ideal propio, entonces el conjunto algebraico $\mathcal{V}(I)$ es el espacio topológico subyacente de una variedad afín cuya álgebra asociada es $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]\big/\sqrt{I}$. Observemos que debido a la proposición 1.1.10, podemos considerar que I es un ideal radical. Sea I un ideal radical y $A = \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]/I$. Como hay una correspondencia biyectiva entre los ideales maximales de A y los ideales maximales de $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ que contienen a I [1, Proposición 1.1], dada para cada $a \in \mathcal{V}(I)$ por $M_a \mapsto M_a + I$, donde $I \subset M_a$ y $M_a + I$ denota al ideal maximal de A cuyos elementos son las clases de equivalencia de los elementos de M_a módulo I; esto permite definir un mapa $\varphi_I : \mathcal{V}(I) \to \mathrm{Spm}(A)$ dado por $\varphi_I(a) = M_a + I$.

Proposición 1.1.32. *Sea $I \subsetneq \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ un ideal radical. Consideremos la $\mathbb{k}$-álgebra $A = \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]/I$ y el mapa $\varphi_I : \mathcal{V}(I) \to \operatorname{Spm}(A)$ dado por $\varphi_I(a) = M_a + I$. Entonces la terna $(\mathcal{V}(I), A, \varphi_I)$ es una variedad algebraica afín.*

Demostración. Es importante remarcar que $M_a + I$ representa un elemento de un cociente, en particular en este caso $M_a + I \in A$, donde $I \subset M_a$. Sabemos que A es una $\mathbb{k}$-álgebra finitamente generada (es el cociente de un anillo de polinomios) y es reducida porque I es radical. Queremos probar que φ_I es un homeomorfismo. Primero veamos que es inyectivo: sean $a, b \in \mathcal{V}(I)$ tal que $M_a + I = M_b + I$. Si $f \in M_a$, entonces existe $g \in M_b$ tal que $f - g \in I \subset M_b$, así que $f(b) - g(b) = 0$ y por lo tanto $f(b) = 0$ ya que $g(b) = 0$, entonces $f \in M_b$. Esto muestra que $M_a \subset M_b$, pero como son ideales maximales, necesariamente $M_a = M_b$ y por lo tanto $a = b$, lo que prueba que φ_I es inyectivo. Es claro que φ_I es sobreyectivo debido a que los ideales maximales de $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ son de la forma M_a, con $a \in \mathbb{k}^n$ y los de $\operatorname{Spm}(A)$ son de la forma $M_a + I$. Ahora veamos que φ_I es continua: sea $\operatorname{Spm}(A)_{f+I} = \{M + I \in \operatorname{Spm}(A) \ / \ f + I \notin M + I\}$ un abierto básico de $\operatorname{Spm}(A)$, donde $f \in \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$ (ver la definición 1.1.1), entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi_I^{-1}\big(\operatorname{Spm}(A)_{f+I}\big) &= \{a \in \mathcal{V}(I) \ / \ \varphi_I(a) = M_a + I \in \operatorname{Spm}(A)_{f+I}\} \\
&= \{a \in \mathcal{V}(I) \ / \ f + I \notin M_a + I\} \\
&= \{a \in \mathcal{V}(I) \ / \ f \notin M_a\} \\
&= \{a \in \mathcal{V}(I) \ / \ f(a) \neq 0\} \\
&= \mathcal{V}(I)_f,
\end{aligned}$$

que es un abierto básico de $\mathcal{V}(I)$ (ver la observación 1.1.15). De manera similar podemos ver que φ_I es un mapa abierto (siguiendo con la misma notación):

$$\begin{aligned}
\varphi_I\big(\mathcal{V}(I)_f\big) &= \{M_a + I \ / \ a \in \mathcal{V}(I)_f\} \\
&= \{M_a + I \ / \ a \in \mathcal{V}(I), f(a) \neq 0\} \\
&= \{M_a + I \ / \ a \in \mathcal{V}(I), f \notin M_a\} \\
&= \operatorname{Spm}(A)_{f+I}.
\end{aligned}$$

Como φ_I es biyectiva, continua y abierta, es un homeomorfismo. $\square$

Observación 1.1.33. Mencionaremos aquí que la proposición 1.1.32 tiene un recíproco: si (X, A, φ) es una variedad afín, como A es una $\mathbb{k}$-álgebra finitamente generada, existe un morfismo sobreyectivo de $\mathbb{k}$-álgebras de un anillo de polinomios en A:

$$g : \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] \to A,$$

por lo tanto existe un isomorfismo $\tilde{g} : \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]/\ker(g) \to A$. Si llamamos $I = \ker(g)$, como A es reducida (ver la definición 1.1.2), tenemos que I es radical. A través del isomorfismo $\tilde{g}$ podemos considerar que el mapa $\varphi_I : \mathcal{V}(I) \to \operatorname{Spm}\big(\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]/I\big)$ tiene codominio $\operatorname{Spm}(A)$, entonces la composición $\varphi_I^{-1} \circ \varphi :$

$X \to \mathcal{V}(I)$ de los homeomorfismos $\varphi : X \to \mathrm{Spm}(A)$ y $\varphi_I^{-1} : \mathrm{Spm}(A) \to \mathcal{V}(I)$ es un homeomorfismo entre el espacio topológico subyacente X de la variedad afín y el conjunto algebraico $\mathcal{V}(I)$. En la sección 2 probaremos que son isomorfos como espacios anillados (ver la proposición 1.2.38).

Lema 1.1.34. *Sean A y B $\Bbbk$-álgebras conmutativas y finitamente generadas, $\alpha : A \to B$ un morfismo de $\Bbbk$-álgebras y $M \in \mathrm{Spm}(B)$. Entonces $\alpha^{-1}(M) \in \mathrm{Spm}(A)$.*

Demostración. Sea $M \subset B$ un ideal maximal, entonces el cociente B/M es un cuerpo y además una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada, así que por el teorema de los ceros de Hilbert (1.1.21) se tiene que $B/M \cong \Bbbk$. Consideremos $M' = \alpha^{-1}(M)$ y el morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\overline{\alpha} : A/M' \to B/M$ inducido por α mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "\pi_2"] \\ A/M' \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & B/M \end{tikzcd}$$

$$a + M' \longmapsto \alpha(a) + M$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas. Dado que que $\alpha(a) \in M$ si y sólo si $a \in M'$, se tiene que el morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\overline{\alpha}$ es inyectivo, por lo tanto $A/M' \cong \Bbbk$ y entonces M' es maximal. □

Observación 1.1.35. Observemos que el lema anterior no es válido en general para un morfismo de anillos $f : A \to B$. Por ejemplo, tenemos el mapa inclusión $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, de los enteros en los racionales, que es un morfismo de anillos. Pero el ideal $\{0\} \subset \mathbb{Q}$ es maximal dado que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo y $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \subset \mathbb{Z}$ no es maximal en los enteros.

Definición 1.1.36. El lema 1.1.34 permite definir el mapa $\alpha^* : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$ dado por $\alpha^*(M) = \alpha^{-1}(M)$, donde $\alpha : A \to B$ en un morfismo de $\Bbbk$-álgebras finitamente generadas.

Lema 1.1.37. *Si $\alpha : A \to B$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras finitamente generadas, entonces el mapa $\alpha^* : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$ es una función continua.*

Demostración. Un abierto básico de $\mathrm{Spm}(A)$ es de la forma $\mathrm{Spm}(A)_a = \{M \in \mathrm{Spm}(A) \ / \ a \notin M\}$, entonces

$$\begin{aligned}\big(\alpha^*\big)^{-1}\big(\mathrm{Spm}(A)_a\big) &= \big\{N \in \mathrm{Spm}(B) \ / \ \alpha^*(N) \in \mathrm{Spm}(A)_a\big\} \\ &= \big\{N \in \mathrm{Spm}(B) \ / \ a \notin \alpha^{-1}(N)\big\} \\ &= \mathrm{Spm}(B)_{\alpha(a)},\end{aligned}$$

que es un abierto de $\mathrm{Spm}(B)$. □

Corolario 1.1.38. *Si* $\alpha : A \to B$ *es un isomorfismo de* $\Bbbk$*-álgebras finitamente generadas, entonces* α^* *es un homeomorfismo.*

Demostración. Como α es un isomorfismo, α^* es biyectiva; entonces, por el lema anterior, es suficiente probar que α^* es abierta:

$$\begin{aligned} \alpha^*\big(\mathrm{Spm}(B)_b\big) &= \big\{\alpha^{-1}(N) \in \mathrm{Spm}(A) \;/\; N \in \mathrm{Spm}(B)_b\big\} \\ &= \big\{\alpha^{-1}(N) \in \mathrm{Spm}(A) \;/\; b \notin N\big\} \\ &= \big\{\alpha^{-1}(N) \in \mathrm{Spm}(A) \;/\; \alpha^{-1}(b) \notin \alpha^{-1}(N)\big\} \\ &= \mathrm{Spm}(A)_{\alpha^{-1}(b)}, \end{aligned}$$

que es un abierto de $\mathrm{Spm}(A)$, donde en la última igualdad hemos usado que α^{-1} establece una biyección entre los ideales maximales de A y los ideales maximales de B. $\square$

1.2. Haces

Para poder seguir y dar una definición correcta del objeto principal de la teoría, en nuestro caso la *variedad algebraica*, necesitamos el concepto de *haz*. En esta sección daremos la definición de *haz* de $\mathbb{k}$-álgebras en espacios topológicos que es lo que nos interesa, aunque se puede dar una definición análoga para un haz de objetos en otras categorías.

Primero recordemos algunas definiciones (ver, por ejemplo, [6]):

Definición 1.2.1.

- Se dice que un conjunto S es *dirigido* si tiene un orden parcial $\leq$ y para cada par de elementos $s, t \in S$ existe $r \in S$ tal que $s \leq r$ y $t \leq r$.

- Sea $\{A_s\}_{s\in S}$ una familia de $\mathbb{k}$-álgebras indexadas en un conjunto dirigido S. Para cada par de álgebras A_s, A_t con $s, t \in S$ y $s \leq t$, sea $\mu_{st} : A_s \to A_t$ un morfismo de álgebras. Diremos que la familia $(A_s, \mu_{st})_{s,t\in S}$ es un *sistema directo* (también llamado *sistema dirigido* o *sistema inductivo*) si verifica:
  1) $\mu_{ss} : A_s \to A_s$ es el mapa identidad para cada $s \in S$.
  2) Para todo par de morfismos μ_{st} y μ_{tr}, donde $s \leq t \leq r$, se verifica que $\mu_{tr} \circ \mu_{st} = \mu_{sr}$.

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "\mu_{sr}"] \arrow[d, "\mu_{st}"'] & A_r \\ A_t \arrow[ur, "\mu_{tr}"'] & \end{tikzcd}$$

- Sea $(A_s, \mu_{st})_{s,t\in S}$ un sistema directo de $\mathbb{k}$-álgebras. El *límite directo* o *límite inductivo* (también llamado *colímite*) que denotaremos por $\varinjlim A_s$, es una $\mathbb{k}$-álgebra A junto con morfismos de álgebras $\mu_s : A_s \to A$ para todo $s \in S$ tal que:
  1) $\mu_s = \mu_t \circ \mu_{st}$ para todo par de elementos $s, t \in S$, con $s \leq t$.

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "\mu_s"] \arrow[d, "\mu_{st}"'] & A \\ A_t \arrow[ur, "\mu_t"'] & \end{tikzcd}$$

  2) $A = \bigcup_{s\in S} \mu_s(A_s)$.
  3) Si existen $s \in S$ y $a \in A_s$ tales que $\mu_s(a) = 0 \in A$, entonces existe $t \in S$ con $s \leq t$ tal que $\mu_{st}(a) = 0$.

Observemos que por 1), la unión en 2) es creciente, en el sentido que si $s \leq t$ entonces $\mu_s(A_s) \subset \mu_t(A_t)$; además si $\mu_{st}(a) = 0$ para algún s y algún t, entonces $\mu_{sr}(a) = 0$ para todo r tal que $t \leq r$.

Observación 1.2.2. El límite directo de $\mathbb{k}$-álgebras existe y es único a menos de isomorfismos. Más aún, está caracterizado por la siguiente propiedad: si B es una $\mathbb{k}$-álgebra y $\alpha_s : A_s \to B$ es una familia de morfismos con $s \in S$ tal que $\alpha_s = \alpha_t \circ \mu_{st}$, entonces existe un único morfismo de $\mathbb{k}$-álgebras $f : A \to B$ tal que $f \circ \mu_s = \alpha_s$ para todo $s \in S$.

$$\begin{tikzcd} A_s \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "\mu_s"'] & B \\ A \arrow[ur, dashed, "\exists! f"'] & \end{tikzcd}$$

La definición de colímite puede darse por medio de esta propiedad universal. En el caso de álgebras se puede probar que dicho colímite existe con la siguiente construcción: se considera la unión disjunta de las álgebras A_s, $\bigsqcup_{s\in S} A_s$, con una relación de equivalencia $\sim$, donde $a \in A_s$ es equivalente a $b \in A_t$ si existe $r \in S$, con $s \leq r$ y $t \leq r$, tal que $\mu_{sr}(a) = \mu_{tr}(b)$. Entonces el cociente $A = \bigsqcup_{s\in S} A_s/\sim$ junto con las proyecciones canónicas $\pi_s : A_s \to A$ es el límite directo del sistema (A_s, μ_{st}). Omitimos los detalles de la prueba.

Definición 1.2.3. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U\in\tau}$ una familia de $\mathbb{k}$-álgebras indexadas en los abiertos de X y $\rho_{VU} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ morfismos de $\mathbb{k}$-álgebras para cada $U \subset V$ abiertos de X. Diremos que $(\mathcal{F}, \rho_{VU})$, o simplemente $\mathcal{F}$, es un *haz de $\mathbb{k}$-álgebras en X* si verifica:

1. $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ (en esta k-álgebra se tiene que $1 = 0$).

2. La familia $\{\mathcal{F}(V), \rho_{VU}\}$ es un *sistema directo* (donde τ está ordenado por inclusión: $V \leq U$ si y sólo si $U \subset V$). Es decir que se cumple:

   a) $\rho_{UU} = id_{\mathcal{F}(U)}$ es la identidad en $\mathcal{F}(U)$.

   b) Si $U \subset V \subset W$ son abiertos de X, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(V) \arrow[dd, "\rho_{VU}"] \\ \mathcal{F}(W) \arrow[ur, "\rho_{WV}"] \arrow[dr, "\rho_{WU}"'] & \\ & \mathcal{F}(U) \end{tikzcd}$$

3. Si U es un abierto de X, $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de X tal que $U = \bigcup_i V_i$ y $\{s_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos tal que $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ con la propiedad de que $\rho_{V_i V_i\cap V_j}(s_i) = \rho_{V_j V_i\cap V_j}(s_j)$ para todo $i, j \in I$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ para todo $i \in I$. Si además para cada $i \in I$ se tiene que $\rho_{UV_i}(s) = 0$, entonces $s = 0$.

En la definición anterior, los primeros dos items definen lo que usualmente se llama un *prehaz* (de $\mathbb{k}$-álgebras, en este caso). Observar que estamos admitiendo que en una $\mathbb{k}$-álgebra el elemento nulo pueda ser igual al elemento neutro para el producto, en este caso el álgebra es el álgebra trivial $\{0\}$ y el cuerpo $\mathbb{k}$ no es un subanillo del álgebra. Además no existe un morfismo del álgebra trivial a una $\mathbb{k}$-álgebra no trivial, porque el 0 va al 0 y el 1 debe tener imagen 1. Sí existe para cualquier anillo A un mapa trivial $A \to \{0\}$.

Con respecto a la nomenclatura: es usual escribir $s|_U$ para denotar $\rho_{VU}(s)$; un elemento de $\mathcal{F}(V)$ es llamado una *sección* de $\mathcal{F}$ sobre V y los mapas ρ_{VU} son llamados *restricciones*. Si es necesario denotamos por $\mathcal{F}_X$ al haz para indicar que es un haz sobre X.

Observación 1.2.4. Es importante mencionar que en el tercer item de la definición 1.2.3, la condición sobre el 0 es equivalente a pedir que exista un único $s \in \mathcal{F}(U)$ con la propiedad de que $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ para todo i.

Definición 1.2.5. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces en un espacio topológico X. Decimos que $\mathcal{G}$ es un *sub-haz* de $\mathcal{F}$ y lo denotamos por $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, si $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ para todo abierto $U \subset X$ y los mapas restricción de $\mathcal{F}$ inducen los mapas restricción de $\mathcal{G}$, es decir $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{UV}(s)$ para todo $s \in \mathcal{G}(U)$.

Definición 1.2.6. Sean X un espacio topológico y $U \subset X$ un abierto de X. Si $\mathcal{F}$ es un haz en X y consideramos a U con la topología inducida de X, entonces $\mathcal{F}$ induce un haz en U al que denotaremos por $\mathcal{F}|_U$. Dicho haz está definido de la siguiente manera: si $V \subset U$ es un abierto de U, entonces V es abierto en X, por lo tanto definimos $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$, y los mapas restricciones están dados simplemente por las restricciones del haz $\mathcal{F}$. Es claro que $\mathcal{F}|_U$ es un haz en U.

Ejemplo 1.2.7 (Haz de las funciones continuas)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada abierto $U \subset X$ no vacío consideramos la $\mathbb{k}$-álgebra $\mathcal{C}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{k} \ / \ f \text{ es continua}\}$, donde $\mathbb{k}$ tiene la topología de Zariski y $\mathcal{C}_X(\varnothing) = 0$. Entonces la familia de $\mathbb{k}$-álgebras $\mathcal{C}_X = \{\mathcal{C}_X(U)\}_{U \in \tau}$ junto con los mapas restricción ρ_{VU} dados por la restricción de funciones $\rho_{VU}(f) = f|_U$ si $U \neq \varnothing$ y $\rho_{V\varnothing} = 0$ forman un haz para X. Es claro que $\mathcal{C}_X$ verifica 1 y 2 de la definición 1.2.3. El punto 3 se verifica definiendo s de tal forma que $s|_{V_i} = s_i$; no hay problema con la definición ya que si $V_i \cap V_j \neq \varnothing$ entonces s_i y s_j coinciden en la intersección. Además la función s es continua porque su restricción a cada abierto es continua. La unicidad es inmediata en este caso.

Definición 1.2.8. Dados un espacio topológico X y dos haces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en X, un *morfismo* de haces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una familia de morfismos de $\mathbb{k}$-álgebras $\varphi_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{G}(V)$ para todo V abierto de X tal que el siguiente diagrama conmuta para cada par de abiertos $U \subset V \subset X$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{VU}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{VU}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Si tenemos dos morfismos de haces $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ y $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ en X, entonces se puede definir la composición de estos morfismos $\psi \circ \varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ de la siguiente manera: si $V \subset X$ es un abierto, $(\psi \circ \varphi)_V = \psi_V \circ \varphi_V : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{G}(V)$ es la composición de morfismos de álgebras. Si $U \subset V$ es otro abierto, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{H}}_{VU}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{VU}"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{VU}"] \\
\mathcal{H}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"'] & \mathcal{G}(U)
\end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{F}$ es un haz en X, entonces se puede definir el morfismo identidad $\mathrm{id}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, tal que para cada $V \subset X$ abierto, está dado por el morfismo identidad $\mathrm{id}^{\mathcal{F}}_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ de $\Bbbk$-álgebras. Si $U \subset V$ son dos abiertos entonces el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\mathrm{id}^{\mathcal{F}}_V"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathrm{id}^{\mathcal{F}}_U"'] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

De la definición se deduce inmediatamente que la composición de morfismos de haces es asociativa, es decir que dados tres morfismos de haces en X, $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\xi : \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ tenemos que $(\xi \circ \psi) \circ \varphi = \xi \circ (\psi \circ \varphi)$; además $\mathrm{id}^{\mathcal{F}} \circ \varphi = \varphi$ y $\psi \circ \mathrm{id}^{\mathcal{F}} = \psi$, por lo tanto tenemos una categoría donde los objetos son los haces de $\Bbbk$-álgebras en un espacio topológico X y las flechas son los morfismos de haces en X. Nos referiremos a esta categoría simplemente como la *categoría de haces en* X. Un morfismo de haces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ en X es un *isomorfismo* si es un isomorfismo en la categoría de haces en X, es decir si existe un morfismo de haces $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ en X tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}^{\mathcal{F}}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}^{\mathcal{G}}$.

Definición 1.2.9. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X y $x \in X$ un punto. Sea τ_x el conjunto de abiertos de X que contienen a x. Consideramos en dicho conjunto el orden parcial dado por la inclusión: $V \leq U$ si y sólo si $U \subset V$; por lo que τ_x con este orden es un conjunto dirigido, ya que si U y V son entornos abiertos de x, entonces $U \cap V$ es un entorno abierto de x. Definimos la *fibra* $\mathcal{F}_x$ (a veces también denotada por $\mathcal{F}_{X,x}$) de $\mathcal{F}$ en el punto $x \in X$ como $\varinjlim_{x \in V} \mathcal{F}(V)$, es decir el límite directo del sistema directo $\{\mathcal{F}(V), \rho_{VU}\}_{V,U \in \tau_x}$.

Los elementos de $\mathcal{F}_x$ pueden verse como clases de equivalencias de la siguiente manera: consideramos la unión disjunta de todas las secciones de $\mathcal{F}$, $\bigsqcup_{x \in V \subset X} \mathcal{F}(V)$ con la siguiente relación de equivalencia: sean $s \in \mathcal{F}(V)$ y $t \in \mathcal{F}(U)$, $s \sim t$ si y sólo si existe $W \subset V \cap U$ abierto tal que $x \in W$ y $s|_W = t|_W$.

Si s es una sección, entonces denotamos por s_x a la clase de s en $\mathcal{F}_x$ y por $\pi_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{O}_x$ a las proyecciones canónicas $\pi_V(s) = s_x$. El elemento s_x es llamado *germen* de s en x.

Observación 1.2.10. 1. La fibra $\mathcal{F}_x$ de un haz $\mathcal{F}$ en un punto x es una $\Bbbk$-álgebra, por ser el límite directo de una familia directa de $\Bbbk$-álgebras.
2. Si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces en X, entonces α induce un morfismo $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ de $\Bbbk$-álgebra en las fibras, tal que para todo V abierto de X que contiene a x, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\pi_V"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\pi_V"] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.11. Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $\mathcal{F}$ un haz en X. Definimos el haz *imagen directa* $f_*\mathcal{F}$ en Y de la siguiente manera: $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para todo abierto V de Y; las restricciones son los mapas $\rho^{f_*\mathcal{F}}_{VU} = \rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V)f^{-1}(U)} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ donde $V \subset U$ son abiertos.

Es fácil ver que la imagen directa de un haz es un haz, por lo que omitimos la prueba.

Observación 1.2.12. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, donde X, Y, Z son espacios topológicos y $\mathcal{F}$ es un haz en X, se tiene que el haz $(g \circ f)_*\mathcal{F}$ en Z es igual al haz $g_*f_*\mathcal{F}$; en efecto, si $V \subset Z$ es un abierto, entonces

$$(g\circ f)_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}\big((g\circ f)^{-1}(V)\big) = \mathcal{F}\Big(f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big)\Big) = f_*\mathcal{F}\big(g^{-1}(V)\big) = g_*f_*\mathcal{F}(V).$$

Definición 1.2.13. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces en X, definimos el mapa

$$f_*\varphi : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$$

dado para cada abierto $V \subset Y$ por $(f_*\varphi)_V = \varphi_{f^{-1}(V)}$.

Es inmediato verificar que $f_*\varphi$ es un morfismo de haces en Y: si $V \subset U$ son dos abiertos de Y, entonces el siguiente diagrama conmuta debido a que φ es un morfismo de haces en X

$$\begin{tikzcd} f_*\mathcal{F}(U) \arrow[r, "(f_*\varphi)_U"] \arrow[d] & f_*\mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ f_*\mathcal{F}(V) \arrow[r, "(f_*\varphi)_V"] & f_*\mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

donde los mapas verticales son los mapas restricción dados en la definición 1.2.11.

Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son dos morfismos de haces en X, entonces $f_*(\psi \circ \varphi) = (f_*\psi) \circ (f_*\varphi)$; en efecto, si $V \subset Y$ es un abierto $[f_*(\psi \circ \varphi)]_V = (\psi \circ \varphi)_{f^{-1}(V)} = \psi_{f^{-1}(V)} \circ \varphi_{f^{-1}(V)} = (f_*\psi)_V \circ (f_*\varphi)_V$. Además tenemos que $\left(f_*\mathrm{id}^{\mathcal{F}}\right)_V = \mathrm{id}^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V)} = \mathrm{id}^{f_*\mathcal{F}}_V$, es decir $f_*\mathrm{id}^{\mathcal{F}} = \mathrm{id}^{f_*\mathcal{F}}$, por lo tanto el mapa f_* es un functor de la categoría de haces en X en la categoría de haces en Y.

Definición 1.2.14. Diremos que un par $(X, \mathcal{F})$ es un $\Bbbk$-*espacio anillado* o simplemente un *espacio anillado* si X es un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es un haz de $\Bbbk$-álgebras en X.

Definición 1.2.15. Sean $(X, \mathcal{F}_X)$ e $(Y, \mathcal{F}_Y)$ dos espacios anillados. Un *morfismo de espacios anillados* es un par $(f, \varphi)\colon (X, \mathcal{F}_X) \to (Y, \mathcal{F}_Y)$, donde $f : X \to Y$ es una función continua y $\varphi : \mathcal{F}_Y \to f_*\mathcal{F}_X$ es un morfismo de haces en Y.

Observación 1.2.16. Sean $(f, \varphi)\colon (X, \mathcal{F}_X) \to (Y, \mathcal{F}_Y)$ un morfismo de espacios anillados y $x \in X$. Para cada $V \subset Y$ abierto tal que $f(x) \in V$, consideramos el morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\alpha_V\colon \mathcal{F}_Y(V) \to \mathcal{F}_{X,x}$ dado por la composición $\pi_{f^{-1}(V)} \circ \varphi_V$:

$$\mathcal{F}_Y(V) \xrightarrow{\varphi_V} f_*\mathcal{F}_X(V) = \mathcal{F}_X(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\pi_{f^{-1}(V)}} \mathcal{F}_{X,x}$$

donde π denota la proyección canónica. Como φ es un morfismo de haces y los $\pi_{f^{-1}(V)}$ son las proyecciones de las secciones sobre la fibra, se tiene que los mapas α_V conmutan con las restricciones de $\mathcal{F}_Y$, es decir $\alpha_V = \alpha_{V'} \circ \rho^{\mathcal{F}_Y}_{VV'}$, para todo par de abiertos $V' \subset V \subset Y$ que contienen a $f(x)$. Entonces, por la propiedad universal del límite directo (ver la observación 1.2.2), existe un único morfismo $\varphi_x\colon \mathcal{F}_{Y,f(x)} \to \mathcal{F}_{X,x}$ tal que para todo $V \subset Y$ abierto, con $f(x) \in V$, el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_Y(V) \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\pi_V"'] & \mathcal{F}_{X,x} \\
\mathcal{F}_{Y,f(x)} \arrow[ur, dashed, "\varphi_x"'] &
\end{tikzcd}$$

y tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.17. Diremos que φ_x es el *morfismo inducido* en las fibras por el morfismo (f, φ).

Ejemplo 1.2.18. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio anillado e $id : X \to X$ la función identidad. Es claro que que los haces $id_*\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ coinciden; si consideramos el morfismo de haces identidad $\mathrm{id}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F} = id_*\mathcal{F}$, entonces el mapa $\left(id, \mathrm{id}^{\mathcal{F}}\right) : (X, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{F})$ es un morfismo de espacios anillados al que llamaremos morfismo identidad.

Definición 1.2.19. Sean $(f, \varphi) : (X, \mathcal{F}_X) \to (Y, \mathcal{F}_Y)$ y $(g, \psi) : (Y, F_Y) \to (Z, \mathcal{F}_Z)$ dos morfismos de espacios anillados. Definimos la composición $(g, \psi) \circ (f, \varphi)$ como el morfismo de espacios anillados

$$(g \circ f, (g_*\varphi) \circ \psi) : (X, \mathcal{F}_X) \to (Z, \mathcal{F}_Z),$$

donde $g \circ f : X \to Z$ es la composición de funciones y $(g_*\varphi) \circ \psi$ es el morfismo de haces en Z dado por la composición de ψ con $g_*\varphi$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_Z \arrow[rr, "(g_*\varphi)\circ\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & g_*f_*\mathcal{F}_X = (g \circ f)_*(\mathcal{F}_X) \\
& g_*\mathcal{F}_Y \arrow[ur, "g_*\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Es claro que la composición de morfismos de espacios anillados es asociativa y que para cada morfismo $(f, \varphi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ de espacios anillados, se tiene que $(f, \varphi) \circ \left(id|_X, \mathrm{id}^{\mathcal{F}}\right) = (f, \varphi) = \left(id|_Y, \mathrm{id}^{\mathcal{G}}\right) \circ (f, \varphi)$, entonces tenemos una categoría donde los objetos son los $\mathbb{k}$-espacios anillados y las flechas son los morfismos de $\mathbb{k}$-espacios anillados, llamaremos *categoría de espacios anillados* a dicha categoría. Un *isomorfismo de* $\mathbb{k}$*-espacios anillados* es simplemente un isomorfismo en la categoría de espacios anillados.

Observación 1.2.20. Si $(f, \varphi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ es un isomorfismo de espacios anillados y (g, ψ) es la inversa de (f, φ), entonces es claro que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y $f^{-1} = g$. Además, por la definición de composición de morfismos de haces, tenemos que $(g_*\varphi) \circ \psi = \mathrm{id}^{\mathcal{F}}$ y $(f_*\psi) \circ \varphi = \mathrm{id}^{\mathcal{G}}$, lo que implica que φ_V es invertible para todo abierto $V \subset Y$ y $\varphi_V^{-1} = \psi_{f^{-1}(V)}$. Así que (f, φ) es un isomorfismo si y sólo si f es un homeomorfismo y $\varphi \colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ es un isomorfismo de haces en Y.

Definición 1.2.21. Sean X e Y espacios topológicos y $f \colon X \to Y$ una función continua. Si $\mathcal{F}_X \subset \mathcal{C}_X$ y $\mathcal{F}_Y \subset \mathcal{C}_Y$ son sub-haces de las funciones continuas en X e Y respectivamente tal que para todo $V \subset Y$ abierto y para todo $\alpha \in \mathcal{F}_Y(V)$ se tiene que

$$\alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{F}_X(f^{-1}(V)),$$

podemos definir el morfismo de haces en Y:

$$f^{\#} \colon \mathcal{F}_Y \to f_*\mathcal{F}_X$$

dado por la *pre-composición* con f, es decir, si $V \subset Y$ es un abierto y $\alpha \in \mathcal{F}_Y(V)$, definimos $f_V^{\#}(\alpha) = \alpha \circ f|_{f^{-1}(V)}$.

$$\begin{aligned} f_V^{\#} \colon \mathcal{F}_Y(V) &\to \mathcal{F}_X\big(f^{-1}(V)\big) \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha\circ f"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\
& \mathbb{k}
\end{tikzcd}$$

Si $V \subset U \subset Y$ son abiertos, la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_Y(U) \arrow[r, "f_U^{\#}"] \arrow[d] & f_*\mathcal{F}_X(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_Y(V) \arrow[r, "f_V^{\#}"] & f_*\mathcal{F}_X(V) \end{tikzcd}$$

es inmediata debido a que las restricciones (los mapas verticales) son de funciones.

Ejemplo 1.2.22. Si X es un espacio topológico, entonces el par $(X, \mathcal{C}_X)$ es un espacio anillado. Si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos, entonces $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{C}_X) \to (Y, \mathcal{C}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados.

1.2.1. Variedades afines como espacios anillados

En esta sección definiremos un haz, tanto para un conjunto algebraico como para el espacio topológico subyacente de una variedad afín, pudiendo verlos de esta manera como espacios anillados. Ya vimos que un conjunto algebraico de $\Bbbk^n$ puede verse como una variedad afín (proposición 1.1.32). Más aún, vimos que tenemos una correspondencia entre los conjuntos algebraicos y las variedades afines (ver la observación 1.1.33). Probaremos mediante dicha correspondencia que toda variedad afín es isomorfa, como espacio anillado, a un conjunto algebraico (proposición 1.2.38).

Definición 1.2.23. Sea X un conjunto algebraico de $\Bbbk^n$. Decimos que una función $f : X \to \Bbbk$ es *polinomial* o *regular* en X si existe un polinomio $p \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f = p|_X$. Usamos la notación $\Bbbk[X]$ para el conjunto de las funciones polinomiales en X.

Observación 1.2.24.

1. Si $X \subset \Bbbk^n$ es un conjunto algebraico, el conjunto de funciones polinomiales $\Bbbk[X]$ es una sub-álgebra del álgebra de funciones $\Bbbk^X$. Si consideramos el morfismo de $\Bbbk$-álgebras $R : \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk^X$ dado por la restricción $R(f) = f|_X$, entonces

$$\Bbbk[X] = R\big(\Bbbk[x_1, \dots, x_n]\big) \cong \frac{\Bbbk[x_1, \dots, x_n]}{I},$$

donde $I = \ker(R) = \mathcal{I}(X)$ es un ideal radical, así que $\Bbbk[X]$ no tiene nilpotentes no nulos; por lo tanto el álgebra $\Bbbk[X]$ es finitamente generada y reducida, pero no necesariamente es un domino de integridad a menos que X sea *irreducible*, pero esto lo vemos más adelante.

2. Observar que si $f \in \Bbbk[X]$ es una función polinomial y $p \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio tal que $f = p|_X$, entonces $X_p = \{x \in X \,/\, p(x) \neq 0\} = \{x \in X \,/\, f(x) \neq 0\}$, por lo que no hay riesgo de confusión si usamos la notación

$X_f := \{x \in X \,/\, f(x) \neq 0\}$ cuando f es una función polinomial en X. De la sección 1.1.1, se deduce inmediatamente que la familia de conjuntos X_f con $f \in \Bbbk[X]$ forman una base para la topología de Zariski de X y que $X_f \cap X_g = X_{fg}$ para todo $f, g \in \Bbbk[X]$.

3. Al igual que como definimos un conjunto algebraico (los ceros comunes de un conjunto de polinomios), podemos considerar para un conjunto de funciones polinomiales $S \subset \Bbbk[X]$, los ceros de S (en X):

$$\mathcal{V}(S) = \{x \in X \,/\, f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Es claro que sigue siendo válida la igualdad $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle)$, donde $\langle S\rangle$ es el ideal generado por S en $\Bbbk[X]$ (ver la proposición 1.1.10). Si $\pi : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to \Bbbk[X]$ es la proyección canónica, hay una correspondencia biyectiva (que preserva el orden de inclusión) entre los ideales $J \subset \Bbbk[X]$ y los ideales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a I dada por $J \mapsto \pi^{-1}(J)$. Tener en cuenta que $\pi^{-1}(J)$ es un ideal en el anillo de polinomios, y que por lo tanto J son las funciones polinomiales que se obtienen restringiendo dichos polinomios al conjunto X. Es decir, que cuando $J \subset \Bbbk[X]$ es un ideal, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(J) =& \mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J)\big) \cap X\\ =& \mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J)\big) \cap \mathcal{V}(I)\\ =& \mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J) \cup I\big)\\ =& \mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J)\big),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es porque $\pi^{-1}(J)$ es un ideal que contiene a I. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{V}(J)$ es un cerrado de X con la topología de Zariski y es claro que $X_f = X \setminus \mathcal{V}(f)$ para $f \in \Bbbk[X]$.

4. El álgebra de funciones $\Bbbk[X]$ separa puntos de cerrados: si $Y \subset X$ es un cerrado contenido en X y $x \in X \setminus Y$, se tiene que $x \notin Y = \overline{Y} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y))$ (proposición 1.1.29), entonces existe $p \in \mathcal{I}(Y) \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $p(x) \neq 0$, por lo que existe $f = p|_X \in \Bbbk[X]$ tal que $f|_Y = p|_Y = 0$ y $f(x) \neq 0$. En particular si $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in \Bbbk[X]$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

5. Por último, la relación entre los ideales de $\Bbbk[X]$ y los ideales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a I, hace corresponder ideales maximales, primos y radicales con ideales maximales, primos y radicales respectivamente. Por lo tanto, y debido al teorema de los ceros de Hilbert, hay una correspondencia biyectiva (que invierte el orden de inclusión) entre los conjuntos cerrados de X y los ideales radicales de $\Bbbk[X]$. Si $J, J' \in \Bbbk[X]$ son ideales tal que

$\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(J')$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J)\big) &\subset \mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J')\big)\\
\mathcal{I}\big(\mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J)\big)\big) &\supset \mathcal{I}\big(\mathcal{V}\big(\pi^{-1}(J')\big)\big)\\
\sqrt{\pi^{-1}(J)} &\supset \sqrt{\pi^{-1}(J')} \quad \text{ en } \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]\\
\sqrt{J} &\supset \sqrt{J'} \quad \text{ en } \Bbbk[X].
\end{aligned}$$

Lema 1.2.25. *Si X es un conjunto algebraico y $f : X \to \Bbbk$ es una función polinomial en X, entonces f es continua con la topología de Zariski.*

Demostración. La topología de Zariski en $\Bbbk$ coincide con la topología de los complementos finitos, en otras palabras: un conjunto es cerrado si y sólo si es finito. Por lo tanto es suficiente con ver que la preimagen de un punto $a \in \Bbbk$, a través de la función f, es un cerrado de X:

$$f^{-1}(a) = \{x \in X \;/\; f(x) = a\} = \{x \in X \;/\; f(x) - a = 0\} = (X_g)^c,$$

donde $g = f - a \in \Bbbk[X]$. ☐

Definición 1.2.26. Sea X un conjunto algebraico y $U \subset X$ un abierto. Decimos que una función $f : U \to \Bbbk$ es *regular en x* si existe un abierto $V \subset U$ con $x \in V$ y funciones g, $h \in \Bbbk[X]$ tales que $h(y) \neq 0 \; \forall y \in V$ y $f|_V = \left(\frac{g}{h}\right)\Big|_V$.

Si $f : U \to \Bbbk$ es una función regular en todo punto $x \in U$, decimos que f es *regular en U*. Denotamos por $\mathcal{O}_X(U)$ a las funciones regulares en U.

Observación 1.2.27. Si consideramos $V \subset U$ dos abiertos de X, entonces el mapa $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ dado por la restricción de funciones $\rho_{UV}(f) = f|_V$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras. La familia $\{\mathcal{O}_X(U) \;/\; U \text{ es abierto de } X\}$ junto con los mapas restricción $\rho_{UV} : U \to V$ forman un haz de $\Bbbk$-álgebras para X; es claro que que si f es regular en U, entonces f es continua (sigue inmediatamente de la definición y del lema 1.2.25), por lo tanto $\mathcal{O}_X$ es un subhaz del haz de funciones continuas $\mathcal{C}_X$ (ejemplo 1.2.7).

Definición 1.2.28. Sea X un conjunto algebraico. Llamaremos *haz de funciones regulares* en X al haz dado en la observación 1.2.27.

Ahora queremos identificar o describir el álgebra de funciones regulares $\mathcal{O}_X(U)$ en un abierto básico de un conjunto algebraico (teorema 1.2.31). Para esto es útil el siguiente lema y su corolario, que permite de alguna manera controlar mejor el entorno de un punto donde una función es regular.

Lema 1.2.29. *Sea X un conjunto algebraico; sea $U \subset X$ un abierto. Si $f : U \to \Bbbk$ es una función regular en $x \in U$, entonces existen funciones polinomiales $g, r \in \Bbbk[X]$ tales que $x \in X_r \subset U$ y $f|_{X_r} = \frac{g}{r}\Big|_{X_r}$.*

Demostración. Como f es regular en x, existen un abierto $V \subset U$ con $x \in V$ y funciones polinomiales $p, q \in \Bbbk[X]$ tal que

$$f|_V = \frac{p}{q}\Big|_V \tag{1.2}$$

donde $q(y) \neq 0$ para todo $y \in V$; por lo tanto $V \subset X_q$. Podemos tomar un abierto básico X_s, con $s \in \Bbbk[X]$, tal que $x \in X_s \subset V \subset X_q$, entonces $\mathcal{V}(\langle s \rangle) \supset \mathcal{V}(\langle q \rangle)$, por lo tanto $s \in \sqrt{\langle q \rangle}$ (observación 1.2.24), así que existen $k > 0$ y $h' \in \Bbbk[X]$ tal que $s^k = qh'$. Como $X_s = X_{s^k} = X_q \cap X_{h'}$, h' no se anula en X_s, por lo tanto podemos multiplicar por h' el numerador y denominador de la ecuación 1.2 y obtener la igualdad:

$$f|_{X_s} = \frac{ph'}{qh'}\Big|_{X_s} = \frac{ph'}{s^k}\Big|_{X_s}.$$

Tomando $g = ph'$ y $r = s^k$ terminamos la prueba. □

Corolario 1.2.30. *Sea X un conjunto algebraico y $U \subset X$ un abierto. Si $f : U \to \Bbbk$ es una función regular en U, entonces existen una cantidad finita de funciones polinomiales $g_i,\ h_i \in \Bbbk[X]$ con $i = 1, 2 \ldots, n$ tal que*

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} X_{h_i}$$

y

$$f|_{X_{h_i}} = \frac{g_i}{h_i}\Big|_{X_{h_i}}$$

Demostración. Debido a que U es compacto, se deduce inmediatamente del lema 1.2.29. □

Teorema 1.2.31. *Sean X un conjunto algebraico y $h \in \Bbbk[X]$ un elemento no nulo, entonces $\Bbbk[X]_h \cong \mathcal{O}_X(X_h)$, en particular $\mathcal{O}_X(X) \cong \Bbbk[X]$.*

Demostración. Para esta prueba seguimos [6, Lema 3.10 y Proposición 3.11].

Veamos que es posible definir el siguiente mapa:

$$\begin{aligned} \Phi : \Bbbk[X]_h &\to \mathcal{O}_X(X_h) \\ \frac{g}{h^n} &\mapsto \frac{g}{h^n} : X_h \to \Bbbk, \end{aligned}$$

es decir $\Phi\left(\dfrac{g}{h^n}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{h^n(x)}$ para todo $x \in X_h$. Este mapa no depende de la clase de equivalencia: si tenemos otro representante de $\dfrac{g}{h^n}$ en $\Bbbk[X]_h$, digamos $\dfrac{g'}{h^m}$, entonces existe $k \geq 0$ tal que $h^k(g'h^n - gh^m) = 0$ en $\Bbbk[X]$, y como h no se anula en X_h, necesariamente se tiene que $g'h^n = gh^m$ en X_h y por lo tanto

$\dfrac{g'(x)}{h^m(x)} = \dfrac{g(x)}{h^n(x)}$ para todo $x \in X_h$. Además es claro que el mapa definido de esta manera es un morfismo de $\mathbb{k}$-álgebras. Probemos ahora que es inyectivo: si $\dfrac{g}{h^n} = 0$ en X_h, es decir $\dfrac{g(x)}{h^n(x)} = 0$ para todo $x \in X_h$, entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in X_h$ y como h se anula en $X \setminus X_h$, se tiene que el producto gh se anula en X, entonces $\dfrac{g}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$ en $\mathbb{k}[X]_h$ ya que $(g \cdot 1 - 0 \cdot 1)h = gh = 0$ y por lo tanto $\dfrac{g}{h^n} = 0$ en $\mathbb{k}[X]_h$.

Para probar que el mapa es sobreyectivo consideramos una función regular $f \in \mathcal{O}_X(X_h)$ y queremos ver que proviene de un elemento de $\mathbb{k}[X]_h$ por medio de la función Φ. Por el corolario 1.2.30 existen una cantidad finita de funciones polinomiales $g_i, h_i \in \mathbb{k}[X]$ con $i = 1, 2 \ldots, n$ tal que

$$X_h = \bigcup_{i=1}^{n} X_{h_i}$$

y

$$f|_{X_{h_i}} = \frac{g_i}{h_i}\Big|_{X_{h_i}}.$$

Dados dos abiertos X_{h_i} y X_{h_j} tenemos que $X_{h_i} \cap X_{h_j} = X_{h_i h_j}$ (ver la observación 1.2.24) y por lo tanto $\dfrac{g_i}{h_i}$ y $\dfrac{g_j}{h_j}$ deben coincidir en $X_{h_i h_j}$, entonces $g_i h_j - g_j h_i = 0$ en $X_{h_i h_j}$. Como $h_i h_j = 0$ en $X \setminus X_{h_i h_j}$ tenemos que $h_i h_j (g_i h_j - g_j h_i)$ se anula en X, por lo tanto

$$g_i h_i h_j^2 = g_j h_i^2 h_j \text{ en } X. \tag{1.3}$$

Para cada i, $X_{h_i} = X_{h_i} \cap X_{h_i} = X_{h_i^2}$, entonces $X_h = \bigcup_{i=1}^{n} X_{h_i^2}$, así que $h(x) = 0$ si y sólo si $h_i^2(x) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, por lo tanto $\mathcal{V}(h) = \mathcal{V}(h_1^2, \ldots, h_n^2)$. Entonces tenemos que $h \in \sqrt{\langle h_1, \ldots, h_n \rangle}$, por lo que existen $a_i \in \mathbb{k}[X]$ con $i = 1, \ldots, n$ y $m > 0$ tal que

$$h^m = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i^2.$$

Afirmamos que $f = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i h_i}{h^m}\Big|_{X_h}$.

Para demostrar la afirmación podemos ver que la igualdad se cumple restringiendo a cada X_{h_j}. Como $f|_{X_{h_j}} = \dfrac{g_j}{h_j}\Big|_{X_{h_j}}$, tenemos que $(fh_j)|_{X_{h_j}} = g_j|_{X_{h_j}}$. Por otro lado, usando la igualdad 1.3, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_j^2 \sum_i a_i g_i h_i = \sum_i a_i \overbrace{g_i h_i h_j^2} &= \sum_i a_i \overbrace{g_j h_i^2 h_j} \\ &= g_j h_j \sum_i a_i h_i^2 \\ &= g_j h_j h^m, \end{aligned}$$

restringiendo a X_{h_j} tenemos:

$$\left(h_j^2 \sum_i a_i g_i h_i\right)\Big|_{X_{h_j}} = (g_j)|_{X_{h_j}}(h_j h^m)|_{X_{h_j}} = (fh_j)|_{X_{h_j}}(h_j h^m)|_{X_{h_j}} = (fh_j^2 h^m)|_{X_{h_j}}.$$

Como h_j^2 no se anula en X_{h_j} lo podemos cancelar para obtener la igualdad

$$\sum_{i=1}^n a_i g_i h_i = fh^m \quad \text{ en } X_{h_j},$$

luego

$$f|_{X_{h_j}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i g_i h_i}{h^m}\Big|_{X_{h_j}}.$$

Concluimos que $f = \Phi\left(\dfrac{g}{h^m}\right)$, donde $g = \sum_{i=1}^n a_i g_i h_i \in \Bbbk[X]$. □

Proposición 1.2.32. *Sea X un conjunto algebraico y $\mathcal{O}$ el haz de funciones regulares. Si $x \in X$ y M_x es el ideal maximal de $\Bbbk[X]$ correspondiente al punto x, entonces $\mathcal{O}_x \cong \Bbbk[X]_{M_x}$.*

Demostración. La fibra $\mathcal{O}_x$ es el límite directo del sistema $(\mathcal{O}(U), \rho_{UV})_{x\in U}$ donde $\mathcal{O}(U)$ son las funciones regulares en el abierto U y los mapas $\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ están dados por la restricción de funciones para todo $V \subset U$. Veamos que podemos definir mapas $\mu_U : \mathcal{O}(U) \to \Bbbk[X]_{M_x}$ para cada abierto $U \subset X$ que contiene a x de tal manera que se verifiquen las tres propiedades del límite directo dadas en la definición 1.2.1. Si $f \in \mathcal{O}(U)$, como f es regular en $x \in U$, existen $g, h \in \Bbbk[X]$ tales que $x \in X_h \subset U$ y $f|_{X_h} = \dfrac{g}{h}\Big|_{X_h}$; ya que $h \notin M_x$ definimos:

$$\mu_U(f) = \frac{g}{h} \in \Bbbk[X]_{M_x}.$$

Comprobamos primero que μ_U no depende g, h: Si $f|_{X_{h'}} = \dfrac{g'}{h'}\Big|_{X_{h'}}$ con $g', h' \in \Bbbk[X]$ y $x \in X_{h'} \subset U$, entonces $x \in X_h \cap X_{h'} = X_{hh'} \subset U$ y

$$\frac{g}{h}\Big|_{X_{hh'}} = f|_{X_{hh'}} = \frac{g'}{h'}\Big|_{X_{hh'}},$$

entonces, multiplicando por h y h' tenemos:

$$\frac{gh'}{hh'}\Big|_{X_{hh'}} = \frac{g'h}{h'h}\Big|_{X_{hh'}}.$$

Por el teorema 1.2.31 tenemos que $\dfrac{g'h}{h'h} = \dfrac{gh'}{hh'}$ en $\Bbbk[X]_{hh'}$. Como el mapa $\Bbbk[X]_h \to \Bbbk[X]_{M_x}$, dado por $\dfrac{a}{h} \mapsto \dfrac{a}{h}$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras para todo h, se tiene que $\dfrac{g'h}{h'h} = \dfrac{gh'}{hh'}$ en $\Bbbk[X]_{M_x}$, entonces $\dfrac{g'}{h'} = \dfrac{g}{h}$ en $\Bbbk[X]_{M_x}$. Una vez probado que μ_U no depende de la elección de $g, h \in \Bbbk[X]$, es claro que μ_U es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras para cada entorno abierto U de x. Queremos ver que $\Bbbk[X]_{M_x}$ junto con los mapas μ_U es el límite directo del sistema $\big(\mathcal{O}(U), \rho_{UV}\big)$. El item 1) y 2) de la definición 1.2.1 se verifican inmediatamente; para verificar 3) sea $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\mu_U(f) = 0$ en $\Bbbk[X]_{M_x}$. Sean $g, h \in \Bbbk[X]$ tal que $f|_{X_h} = \left.\frac{g}{h}\right|_{X_h}$, entones $\frac{g}{h} = 0$ en $\Bbbk[X]_{M_x}$, por lo tanto existe $h' \in \Bbbk[X] \setminus M_x$ tal que $h'g = 0$. Como $h'|_{X_{h'}} \neq 0$ se tiene que $g|_{X_{h'}} = 0$, entonces $f|_{X_{hh'}} = \left.\frac{g}{h}\right|_{X_{hh'}} = 0$ ya que $X_{hh'} = X_h \cap X_{h'}$, por lo tanto $\rho_{UX_{hh'}}(f) = 0$. Se concluye que $\varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U) \cong \Bbbk[X]_{M_x}$. □

Ahora, dada una variedad algebraica afín (X, A, φ), queremos definir un haz de $\Bbbk$-álgebras en X, el *haz estructural* de la variedad X. Comenzamos con un lema y un par de observaciones antes de definir dicho haz.

Lema 1.2.33. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra afín y $\mathcal{R} \subset A$ la intersección de todos los ideales maximales de A, entonces $\mathcal{R} = \{0\}$.*

Demostración. Como A es afín, tenemos que $A \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$, con I un ideal radical (ver la observación 1.1.33). Entonces los ideales maximales de A están en correspondencia con los ideales maximales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ que contienen a I [1, Proposición 1.1.], pero I es igual a la intersección de todos estos ideales (teorema 1.1.31), por lo tanto se tiene que la intersección de todos los ideales maximales de A es $\{0\}$. □

Observación 1.2.34.

1. Si A es una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada y $M \subset A$ es un ideal maximal, entonces A/M es un cuerpo que también es una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada. Recordar que $\Bbbk$ puede verse como un subcuerpo del álgebra A y que además es algebraicamente cerrado, entonces si restringimos al cuerpo $\Bbbk$ la proyección canónica $\pi : A \to A/M$, es decir $\pi|_{\Bbbk}(\lambda) = \lambda + M$ para cada $\lambda \in \Bbbk$, por el teorema de los ceros de Hilbert (teorema 1.1.21) tenemos que $\pi|_{\Bbbk}$ establece un isomorfismo entre los cuerpos $\Bbbk$ y A/M.

2. Mostraremos ahora que el álgebra A asociada a la variedad afín (X, A, φ) puede verse como una sub-álgebra del álgebra de funciones $\Bbbk^X$:

   Sea $\phi : A \to \Bbbk^X$, dada para cada $a \in A$ y $x \in X$ por $[\phi(a)](x) = a + M_x \in A/M_x \cong \Bbbk$ (vía el isomorfismo del item 1), donde $M_x = \varphi(x)$ es el ideal maximal correspondiente a x. Es claro que ϕ define un morfismo de $\Bbbk$-álgebras; podemos ver que es inyectivo ya que si $[\phi(a)](x) = a + M_x = 0$ para todo $x \in X$, entonces $a \in M_x$ para todo $x \in X$, es decir que a pertenece a todos los ideales maximales de A, por lo tanto $a = 0$ (lema 1.2.33).

3. Observemos que para cada $a \in A$, la función $\phi(a) : X \to \Bbbk$ definida en el item anterior, es continua; en efecto, un abierto básico del cuerpo $\Bbbk$ es el

complemento de un elemento, digamos $\{\lambda\}^c \subset \Bbbk$ con $\lambda \in \Bbbk$, entonces:

$$\begin{aligned}\big[\phi(a)\big]^{-1}\big(\{\lambda\}^c\big) = \big\{x \in X \;/\; \phi(a)(x) \neq \lambda\big\} &= \big\{x \in X \;/\; a-\lambda \notin \varphi(x)\big\}\\ &= \big\{x \in X \;/\; \varphi(x) \in \operatorname{Spm}(A)_{a-\lambda}\big\}\\ &= \varphi^{-1}\big(\operatorname{Spm}(A)_{a-\lambda}\big),\end{aligned}$$

que es un abierto en X.

4. Cuando $X = \mathcal{V}(I)$ es un conjunto algebraico con $I \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ un ideal radical, ya vimos que la terna (X, A, φ_I) es una variedad afín, donde $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I \cong \Bbbk[X]$ y $\varphi_I(x) = M_x + I$ (proposición 1.1.32). Para esta variedad afín tenemos que $\phi(f) = f$ para toda $f \in \Bbbk[X]$; en efecto, si $x \in X$, tenemos que $\phi(f)(x) = f + (M_x + I)$, vía el isomorfismo $\pi|_{\Bbbk} : \Bbbk \to \Bbbk[X]/(M_x + I) \cong \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/M_x$ existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $f - \lambda \in M_x$, es decir que $f(x) - \lambda = 0$ así que $f(x) = \lambda$. Entonces $\phi(f)(x) = f(x)$.

Motivado por estas observaciones tenemos la siguiente definición de función regular para una variedad afín, dicha definición coincide con la definición 1.2.26 de función regular cuando la variedad afín es un conjunto algebraico.

Definición 1.2.35 (*Funciones regulares en una variedad afín*)**.** Sea (X, A, φ) una variedad algebraica afín y ϕ el mapa dado en la observación 1.2.34. Diremos que una función $f : U \to \Bbbk$ con U abierto de X es *regular* en $x \in U$ si existen $U_x \subset U$ abierto de X que contiene a x y elementos a, $b \in A$ tales que $f|_{U_x} = \left.\dfrac{\phi(a)}{\phi(b)}\right|_{U_x}$, donde $[\phi(b)](y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$, es decir que $b \notin M_y$ para todo $y \in U_x$. Si f es regular para todo $x \in U$ diremos que f es regular en U o simplemente que f *es regular*.

Observación 1.2.36. Como las funciones $\phi(a)$ son continuas para cada $a \in A$, tenemos que el conjunto de las funciones regulares en un abierto U, al que denotaremos por $\mathcal{O}_X(U)$, es una sub-álgebra de la $\Bbbk$-álgebra de funciones continuas $\mathcal{C}_X(U)$. Si en la definición 1.2.35 consideramos $V \subset U$ otro abierto de X, se tiene que si f es regular en U, entonces f es regular en V, esto quiere decir que $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$; por lo tanto se puede considerar el morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ dado por la restricción de funciones. Al igual que las funciones regulares en un conjunto algebraico (ver la observación 1.2.27), la familia de $\Bbbk$-álgebras $\mathcal{O}_X(U)$ junto con la restricción de funciones forman un haz para X; dicho haz es un sub-haz del haz de funciones continuas $\mathcal{C}_X$.

Definición 1.2.37. Si (X, A, φ) es una variedad afín, llamaremos *haz estructural* de la variedad afín al haz en X dado por las funciones regulares. Denotaremos a este haz por $\mathcal{O}_X$.

Proposición 1.2.38. *Sea (X, A, φ) una variedad algebraica afín y $\mathcal{O}_X$ el haz estructural de la variedad afín X. Entonces existe un conjunto algebraico $Y \subset \mathbb{A}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$ como espacios anillados, donde $\mathcal{O}_Y$ es el haz de funciones regulares en Y.*

Demostración. Como A es afín, existe un n tal que $A \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$ donde $I \subset \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal radical. Si consideramos el conjunto algebraico $Y = \mathcal{V}(I)$, entonces $A \cong \Bbbk[Y]$. De la observación 1.1.33 sabemos que el mapa $f = \varphi_I^{-1} \circ \varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & \operatorname{Spm}(A) \arrow[d, "\varphi_I^{-1}"] \\ & \mathcal{V}(I) \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_I : \mathcal{V}(I) \to \operatorname{Spm}(A) \cong \operatorname{Spm}\big(\Bbbk[Y]\big)$ está dado por $\varphi_I(y) = M_y + I$ (proposición 1.1.32).

Vamos a definir ahora un morfismo de haces $\xi : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ en Y, dado para cada $V \subset Y$ abierto de Y y para cada $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$ por $\xi_V(\alpha) = \alpha \circ f|_{f^{-1}(V)}$.

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\xi_V} f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(V) \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "\xi_V(\alpha)"'] & & V \arrow[d, "\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)"] \\ & & \Bbbk \end{tikzcd}$$

El par (f, ξ) será el isomorfismo entre $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Primero tenemos que verificar que $\xi_V(\alpha) \in f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ para toda $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$, es decir que $\xi_V(\alpha)$ es regular en $f^{-1}(V)$. Sea $x_0 \in f^{-1}(V)$ y por lo tanto $f(x_0) \in V$. Como α es regular en $V \subset Y$ (que es un conjunto algebraico), existen un abierto U tal que $f(x_0) \in U \subset V$ y funciones $g, h \in \Bbbk[Y]$ tales que $\alpha|_U = \left.\dfrac{g}{h}\right|_U$ con $h(y) \neq 0$ para todo $y \in U$. Entonces para todo $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, es decir $f(x) \in U$, tenemos que

$$\xi_V(\alpha)(x) = (\alpha \circ f)(x) = \frac{g(f(x))}{h(f(x))}$$

Es decir que $\xi_V(\alpha)|_{f^{-1}(U)} = \left.\dfrac{g \circ f}{h \circ f}\right|_{f^{-1}(U)}$ donde $f^{-1}(U)$ es un abierto de X (porque f es continua) y $x_0 \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$. Sólo nos queda ver que $g \circ f, h \circ f \in \phi(A) = \phi\left(\Bbbk[Y]\right)$. Veamos que para toda $g \in \Bbbk[Y]$ se tiene que

$$g \circ f \in \phi(A) = \phi\big(\Bbbk[Y]\big). \tag{1.4}$$

Afirmamos que $g \circ f = \phi(g)$; en efecto, $f(x) = \varphi_I^{-1}\big(\varphi(x)\big)$, si $y \in Y$ es tal que $\varphi(x) = M_y + I \subset \Bbbk[Y]$, entonces

$$f(x) = \varphi_I^{-1}(M_y + I) = y,$$

así que $(g\circ f)(x) = g(y) \in \Bbbk$ y de la observación 1.2.34 item 4. sabemos que $g = \phi(g)$. Así que hemos probado que $\xi_V(\alpha)|_{f^{-1}(U)} = \left.\dfrac{\phi(g)}{\phi(h)}\right|_{f^{-1}(U)}$ para $g, h \in A$, por lo tanto $(\alpha\circ f)|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. Una vez verificado esto, es claro que si $U \subset V$ son abiertos de Y, el siguiente diagrama conmuta, donde ρ_{VU} y μ_{VU} son los mapas restricción:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\xi_V"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & f_*\mathcal{O}_X(V) \arrow[d, "\mu_{VU}"] \\ \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "\xi_U"'] & f_*\mathcal{O}_X(U) \end{tikzcd}$$

ya que los haces son de funciones y los mapas restricción están dados por la restricción de funciones; por lo tanto ξ es un morfismo de haces en Y.

Queda probar que (f,ξ) es un isomorfismo. Como f es un homeomorfismo, podemos definir $\zeta : \mathcal{O}_X \to (f^{-1})_*\mathcal{O}_Y$ un morfismo de haces en X, dado para cada $U \subset X$ abierto y $\beta \in \mathcal{O}_X(U)$ por $\zeta_U(\beta) = \beta\circ f^{-1}|_{f(U)}$. Tenemos que verificar que $\zeta_U(\beta)$ pertenece a $\mathcal{O}_Y(f(U))$: sea $y_0 = f(x_0) \in f(U)$, con $x_0 \in U$. Como β es regular en U, existe $U_0 \subset U$ conteniendo x_0 y funciones polinomiales $g, h \in \Bbbk[Y] = A$, tales que $\beta|_{U_0} = \left.\dfrac{\phi(g)}{\phi(h)}\right|_{U_0}$, entones

$$\zeta_U(\beta)|_{f(U_0)} = \beta\circ f^{-1}|_{f(U_0)} = \left.\frac{\phi(g)\circ f^{-1}}{\phi(h)\circ f^{-1}}\right|_{f(U_0)} = \left.\frac{g}{h}\right|_{f(U_0)},$$

donde la última igualdad es porque si $g \in \Bbbk[Y]$, ya vimos que $g\circ f = \phi(g)$. Por lo tanto $\zeta_U(\beta) \in \mathcal{O}_Y(f(U))$. Es claro que ζ es compatible con las restricciones, entonces tenemos que ζ es un morfismo de haces en X. El morfismo $(f^{-1},\zeta) : (Y,\mathcal{O}_Y) \to (X,\mathcal{O}_X)$ de espacios anillados es el inverso de (f,ξ); en efecto, si $\beta \in \mathcal{O}_X(U)$ tenemos que

$$\Big(\big((f^{-1})_*\xi\big)\circ\zeta\Big)_U(\beta) = \Big(\big((f^{-1})_*\xi\big)_U\circ\zeta_U\Big)(\beta) = \xi_{f(U)}\big(\zeta_U(\beta)\big) = \beta,$$

por lo que $\big((f^{-1})_*\xi\big)\circ\zeta = \mathrm{id}^{\mathcal{O}_X}$ (el morfismo identidad de haces en $\mathcal{O}_X$, definición 1.2.8). Similarmente $(f_*\zeta)\circ\xi = \mathrm{id}^{\mathcal{O}_Y}$, lo que concluye la prueba. □

Definición 1.2.39. Sean X, Y variedades afines y $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ sus haces estructurales, respectivamente. Diremos que una función continua $f : X \to Y$ es un *morfismo de variedades afines* si $(f, f^{\#}) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados, donde $f^{\#}$ es la precomposición con f (definición 1.2.21), es decir que para todo $V \subset Y$ abierto y para todo $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$ se tiene que $\alpha\circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ (observación 1.2.40.2).

Recordar que el morfismo $f^{\#}$ es un morfismo de haces en Y dado por $f^{\#}_V : \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big)$, para cada $V \subset Y$ abierto, donde $f^{\#}_V(\alpha) = \alpha\circ f|_{f^{-1}(V)}$.

Observación 1.2.40. 1. Si (X, A, φ) es una variedad afín y $\mathcal{O}_X$ es el haz estructural, es claro que las funciones $\phi(A)$ son regulares en X. De la prueba de la proposición 1.2.38, es fácil ver que $\mathcal{O}_X(X) = \phi(A)$, ya que si $\beta \in \mathcal{O}_X(X)$ se tiene que $\beta \circ f^{-1} \in \mathcal{O}_Y(Y) = \Bbbk[Y]$, entonces $\beta = (\beta \circ f^{-1}) \circ f \in \phi(A)$ (1.4). A partir de ahora también denotaremos por $\Bbbk[X]$ al álgebra $\mathcal{O}_X(X)$, o al álgebra A. La topología de X puede describirse fácilmente por medio del álgebra $\Bbbk[X]$: los abiertos básicos de la topología de X están dados, para $g \in \Bbbk[X]$, por $X_g = \{x \in X \ / \ g(x) \neq 0\}$, esto es porque si $g = \phi(a)$, con $a \in A$, entonces $X_g = \varphi^{-1}\big(\mathrm{Spm}(A)_a\big)$ que es un abierto básico de X ya que $\mathrm{Spm}(A)_a$ es un abierto básico de $\mathrm{Spm}(A)$. En particular, ya habíamos visto que $\mathrm{Spm}(A)_a$ es una variedad afín (observación 1.1.6), por lo tanto X_g es una variedad afín cuya álgebra asociada es $\Bbbk[X]_g$. En este caso se puede verificar fácilmente que el haz de funciones regulares (el haz estructural) de la variedad afín X_g, es la restricción del haz de X, es decir, para cada $V \subset X_g$ abierto se tiene que $\mathcal{O}_{X_g}(V) = \mathcal{O}_X(V)$.

   Sin riesgo de confusión denotamos por $\mathcal{V}(S)$ a los ceros comunes de un subconjunto $S \subset \Bbbk[X]$, es decir que $\mathcal{V}(S) = \big\{x \in X \ / \ g(x) = 0 \ \forall g \in S\big\} = \Big(\bigcup_{g \in S} X_g\Big)^c$ es un cerrado de X.

2. Observar que la función $f : X \to Y$ de la proposición 1.2.38 es un morfismo de variedades afines ya que el mapa $\xi : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es la precomposición con f y (f, ξ) es un morfismo de espacios anillados. En general, si $f : X \to Y$ es una función continua entre dos espacios topológicos subyacentes de variedades afines, tal que $\alpha \circ f \in \Bbbk[X]$ para toda función $\alpha \in \Bbbk[Y]$, entonces f induce un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$; en efecto, es suficiente verificar que si V es un abierto de Y y $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$, entonces $\alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big)$; para esto sea $x_0 \in f^{-1}(V)$, por lo tanto $y_0 = f(x_0) \in V$, como α es regular, existe V_0 un entorno abierto de y_0 tal que $V_0 \subset V$ y existen elementos $g, h \in \Bbbk[Y]$ tal que $\alpha|_{V_0} = \dfrac{g}{h}\Big|_{V_0}$. Si $x \in f^{-1}(V_0)$, entonces $\alpha \circ f(x) = \dfrac{g \circ f(x)}{h \circ f(x)}$ y por lo tanto $\alpha \circ f|_{f^{-1}(V_0)} = \dfrac{g \circ f}{h \circ f}\Big|_{f^{-1}(V_0)}$. Como $g \circ f, h \circ f \in \Bbbk[X]$, se tiene que $\alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

   Si $f : X \to Y$ es un morfismo de variedades afines, al morfismo de álgebras $f^{\#}_Y : \mathcal{O}_Y(Y) \to f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(X)$, si no hay peligro de confusión, lo denotamos simplemente por $f^{\#} \colon \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$.

Observación 1.2.41. Sea (X, A, φ) una variedad afín. Sea $\epsilon_x : \Bbbk[X] \to \Bbbk$ la evaluación en x, es decir $\epsilon_x(\alpha) = \alpha(x)$, que es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras, entonces $\ker(\epsilon_x)$ es un ideal maximal de $\Bbbk[X]$; definimos el mapa $E_X : X \to \mathrm{Spm}(\Bbbk[X])$ como $E_X(x) = \ker(\epsilon_x)$. Si $\phi_X : A \to \Bbbk[X]$ es el mapa dado en la observación 1.2.34, es decir $\phi_X(a)(x) = a + \varphi(x) \in \Bbbk$, entonces es fácil verificar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "E_X"] \\ \mathrm{Spm}(A) & \mathrm{Spm}(\Bbbk[X]) \arrow[l, "\phi_X^*"] \end{tikzcd}$$

donde $\phi_X^*(M) = \phi_X^{-1}(M)$ (ver la definición 1.1.36),

$$\phi_X^*\big(E_X(x)\big) = \phi_X^{-1}\big(\ker(\epsilon_x)\big) = \big\{a \in A \;/\; a \in \varphi(x)\big\} = \varphi(x).$$

Por el corolario 1.1.38 tenemos que ϕ_X^* es un homeomorfismo, por lo tanto E_X es un homeomorfismo.

Si ahora tenemos otra variedad afín (Y, B, ψ) y un morfismo $f : X \to Y$ de variedades afines, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "E_X"'] & Y \arrow[d, "E_Y"] \\ \mathrm{Spm}(\Bbbk[X]) \arrow[r, "{f^{\#}}^*"'] & \mathrm{Spm}(\Bbbk[Y]) \end{tikzcd}$$

que será útil para trabajar con morfismos de variedades afines. Podemos verificar la conmutatividad de dicho diagrama:

$$\begin{aligned}(E_Y \circ f)(x) = E_Y\big(f(x)\big) &= \ker\big(\epsilon_{f(x)}\big) \\ &= \big\{\alpha \in \Bbbk[Y] \;/\; \alpha(f(x)) = 0\big\} \\ &= \big\{\alpha \in \Bbbk[Y] \;/\; f^{\#}(\alpha) \in \ker(\epsilon_x)\big\} \\ &= {f^{\#}}^{-1}\big(\ker(\epsilon_x)\big) = {f^{\#}}^*(E_X(x)) = \big({f^{\#}}^* \circ E_X\big)(x).\end{aligned}$$

Observar que a partir de estos diagramas conmutativos, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ \mathrm{Spm}(A) \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Spm}(B) \end{tikzcd}$$

donde $g = \phi_Y^* \circ {f^{\#}}^* \circ {\phi_X^*}^{-1}$.

Se puede probar que si $f : X \to Y$ es una función continua y $F : B \to A$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras tal que que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ \mathrm{Spm}(A) \arrow[r, "F^*"'] & \mathrm{Spm}(B) \end{tikzcd}$$

entonces f es un morfismo de variedades afines y además F está determinado por f de manera única. Un morfismo de variedades afines puede definirse como un par del tipo (f, F), que hace conmutar el diagrama de arriba. Para más detalles puede verse [2, Lema 1.4.22].

1.3. Variedades algebraicas

En esta sección daremos la definición de *variedad algebraica* que generaliza el concepto de variedad afín o de conjunto algebraico. Una variedad (o más precisamente una *prevariedad*) será un objeto que localmente es una variedad afín.

1.3.1. Variedad afín como espacio localmente anillado

Nuestra definición de variedad afín como terna (X, A, φ) resulta algo inconveniente a la hora de definir *variedad algebraica* a partir de un haz, por este motivo también llamaremos variedad afín al espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ donde $\mathcal{O}_X$ es el haz estructural de la variedad afín. Equivalentemente, una variedad afín es un espacio anillado que es isomorfo a uno del tipo $(Y, \mathcal{O}_Y)$ donde Y es un conjunto algebraico y $\mathcal{O}_Y$ es el haz de funciones regulares.

Definición 1.3.1. Decimos que un $\Bbbk$-espacio anillado $(X, \mathcal{F})$ es un espacio *localmente anillado* si para cada $x \in X$, la fibra $\mathcal{F}_x$ es un anillo ($\Bbbk$-álgebra) local, es decir, un anillo con un único ideal maximal. A este ideal maximal lo denotamos por m_x y al cuerpo residual $\mathcal{F}_x/m_x$ por $k(x)$.

Ejemplo 1.3.2. Sea $Y = \mathcal{V}(I)$ un conjunto algebraico y $\mathcal{O}_Y$ el haz de funciones regulares en Y, entonces el espacio anillado $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es localmente anillado; en efecto $\mathcal{O}_{Y,y} \cong \Bbbk[Y]_{M_y}$ para todo $y \in Y$ (1.2.31) que es un anillo local. El ideal maximal de $\Bbbk[Y]_{M_y}$ es el ideal $m_y = \left\{g/h : g \in M_y, h \notin M_y\right\}$ (ver [1, Capítulo 3. Ejemplo 1]).

Ejemplo 1.3.3 (Haz constante)**.** Sean A una $\Bbbk$-álgebra y X un espacio topológico. Si para cada abierto $U \neq \varnothing$ definimos $\mathcal{F}(U) = A$ y $\rho_{UV} = id \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ el mapa identidad para cada par de abiertos $V \subset U \subset X$, entonces $(\mathcal{F}, \rho_{UV})$ es un haz de $\Bbbk$-álgebras en X. Es claro que $\mathcal{F}_x = A$ para todo $x \in X$. En el caso de que A no sea un anillo local, como por ejemplo el anillo de polinomios $A = \Bbbk[t]$, el espacio anillado $(X, \mathcal{F})$ no es localmente anillado.

Observación 1.3.4. *1.* Es claro que si $(f, \xi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ es un isomorfismo de espacios anillados, entonces el morfismo inducido en las fibras (1.2.15) $\xi_x : \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ es un isomorfismo de álgebras para cada $x \in X$, por lo tanto, si uno de los dos espacios es localmente anillado, el otro lo es.

2. Si X es una variedad afín, entonces por la proposición 1.2.38 tenemos que el espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es isomorfo al espacio anillado $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dado por un conjunto algebraico y el haz de funciones regulares. Luego $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente anillado ya que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es localmente anillado (ejemplo 1.3.2).

Definición 1.3.5. Sean $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ dos espacios localmente anillados. Decimos que un morfismo de espacios anillados $(f, \xi) : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ es un *morfismo de espacios localmente anillados* si el morfismo inducido en las fibras $\xi_x : \mathcal{G}_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ es un morfismo local, es decir que $\xi_x(m_{f(x)}) \subset m_x$.

Observación 1.3.6. Observar que el morfismo dado en la proposición 1.2.38 es un morfismo de espacios localmente anillados. Es más, recordar que un morfismo $(f, f^\#)$ entre variedades afines es un morfismo de espacios anillados donde $f^\#$ es la precomposición con f y en este caso $(f, f^\#)$ siempre es un morfismo de espacios localmente anillados. El siguiente teorema establece el recíproco de esta propiedad.

Teorema 1.3.7. *Sean X e Y variedades afines y $(f, \xi) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios localmente anillados. Entonces $\xi = f^\#$, la precomposición con f.*

Demostración. Recordar que $\mathcal{O}_Y(Y) = \Bbbk[Y]$ y $f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X) = \Bbbk[X]$. Probaremos primero que $\xi_Y \colon \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ está dado por la precomposición con f, es decir que $\xi(\alpha) = \alpha \circ f$ para toda $\alpha \in \Bbbk[Y]$.

Sea $x \in X$; si consideramos el morfismo en las fibras $\xi_x \colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[Y] \arrow[r, "\xi_Y"] \arrow[d, "\pi_{f(x)}"'] & \Bbbk[X] \arrow[d, "\pi_x"] \\
\mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[r, "\xi_x"'] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

donde los mapas π son las proyecciones canónicas. Si denotamos por $[Y, \alpha]$ a la clase de $\alpha \in \Bbbk[Y]$ en la fibra $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, es decir que $\pi_{f(x)}(\alpha) = [Y, \alpha]$ (análogamente $\pi_x(\beta) = [X, \beta]$ para $\beta \in \Bbbk[X]$), el diagrama conmutativo de arriba nos dice que

$$\xi_x\big([Y, \alpha]\big) = [X, \xi_Y(\alpha)]. \tag{1.5}$$

Sean $M_x \subset \Bbbk[X]$ el ideal maximal correspondiente a x y $M_{f(x)} \subset \Bbbk[Y]$ el ideal maximal correspondiente a $f(x)$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} \cong \Bbbk[X]_{M_x}$ y $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \cong \Bbbk[Y]_{M_{f(x)}}$ (proposición 1.2.32); explícitamente, si $\alpha \in \Bbbk[Y]$, el elemento $[Y, \alpha] \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ se identifica con $\frac{\alpha}{1} \in \Bbbk[Y]_{M_{f(x)}}$ y $\beta \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ se identifica con $\frac{\beta}{1} \in \Bbbk[X]_{M_x}$; con esta identificación podemos reescribir la ecuación (1.5):

$$\xi_x\left(\frac{\alpha}{1}\right) = \frac{\xi_Y(\alpha)}{1}.$$

Si $\alpha \in M_{f(x)}$, entonces $\frac{\alpha}{1} \in m_{f(x)}$ (el ideal maximal de $\Bbbk[Y]_{M_{f(x)}}$). Como el morfismo es de espacios localmente anillados se tiene que

$$\frac{\xi_Y(\alpha)}{1} = \xi_x\left(\frac{\alpha}{1}\right) \in \xi_x(m_{f(x)}) \subset m_x,$$

entonces $\xi_Y(\alpha) \in M_x$, lo que prueba lo siguiente:

$$\xi_Y(M_{f(x)}) \subset M_x.$$

Por lo tanto ξ_Y induce un morfismo de cuerpos $\tilde{\xi_Y} \colon \Bbbk[Y]/M_{f(x)} \to \Bbbk[X]/M_x$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[Y] \arrow[r, "\xi_Y"] \arrow[d] & \Bbbk[X] \arrow[d] \\
\Bbbk[Y]/M_{f(x)} \arrow[r, "\tilde{\xi_Y}"'] & \Bbbk[X]/M_x
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las proyecciones canónicas. Recordar que las proyecciones restringidas al cuerpo $\Bbbk$ establecen un isomorfismo de cuerpos (observación 1.2.34 item 1), así que si $\alpha \in \Bbbk[Y]$, existe $\lambda \in \Bbbk$ tal que $\alpha + M_{f(x)} = \lambda + M_{f(x)}$, es decir que $\alpha - \lambda \in M_{f(x)}$, entonces

$$\alpha(f(x)) = \lambda.$$

Además, como $\xi_Y(M_{f(x)}) \subset M_x$ y ξ_Y es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras, tenemos que $\xi_Y(\alpha - \lambda) = \xi_Y(\alpha) - \lambda \in M_x$, por lo tanto $\xi_Y(\alpha)(x) = \lambda$. Entonces, para todo $\alpha \in \Bbbk[Y]$ y para todo $x \in X$ tenemos:

$$\xi_Y(\alpha)(x) = \alpha \circ f(x),$$

como queríamos probar. Ahora estamos en condiciones de demostrar que el morfismo de haces $\xi \colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ está dado por la precomposición con f. Sea $V \subset Y$ un abierto y $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$; por definición de función regular, para todo $y \in V$ existen $g, h \in \Bbbk[Y]$ (que dependen de y) y un abierto $V_y \subset V$ con $y \in V_y$ tal que h no se anula en V_y y $\alpha|_{V_y} = \left.\frac{g}{h}\right|_{V_y}$, entonces, como (f, ξ) es un morfismo de espacios anillados, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\xi_V"] \arrow[d, "\text{restricción}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\text{restricción}"] \\
\mathcal{O}_Y(V_y) \arrow[r, "\xi_{V_y}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_y))
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi_V(\alpha)|_{f^{-1}(V_y)} = \xi_{V_y}(\alpha|_{V_y}) &= \frac{\xi_{V_y}(g|_{V_y})}{\xi_{V_y}(h|_{V_y})} \\
&= \left.\frac{\xi_Y(g)}{\xi_Y(h)}\right|_{f^{-1}(V_y)} = \left.\frac{g \circ f}{h \circ f}\right|_{f^{-1}(V_y)} = \alpha \circ f|_{f^{-1}(V_y)}.
\end{aligned}$$

Dado que $f^{-1}(V) = \bigcup_{y \in V} f^{-1}(V_y)$, se cumple que $\xi_V(\alpha) = \alpha \circ f|_{f^{-1}(V)}$. $\square$

Definición 1.3.8. Una $\Bbbk$-*prevariedad algebraica*, o simplemente una *prevariedad*, será un $\Bbbk$-espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O})$ tal que existe un cubrimiento finito $\{V_i\}_{i=1,\dots,k}$ por abiertos de X, donde cada espacio anillado $(V_i, \mathcal{O}|_{V_i})$ es una variedad afín. El abierto V_i es considerado con la topología inducida de X y el haz $\mathcal{O}|_{V_i}$ es la restricción del haz $\mathcal{O}$ al abierto V_i (definición 1.2.6).

Observar que en la definición anterior, si $U \subset V_i \cap V_j$ es un abierto de X, entonces

$$\mathcal{O}_{V_i}(U) := \mathcal{O}|_{V_i}(U) = \mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_{V_j}(U) = \mathcal{O}|_{V_j}(U) \subset \mathcal{C}_X(U) \subset \Bbbk^U.$$

Por lo tanto, para todo $U \subset X$ abierto de X, los elementos del álgebra $\mathcal{O}(U)$ pueden verse como funciones continuas en $\mathcal{C}_X(U)$ ya que para todo $a \in \mathcal{O}(U)$ se tiene que $a|_{U\cap V_i} \in \mathcal{O}_{V_i}(U \cap V_i)$ para cada i. Entonces, definiendo $f_a \in \Bbbk^U$ como $f_a|_{U\cap V_i} = a|_{U\cap V_i}$ para cada i tal que $U \cap V_i \neq \varnothing$, se tiene que la asignación

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(U) \to \mathcal{C}_X(U) \\ &a \mapsto f_a \end{aligned}$$

es un morfismo de álgebras. Como $\mathcal{O}$ es un haz, si $b|_{U\cap V_i} = a|_{U\cap V_i}$ para todo i, entonces $a = b$, por lo tanto el morfismo es inyectivo. En particular tenemos la siguiente observación:

Observación 1.3.9. Si $(X, \mathcal{O})$ es una prevariedad, entonces el haz $\mathcal{O}$ es un sub-haz del haz de funciones continuas $\mathcal{C}_X$.

Definición 1.3.10. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos prevariedades y $f\colon X \to Y$ una función continua. Decimos que f es un *morfismo de prevariedades* si para cada $V \subset Y$ abierto y para cada $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$ se tiene que $f^\#_V(\alpha) = \alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{O}_X(V) \subset f_*\mathcal{C}_X(V)$, en otras palabras:

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

es un morfismo de espacios anillados.

Es claro que si X es una variedad afín y $\mathcal{O}_X$ es el haz estructural de la variedad afín, entonces $(X, \mathcal{O}_X)$ es una prevariedad, además un morfismo de variedades afines es un morfismo de prevariedades.

En particular, las prevariedades son espacios localmente anillados y un morfismo de prevariedades es un morfismo de espacios localmente anillados.

Una $\Bbbk$-variedad será una prevariedad que cumpla cierta condición de separabilidad que veremos en la sección 1.3.2.

El espacio proyectivo (ver [2, 1.4.35]) es un ejemplo de prevariedad ($\Bbbk$-variedad) que no es una variedad afín.

1.3.2. Prevariedad producto

Sean X e Y dos prevariedades algebraicas. Queremos definir la prevariedad producto $X \times Y$, que como conjunto será el producto cartesiano usual, aunque no tendrá la topología producto.

Primero empecemos por X e Y variedades afines y observemos que el producto tensorial de $\Bbbk$-álgebras $\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$ puede considerarse como una sub-álgebra de la $\Bbbk$-álgebra de funciones $\Bbbk^{X\times Y}$ ([5, Teorema 3.1.3]) por medio del morfismo inyectivo $\delta : \Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y] \to \Bbbk^{X\times Y}$, dado por

$$\delta\Big(\sum_i f_i\otimes g_i\Big)(x,y) = \sum_i f_i(x)g_i(y) \tag{1.6}$$

(la suma es finita), esto implica en particular que $\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$ es una $\Bbbk$-álgebra reducida (no tiene elementos nilpotentes no nulos). Además, como $\Bbbk[X]$ y $\Bbbk[Y]$ son finitamente generadas, su producto tensorial es una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada. Dicha álgebra será el álgebra asociada a la variedad afín $X\times Y$. El siguiente lema permite caracterizar el espectro maximal de $\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$.

Lema 1.3.11. *Si X, Y son variedades afines, entonces existe la siguiente biyección:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Spm}(\Bbbk[X])\times\operatorname{Spm}(\Bbbk[Y]) &\longrightarrow \operatorname{Spm}(\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y])\\ (M,N) &\longmapsto M\otimes\Bbbk[Y]+\Bbbk[X]\otimes N.\end{aligned}$$

Demostración. Debemos probar que si M, N son ideales maximales de $\Bbbk[X]$ y $\Bbbk[Y]$ respectivamente, entonces $M\otimes\Bbbk[Y]+\Bbbk[X]\otimes N$ es un ideal maximal del producto tensorial y que todo ideal maximal del producto tensorial $\Bbbk[X]\otimes\Bbbk[Y]$ es de esa forma. Por la proposición 1.2.38 podemos suponer que $X\subset\Bbbk^n$ e $Y\subset\Bbbk^m$ son conjuntos algebraicos para ciertos $n, m\in\mathbb{N}$. Denotamos por $\Bbbk[y_1,\dots,y_m]$ al anillo de polinomios con m indeterminadas a las que llamamos y_i. Sean $I\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ y $J\subset\Bbbk[y_1,\dots,y_m]$ ideales radicales tales que $X=\mathcal{V}(I)$ e $Y=\mathcal{V}(J)$. Si consideramos la inclusión canónica $I, J\subset\Bbbk[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ (anillo de polinomios en $n+m$ indeterminadas), denotamos por $\langle I\rangle$, $\langle J\rangle$ e $\langle I,J\rangle$ a los ideales generados por I, J e $I\cup J$ en $\Bbbk[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$ respectivamente. Observar que $\mathcal{V}(I,J)=\mathcal{V}(I\cup J)=\mathcal{V}\big(\langle I\rangle\big)\cap\mathcal{V}\big(\langle J\rangle\big)\subset\Bbbk^n\times\Bbbk^m=\Bbbk^{n+m}$ (proposición 1.1.10). Además es fácil verificar que se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{V}\big(\langle I\rangle\big)\cap\mathcal{V}\big(\langle J\rangle\big)=\big(\mathcal{V}(I)\times\Bbbk^m\big)\cap\big(\Bbbk^n\times\mathcal{V}(J)\big)=\mathcal{V}(I)\times\mathcal{V}(J)=X\times Y.$$

Consideremos el morfismo de $\Bbbk$-álgebras

$$\varphi\colon \frac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}{I}\otimes\frac{\Bbbk[y_1,\dots,y_m]}{J}\to\frac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]}{\langle I,J\rangle}$$

dado por $\varphi\big((f+I)\otimes(g+J)\big)=fg+\langle I,J\rangle$, donde identificamos f y g con sus imágenes en $\Bbbk[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]$. Afirmamos que φ es un isomorfismo. Claramente el morfismo es sobreyectivo porque todo polinomio en $n+m$ variables se escribe como una suma de monomios con dos factores, uno en las primeras n variables y el otro en las últimas m variables, es decir $\sum_i f_i(x_1,\dots,x_n)g_i(y_1,\dots,y_m)$.

Para probar que es inyectivo sea $\sum_i (f_i + I) \otimes (g_i + J) \in \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ (podemos suponer que los elementos $g_i + J$ forman un conjunto linealmente independiente viendo a $\Bbbk[Y]$ como un $\Bbbk$-espacio vectorial) tal que $\sum_i f_i g_i + \langle I, J\rangle = 0$, es decir

$$\sum_i f_i g_i \in \langle I, J\rangle,$$

entonces $\sum_i f_i g_i(a,b) = \sum_i f_i(a) g_i(b) = 0$ para todo $(a,b) \in \mathcal{V}(I,J) = \mathcal{V}(I) \times \mathcal{V}(J) = X \times Y$, donde $a \in \Bbbk^n$, $b \in \Bbbk^m$ y adoptamos la notación (a,b) para referirnos al correspondiente punto en $\Bbbk^n \times \Bbbk^m$. Si fijamos $a \in X$ tenemos que $\sum_i f_i(a) g_i(b) = 0$ para todo $b \in \mathcal{V}(J)$, entonces $\sum_i f_i(a) g_i \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J} = J$, entonces $\sum_i f_i(a)(g_i + J) = 0$ y como los $g_i + J$ son linealmente independientes se tiene que $f_i(a) = 0$ para todo i. Como $a \in X = \mathcal{V}(I)$ es arbitrario, tenemos que $f_i \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$ para todo i, por lo tanto $\sum_i (f_i + I) \otimes (g_i + J) = 0$ y concluimos que φ es un isomorfismo de $\Bbbk$-álgebras.

Una vez que tenemos ese isomorfismo es casi inmediato ver cuáles son los ideales maximales de $\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$: como $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado, recordar que los ideales maximales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ son de la forma $M_{(a,b)}$ (teorema 1.1.23) para $(a,b) \in \Bbbk^{n+m}$ con $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk^n$ y $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \Bbbk^m$. Es decir que los ideales maximales del cociente por $\langle I, J\rangle$ son de la forma $M_{(a,b)} + \langle I, J\rangle$ y este ideal se corresponde, mediante el isomorfismo φ, con

$$(M_a + I) \otimes \Bbbk[Y] + \Bbbk[X] \otimes (N_b + J)$$

donde $M_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\rangle$ y $N_b = \langle y_1 - b_1, \ldots, y_m - b_m\rangle$ son los ideales maximales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y $\Bbbk[y_1, \ldots, y_m]$ respectivamente. $\square$

El lema anterior (1.3.11) muestra que los morfismos canónicos $\Bbbk[X] \to \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ y $\Bbbk[Y] \to \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ dados por $f \mapsto f \otimes 1$ y $g \mapsto 1 \otimes g$, inducen una biyección $\varphi : \operatorname{Spm}\big(\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]\big) \to \operatorname{Spm}\big(\Bbbk[X]\big) \times \operatorname{Spm}\big(\Bbbk[Y]\big) \to X \times Y$; si le damos a $X \times Y$ la topología inducida por esta biyección, entones la terna $(X \times Y, \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y], \varphi^{-1})$ es una variedad afín, es la *variedad producto* entre X e Y.

Resulta ser que el mapa δ (ecuación 1.6) es igual al mapa ϕ dado en la observación 1.2.34 (el morfismo que identifica el álgebra de la variedad afín con las funciones). Entonces, los abiertos básicos de la topología de $X \times Y$ son de la forma

$$(X \times Y)_f = \big\{(x,y) \in X \times Y \;/\; f(x,y) \neq 0\big\},$$

con $f = \sum_i f_i \otimes g_i$ para funciones regulares $f_i \in \Bbbk[X]$ y $g_i \in \Bbbk[Y]$, donde identificamos, por medio del morfismo δ, los elementos de $\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ directamente con funciones de $\Bbbk^{X \times Y}$.

Cuando X e Y son prevariedades que no necesariamente son afines, necesitamos el siguiente lema de “pegado” para poder definir $X \times Y$ como una prevariedad.

Lema 1.3.12. *Sea X un espacio topológico que puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos afines, es decir: existen $V_1, V_2, \ldots, V_r$ abiertos de X*

tal que $X = \bigcup_i V_i$, donde cada V_i tiene un haz de $\Bbbk$-álgebras $\mathcal{O}_{V_i}$ de tal manera que $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ es una variedad afín y V_i es considerado con la topología inducida de X. Supongamos que el cubrimiento $\{V_i\}_i$ tiene la siguiente propiedad: si $V_i \cap V_j \neq \varnothing$ se cumple que para todo $V \subset V_i \cap V_j$ abierto $\mathcal{O}_{V_i}(V) = \mathcal{O}_{V_j}(V) \subset \Bbbk^V$, entonces existe un único haz en X, al que denotamos por $\mathcal{O}_X$, tal que $\mathcal{O}_X(V_i) = \mathcal{O}_{V_i}(V_i)$.

Demostración. La prueba consiste simplemente en definir $\mathcal{O}_X(U)$, para cada abierto $U \subset X$ no vacío, como el álgebra de todas las funciones $f \colon U \to \Bbbk$ tal que $f|_{U \cap V_i} \in \mathcal{O}_{V_i}(U \cap V_i)$ para cada i con $U \cap V_i \neq \varnothing$. [2, Lema 1.4.28]. □

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ prevariedades algebraicas. Entonces existen dos cubrimientos $X = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ e $Y = W_1 \cup \ldots \cup W_k$ por abiertos de tal manera que cada $\left(V_i, \mathcal{O}_X|_{V_i}\right)$ y $\left(W_i, \mathcal{O}_Y|_{W_i}\right)$ son variedades afines. Al producto $X \times Y$ le damos la topología que tiene como base los abiertos de los productos de abiertos afines, es decir que la base es

$$\bigcup_{i,j} \left\{U \subset V_i \times W_j \;/\; U \text{ es abierto de } V_i \times W_j\right\}$$

Así que tenemos un cubrimiento finito de $X \times Y$ por abiertos afines:

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} V_i \times W_j.$$

El cubrimiento $\{V_i \times W_j, \mathcal{O}_{V_i \times W_j}\}$ cumple con la condición de pegado del lema 1.3.12, por lo tanto definimos la prevariedad $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ como el espacio anillado tal que $\mathcal{O}_{X \times Y}|_{V_i \times W_j} = \mathcal{O}_{V_i \times W_j}$.

Observación 1.3.13. La topología que tiene la prevariedad producto es más fina que la topología producto. Recordamos que si X, Y son espacios topológicos, los abiertos de la topología producto son aquellos de la forma $U \times V$ con $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos de X y de Y respectivamente. Veamos que estos conjuntos también son abiertos de la prevariedad producto. Consideremos primero que X e Y son afines y observar que podemos escribir

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V),$$

así que bastaría probar, por ejemplo, que $U \times Y$ es abierto. Sean $f_1, \ldots, f_r \in \Bbbk[X]$ tales que

$$U = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_r}.$$

Nuevamente es suficiente con ver que $X_{f_i} \times Y$ es abierto para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Pero es claro que

$$X_{f_i} \times Y = (X \times Y)_{f_i \otimes 1}$$

es un abierto básico de $X \times Y$.

Si X, Y no son afines, basta tomar cubrimientos (finitos) por afines $\{V_i\}_i$ y $\{W_j\}_j$ de X e Y respectivamente y observar que $U \times V$ se puede escribir como

$$U \times V = \bigcup_{i,j} (U \cap V_i) \times (V \cap W_j)$$

y cada $U \cap V_i$ y $V \cap W_j$ son abiertos de los afines V_i y W_j respectivamente, por lo que $(U \cap V_i) \times (V \cap W_j)$ es abierto de $V_i \times W_j$ para cada i, j, así que son abiertos de la base de la topología que le dimos a $X \times Y$, entonces $U \times V$ es abierto de la prevariedad producto $X \times Y$.

Ejemplo 1.3.14. Veamos un ejemplo sencillo de lo anterior, consideremos la variedad afín $\mathbb{A}^1$ y el producto de prevariedades $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. La topología de Zariski de $\mathbb{A}^1$ coincide con la topología de los complementos finitos, todo cerrado propio es un conjunto finito de puntos, por lo tanto, si consideramos la topología producto en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, los cerrados también son conjuntos formados por una cantidad finita de puntos. Sin embargo con la topología de prevariedad el conjunto

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 : xy = 1\}$$

es un cerrado propio, pero no es finito. Para ver que es cerrado, consideramos $f, g \in \Bbbk[x]$ dadas por $f(x) = x$ y $g(y) = y$, entonces:

$$H = \left[(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)_{f \otimes g - 1 \otimes 1}\right]^c.$$

Comentamos aquí que en general $\mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1$ n veces, es isomorfo a $\mathbb{A}^n$ como variedades afines. Para más detalles se puede consultar por ejemplo [6].

Definición 1.3.15. Diremos que una prevariedad X es una *variedad algebraica* o simplemente una *variedad* si el mapa diagonal $\triangle : X \to X \times X$, dado por $\triangle(x) = (x, x)$, tiene imagen cerrada. Un mapa entre variedades algebraicas es un *morfismo* si es un morfismo de prevariedades.

Una prevariedad o un espacio anillado que cumple con que el mapa diagonal es cerrado, se dice que es *separado*. Algunos autores no consideran a las variedades como espacios separados, pero nosotros queremos evitar algunos casos patológicos. ([6, Ejemplo 5.10], la recta con un punto doble).

La siguiente proposición muestra lo que mencionamos al inicio de la sección, que una variedad afín es en particular una variedad algebraica. Sólo nos queda verificar que el mapa diagonal de una variedad afín es un morfismo con imagen cerrada.

Proposición 1.3.16. *Si X es una variedad afín, entonces el mapa diagonal $\triangle : X \to X \times X$ es un morfismo de variedades afines; además, $\triangle(X)$ es cerrada en $X \times X$, es decir que X es una variedad algebraica.*

Demostración. Veamos que $\triangle$ es continua: sea $(X \times X)_f = \{(x, y) \in X \times X \,/\, f(x, y) \neq 0\}$ un abierto básico, con $f = \sum_i f_i \otimes g_i$ donde $f_i, g_i \in \Bbbk[X]$ para cada

i, entonces, si nombramos $h = \sum_i f_i g_i \in \Bbbk[X]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\triangle^{-1}\big((X \times X)_f\big) &= \big\{x \in X \ / \ (x,x) \in (X \times X)_f\big\} \\ &= \Big\{x \in X \Big/ \sum_i f_i(x) g_i(x) \neq 0\Big\} \\ &= X_h,\end{aligned}$$

que es un abierto de X.

Para terminar de probar que $\triangle$ es un morfismo, debido a la observación 1.2.41, es suficiente con ver que $f \circ \triangle \in \Bbbk[X]$ para cada $f \in \Bbbk[X \times X] = \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[X] \subset \Bbbk^{X \times X}$; pero una tal f es de la forma $f(x,y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$ (suma finita), con $f_i, g_i \in \Bbbk[X]$, entonces $f \circ \triangle(x) = f(x,x) = \sum_i f_i(x) g_i(x)$. Por lo tanto $f \circ \triangle = \sum_i f_i g_i \in \Bbbk[X]$.

Para probar que la imagen es cerrada, observemos que $\triangle(X) \subset \mathcal{V}\big(\{f \otimes 1 - 1 \otimes f \ / \ f \in \Bbbk[X]\}\big)$ y que si $(x,y) \notin \triangle(X)$, entonces $x \neq y$, así que por la observación 1.2.24. item 4 tenemos que existe $f \in \Bbbk[X]$ tal que $f(x) \neq f(y)$ de lo que se deduce la igualdad:

$$\triangle(X) = \mathcal{V}\big(\{f \otimes 1 - 1 \otimes f \ / \ f \in \Bbbk[X]\}\big),$$

por lo que $\triangle(X)$ es cerrado. $\square$

Observación 1.3.17. *1.* Si X es una variedad afín y $U \subset X$ es un abierto no vacío, entonces U es una variedad algebraica ([2, Ejemplo 1.4.36]), puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos afines de manera que quede “coherente” con el haz de X. Sabemos que U puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos básicos:

$$U = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_r}$$

donde $f_i \in \Bbbk[X]$ para todo i. Además cada X_{f_i} es afín (observación 1.2.40) y $X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j}$. El haz que le dimos a X_{f_i} para que sea una variedad afín coincide con la restricción del haz de X, $\mathcal{O}_{X_{f_i}} = \mathcal{O}_X|_{X_{f_i}}$, por lo que si $V \subset X_{f_i} \cap X_{f_j}$ es un abierto no vacío se tiene que $\mathcal{O}_{X_{f_i}}(V) = \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X_{f_i g_j}}(V) = \mathcal{O}_{X_{f_j}}(V)$. La diagonal de U es $\triangle(U) = U \cap \triangle(X)$ que es cerrado en U porque la diagonal de X es cerrada.

Si consideramos, más en general, una variedad algebraica y un abierto no vacío de la variedad, entonces este también puede verse como una variedad algebraica. Basta con tomar un cubrimiento por afines de la variedad e intersectar el abierto con cada uno de estos abiertos afines, luego cada intersección es un abierto de un afín y por lo tanto una variedad con el haz restringido, en total el abierto es unión de abiertos afines. Diremos en este caso que el abierto es una *subvariedad abierta*.

2. Muchas veces, para comprobar si una función continua entre prevariedades (o variedades) es un morfismo, es suficiente considerar que las prevariedades son afines ([6, Proposición 5.4.]). La idea es la siguiente: sean X e Y prevariedades algebraicas y $f\colon X \to Y$ una función continua. Consideremos $V \subset Y$ un abierto no vacío de Y y $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V)$. Para probar que f es un morfismo hay que verificar que $\alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. Si $\{V_i\}_i$ es un cubrimiento finito por abiertos afines de Y, entonces para cada i tal que $V \cap V_i \neq \varnothing$, se tiene que $f^{-1}(V \cap V_i) \subset X$ es un abierto no vacío de X por lo tanto puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos afines de X, es decir $f^{-1}(V \cap V_i) = \bigcup_j U_{ij}$ con U_{ij} abiertos afines de X y podemos escribir:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{ij} U_{ij},$$

como una unión finita de abiertos afines. En realidad los índices j's dependen de i, pero lo dejamos así para simplificar la notación. Si asumimos que $f_{ji} := f|_{U_{ij}}\colon U_{ij} \to V_i$ es un morfismo (donde U_{ij} y V_i son afines) para cada i, j, entonces $(\alpha|_{V\cap V_i}) \circ f_{ji} \in \mathcal{O}_{U_{ij}}(U_{ij}) = \mathcal{O}_X(U_{ij})$ (porque $\alpha|_{V\cap V_i} \in \mathcal{O}_Y(V \cap V_i) = \mathcal{O}_{V_i}(V \cap V_i)$ y $f_{ji}^{-1}(V \cap V_i) = f^{-1}(V \cap V_i) \cap U_{ij} = U_{ij}$), como $\mathcal{O}_X$ es un haz y $f^{-1}(V) = \bigcup_i f^{-1}(V \cap V_i) = \bigcup_{ij} U_{ij}$ se tiene que $\alpha \circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(V)$.

En general, si tenemos una función continua $f\colon X \to Y$ entre dos variedades, con $Y = \bigcup_i V_i$, unión finita de abiertos afines, existe un cubrimiento finito $X = \bigcup_j U_j$ por abiertos afines de X tal que para cada j, $f(U_j)$ está contenido en algún V_i, y por lo tanto $f|_{U_j}\colon U_j \to V_i$ es un morfismo de variedades afines. Este resultado es útil porque, como los U_j cubren todo X, muchas pruebas pueden reducirse al caso afín.

Observación 1.3.18. Una de las consecuencias importantes de considerar la propiedad de que las variedades sean separadas, es que si la diagonal es cerrada entonces la intersección de abiertos afines es afín. Tenemos la siguiente proposición de la cual omitiremos la prueba, se puede consultar [6, Teorema 5.29].

Proposición 1.3.19. *Sea X una variedad algebraica y $U, V \subset X$ dos abiertos afines (no vacíos). Entonces $U \cap V$ es un abierto afín y el mapa*

$$\psi : \Bbbk[U] \otimes \Bbbk[V] \to \Bbbk[U \cap V]$$

dado por $\psi(f \otimes g) = (fg)|_{U\cap V}$ es sobreyectivo.

Teorema 1.3.20. *Sean X, Y variedades algebraicas. Las proyecciones $p_1\colon X \times Y \to X$ y $p_2\colon X \times Y \to Y$, dadas por $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$ son morfismos abiertos (la imagen de un conjunto abierto es abierto).*

Demostración. Probaremos que $p_1\colon X \times Y \to X$ es un morfismo abierto, la otra es análoga. La continuidad es inmediata; en efecto, si $U \subset X$ es un abierto de X, se tiene que $p_1^{-1}(U) = \{(x, y) : x \in U,\ y \in Y\} = U \times Y$ es abierto; recordar que la topología de la variedad $X \times Y$ es más fina que la topología producto. Para probar que es un morfismo, tomamos un elemento $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y queremos ver que $f \circ p_1|_{p_1^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_{X\times Y}(p_1^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{X\times Y}(U \times Y)$. Por la observación

1.3.17.*2* podemos suponer que X e Y son afines. Así que es suficiente tomar $f \in \Bbbk[X]$ y verificar que $f \circ p_1 \in \Bbbk[X \times Y] = \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$:

$$f \circ p_1(x, y) = f(x) = f \otimes 1(x, y)$$

y $f \otimes 1 \in \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$. Luego p_1 es un morfismo. Ahora queremos probar que es abierto. Con la misma idea de la observación 1.3.17.*2* podemos suponer que X e Y son afines. Sea $U \subset X \times Y$ un abierto. Como todo abierto es unión de abiertos del tipo $(X \times Y)_f$ con $f = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i$, $f_i \in \Bbbk[X]$ y $g_i \in \Bbbk[Y]$, es suficiente probar que $p_1\big((X \times Y)_f\big)$ es abierto. Sea $U = (X \times Y)_f$. Un elemento $a \in p_1(U)$ si y sólo si existe $b \in Y$ tal que $f(a, b) = \sum_{i=1}^{r} f_i(a) g_i(b) \neq 0$. Podemos suponer que los g_i son linealmente independientes, por lo que $f(a, y) = \sum_{i=1}^{r} f_i(a) g_i(y) = 0$ para todo $y \in Y$ si y sólo si $f_i(a) = 0$ para todo i. Entonces el complemento de $p_1(U)$ es cerrado, los ceros de $\{f_i\}_i$, así que $p_1(U)$ es abierto como queríamos probar.

□

Como un corolario del teorema 1.3.20 veremos la siguiente proposición que será útil más adelante.

Proposición 1.3.21. *Sean X, Y variedades algebraicas y $A \subset X$, $B \subset Y$ dos subconjuntos no vacíos. Entonces $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.*

Demostración. Como $\overline{A} \times \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \times B$, la inclusión $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$ es inmediata. Para demostrar la igualdad lo que queremos probar es que el conjunto $A \times B$ es denso en $\overline{A} \times \overline{B}$. Para esto sea $U \subset \overline{A} \times \overline{B}$ un abierto no vacío. Como la proyección en la primera coordenada $p_1 \colon \overline{A} \times \overline{B} \to \overline{A}$ es abierta, se tiene que $p_1(U) \subset \overline{A}$ es un abierto no vacío de $\overline{A}$, por lo que $p_1(U) \cap A \neq \varnothing$. Sea $a \in p_1(U) \cap A$ y consideremos la variedad cerrada $B_a = \{a\} \times \overline{B}$. Ahora consideramos el abierto no vacío $U_a = B_a \cap U$ de B_a y la proyección en la segunda componente $p_2 \colon B_a \to \overline{B}$, como esta es abierta, se tiene que $p_2(U_a)$ es un abierto no vacío de $\overline{B}$, por lo tanto $\overline{B} \cap p_2(U_a) \neq \varnothing$. Entonces existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in U_a$, es decir $(a, b) \in (A \times B) \cap U$ y por lo tanto la intersección es no vacía. □

En la siguiente observación vemos cómo un conjunto cerrado de una variedad algebraica puede verse él mismo como una variedad algebraica, lo que será una subvariedad cerrada.

Observación 1.3.22. Sea X una variedad algebraica. Si $Y \subset X$ es un conjunto cerrado de X, siendo un espacio topológico con la topolgía relativa, puede verse como una *subvariedad algebraica* de X, en el sentido de que Y sea una variedad algebraica de tal forma que el mapa inclusión $\iota \colon Y \hookrightarrow X$ es un morfismo de variedades algebraicas. El haz de $\Bbbk$-álgebras que consideramos en Y, que cumple estas condiciones, es el haz de funciones $\mathcal{O}_Y$ definido de la siguiente manera: si $V \subset Y$ es un abierto, $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ si y sólo si para todo $x \in V$ existe $g \in \mathcal{O}_X(U_x)$, con $x \in U_x \subset X$ abierto tal que $f|_{U_x \cap V} = g|_{U_x \cap V}$. (Ver [2, Lema 1.4.42]).

1.4. Dimensión

En esta sección repasamos el concepto de *dimensión*. Hablaremos de la dimensión de un espacio topológico, de un anillo, de una variedad algebraica y de cómo se relacionan entre sí. Cuando se trabaja con espacios vectoriales o variedades diferenciables es común usar argumentos de dimensión de los espacios para sacar conclusiones. De igual modo en variedades algebraicas puede usarse este tipo de argumentos. Un resultado muy útil en este sentido es que la dimensión de un cerrado propio de una variedad *irreducible* es estrictamente menor que la dimensión de la variedad.

Definición 1.4.1. Decimos que un espacio topológico X es *irreducible* si es no vacío y no se puede escribir como unión de dos cerrados propios, es decir, si $X = A \cup B$, con $A \subset X$ y $B \subset X$ cerrados, entonces $A = X$ o bien $B = X$. Cuando decimos que un subconjunto $Y \subset X$ es *irreducible* siempre consideramos a Y con la topología relativa.

Observación 1.4.2. *1.* Un conjunto algebraico X es un espacio topológico irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo ([2, Teorema 1.3.20]). Por ejemplo, $\mathcal{V}(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$ es irreducible pero $\mathcal{V}(xy) \subset \mathbb{A}^2$ no es irreducible, en efecto $\mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$.

2. Un espacio topológico es irreducible si y sólo si todo abierto no vacío es denso; equivalentemente, X es irreducible si y sólo si dados dos abiertos U y V no vacíos de X se tiene que $U \cap V \neq \varnothing$.

3. Es importante mencionar lo siguiente: cuando tenemos un par de subconjuntos $Y, Z \subset X$ de un espacio topológico X, tal que $Y \subset Z \subset X$, si Z también tiene la topología relativa heredada de X, entonces Y será o no irreducible independientemente de si lo vemos como subconjunto de X o de Z.

Definición 1.4.3. Sea X un espacio topológico, consideramos todas las cadenas finitas de cerrados irreducibles en X:

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_p,$$

la *longitud* de dicha cadena es p, con $p \geq 0$ (un entero no negativo). Definimos la *dimensión* de X, y la denotamos por $\dim(X)$, como el supremo de las longitudes de todas las cadenas de ese tipo. Es decir que la dimensión de X es el supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles; este supremo podría ser infinito.

En el caso de ser X una variedad algebraica, la dimensión de X se define como la dimensión del espacio topológico subyacente; veremos en esta sección que en este caso $\dim(X) < \infty$.

Definición 1.4.4. Diremos que un espacio topológico es *noetheriano* si toda cadena ascendente de abiertos:

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_i \subseteq \cdots,$$

estabiliza, es decir que existe n tal que $U_i = U_n$ para todo $i \geq n$.

Ejemplo 1.4.5. El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es noetheriano: si tenemos una cadena ascendente de abiertos $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_i \subseteq \cdots$, tomando complementos obtenemos una cadena descendente de cerrados: $U_1^c \supseteq U_2^c \supseteq \cdots \supseteq U_i^c \supseteq \cdots$, lo que nos da una cadena ascendente de ideales en $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$

$$\mathcal{I}(U_1^c) \subseteq \mathcal{I}(U_2^c) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}(U_i^c) \subseteq \cdots ;$$

como $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano [1, Teorema 7.5.], existe r tal que $\mathcal{I}(U_i^c) = \mathcal{I}(U_r^c)$ para todo $i \geq r$. Dado que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(U_i^c)) = U_i^c$ para todo i, tenemos que $U_i^c = U_r^c$ para todo $i \geq r$, de lo que se concluye que la cadena descendente de cerrados estabiliza y por lo tanto la cadena ascendente de abiertos estabiliza.

Observación 1.4.6. *1.* Todo espacio topológico noetheriano X puede descomponerse de manera única como una unión finita $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ de subconjuntos cerrados irreducibles X_i, de tal manera que $X_i \nsubseteq X_j$ para todo $i \neq j$. Cada X_i es llamada una *componente irreducible* de X (ver [10, Proposición 1.5]).

2. Si X es un espacio topológico noetheriano, la dimensión de X es igual al máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles. Esto es claro ya que si descomponemos $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$ como unión de sus componentes irreducibles sabemos que $X_i \nsubseteq X_j$ para cada $i \neq j$; y si $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_p$ es una cadena de cerrados irreducibles en X entonces hay una componente irreducible de X que contiene a Y_p y por lo tanto a cada Y_i, eso implica $\dim(X) \leq \dim(X_j)$ para algún j. La desigualdad $\dim(X_i) \leq \dim(X)$ para cada i es inmediata.

Proposición 1.4.7. *Sea X un espacio topológico noetheriano que puede ser cubierto por una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces* $\dim(X) = \sup\limits_{i \in I} \dim(U_i)$.

Demostración. Sea $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r$ una cadena de cerrados irreducibles de X, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $X_1 \cap U_{i_0} \neq \varnothing$. Probaremos que

$$(X_1 \cap U_{i_0}) \subsetneq (X_2 \cap U_{i_0}) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_r \cap U_{i_0})$$

es una cadena de cerrados irreducibles de U_{i_0} y por lo tanto tendremos que $\sup\limits_{i \in I} \dim U_i \geq \dim X$ porque dada una cadena de cerrados irreducibles de X siempre existe algún U_i que contiene una cadena de cerrados irreducibles de la misma longitud. Como X_j es cerrado de X para cada j, $X_j \cap U_{i_0}$ es un cerrado no vacío de U_{i_0}, además $X_j \cap U_{i_0}$ es un abierto de X_j y dado que X_j es irreducible, se tiene que $X_j \cap U_{i_0}$ es irreducible, porque un abierto de un irreducible es irreducible. Así que cada $X_j \cap U_{i_0}$ es un cerrado irreducible de U_{i_0}. Para probar que las inclusiones son estrictas, veamos primero que $\overline{X_j \cap U_{i_0}} = X_j$; en efecto, X_j es cerrado así que $\overline{X_j \cap U_{i_0}} \subset X_j$, si $\overline{X_j \cap U_{i_0}} \neq X_j$, se puede escribir:

$$X_j = \overline{X_j \cap U_{i_0}} \cup \left(X_j \setminus X_j \cap U_{i_0}\right)$$

pero X_j es irreducible y $X_j \setminus X_j \cap U_{i_0}$ es cerrado distinto de X_j, entonces $X_j = \overline{X_j \cap U_{i_0}}$.

Como $X_j \subsetneq X_{j+1}$ para todo $j = 1, \ldots, r-1$, se tiene

$$X_j \cap U_{i_0} \subset X_{j+1} \cap U_{i_0}$$

$$X_i = \overline{X_i \cap U_{i_0}} \subset \overline{X_{i+1} \cap U_{i_0}} = X_{j+1}$$

por lo tanto

$$X_j \cap U_{i_0} \subsetneq X_{j+1} \cap U_{i_0}.$$

Ahora tomemos un abierto $U \in \{U_i\}_{i \in I}$ y consideremos una cadena de cerrados irreducibles de U de longitud n:

$$Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n.$$

Cada Y_i es un cerrado de U, por lo tanto es la intersección de un cerrado de X con U:

$$Y_i = C_i \cap U$$

con C_i cerrado de X. Podemos suponer que C_i es irreducible, ya que si no lo es, como X es noetheriano, se puede escribir como una unión finita de sus componentes irreducibles:

$$C_i = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_s,$$

entonces $Y_i = C_i \cap U = (Z_1 \cap U) \cup (Z_2 \cap U) \cup \cdots \cup (Z_s \cap U)$ es irreducible y cada $Z_i \cap U$ es un cerrado de $C_i \cap U$, entonces $C_i \cap U = Z_j \cap U$ para algún j, con Z_j cerrado irreducible de C_i. Como C_i es cerrado de X, se tiene que Z_j también es cerrado de X. Por lo tanto suponemos que cada C_i es un cerrado irreducible de X. Además, como $C_i \cap U = Y_i \subsetneq Y_{i+1} = C_{i+1} \cap U$ para cada i, se tiene que $C_i \subsetneq C_{i+1}$ para cada i, luego tenemos una cadena de cerrados irreducibles de X de longitud n:

$$C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_n,$$

lo que implica que $\dim U \leq \dim X$, por lo tanto

$$\sup_{i \in I} \dim U_i \leq \dim X.$$

Así que $\dim X = \sup i \in I \dim U_i$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la dimensión de un espacio topológico no necesariamente es igual a la dimensión de un abierto (denso) aún siendo noetheriano.

Ejemplo 1.4.8. Sea $X = \{0, 1\}$ un conjunto con dos elementos y con la topología $\tau = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Es claro que $\dim\{0\} = 0$ y $\dim X = 1$ ya que $\{0\} \subset \{0, 1\}$ es una cadena de cerrados irreducibles. Además mencionamos aquí que la dimensión de un espacio topológico noetheriano no necesariamente es finita.

Lema 1.4.9. *Sea X un espacio topológico noetheriano, irreducible y de dimensión finita. Si $Y \subsetneq X$ es un cerrado propio, considerado con la topología relativa, entonces* $\dim(Y) < \dim(X)$.

Demostración. Podemos suponer que Y es irreducible ya que la dimensión es igual al máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles. Entonces cualquier cadena $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_r = Y$ de cerrados irreducibles de Y de longitud r se puede extender a una cadena de cerrados irreducibles de X de longitud $r+1$: $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_r = Y \subsetneq X$; como $\dim(X) < \infty$, se tiene que $\dim(Y) < \dim(X)$. □

1.4.1. Grado de trascendencia

En esta sección relacionamos la dimensión de una variedad irreducible con la dimensión de su álgebra asociada y con el grado de trascendencia de su *cuerpo de funciones racionales*. Muchos autores definen la dimensión de una variedad empezando por este camino, recordar que nosotros la definimos como la dimensión del espacio topológico subyacente.

En esta sección no nos detendremos en la mayoría de las pruebas de los resultados que son puramente algebraicos, las referencias principales son [1], [6], [7] y [12].

Definición 1.4.10. Consideremos la extensión de cuerpos $\Bbbk \subset \mathbb{F}$. Decimos que los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{F}$ son *algebraicamente independientes* sobre $\Bbbk$ si el mapa evaluación $\epsilon_a : \Bbbk[x_1, \ldots, x_r] \to \Bbbk$ es inyectivo, donde $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{F}^r$. En otro caso decimos que son *dependientes*.

En otras palabras, si $a_1, \ldots, a_r$ son elementos de $\mathbb{F}$ dependientes sobre $\Bbbk$ entonces existe un polinomio no nulo en r variables $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_r]$ tal que $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$.

Un subconjunto infinito $A \subset \mathbb{F}$ es *algebraicamente independiente* (sobre $\Bbbk$) si todo subconjunto finito de A es algebraicamente independiente; en otro caso se dice que es algebraicamente dependiente.

Definición 1.4.11. Sea $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ una extensión de cuerpos. Una *base de trascendencia* para $\mathbb{F}$ sobre $\Bbbk$ es un conjunto $A \subset \mathbb{F}$ algebraicamente independiente sobre $\Bbbk$ tal que $\mathbb{F}$ es algebraico sobre $\Bbbk(A)$, donde $\Bbbk(A)$ es el menor subcuerpo de $\mathbb{F}$ que contiene a $\Bbbk$ y al conjunto A.

Recordemos algunas de las propiedades básicas de las bases de trascendencia y la definición de grado de trascendencia (ver [7, Capítulo 9]).

Observación 1.4.12. Si existe un conjunto finito $A \subset \mathbb{F}$ tal que $\mathbb{F}$ es algebraico sobre $\Bbbk(A)$, entonces:

1. todo subconjunto algebraicamente independiente maximal de $\mathbb{F}$ es base de trascendencia de $\mathbb{F}$ sobre $\Bbbk$.

2. todo subconjunto $B \subset \mathbb{F}$ minimal entre aquellos donde $\mathbb{F}$ es algebraico sobre $\Bbbk(B)$ es una base de trascendencia.

3. toda base de trascendencia de $\mathbb{F}$ sobre $\Bbbk$ tiene el mismo número de elementos que A, a ese número lo llamamos *grado de trascendencia* y lo denotamos por $\deg_{\Bbbk}(\mathbb{F})$.

Lema 1.4.13. *Si $K \subset L \subset F$ es una cadena de extensiones de cuerpos, entonces vale la igualdad:*

$$\deg_K(F) = \deg_K(L) + \deg_L(F).$$

Mas aún, si A es base de trascendencia de L sobre K y B es base de trascendencia de F sobre L entonces $A \cup B$ es base de trascendencia de F sobre K.

Demostración. Ver [12, Capítulo VI, Teorema 1.11] □

Definición 1.4.14 (Dimensión de un anillo)**.** Sea A un anillo y

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$$

una cadena finita de ideales primos de A. Decimos que la *longitud* (o altura) de una tal cadena es d; llamamos *dimensión* de A y lo denotamos por $\dim(A)$, al supremo de las longitudes de esas cadenas, que eventualmente podría ser infinito. Esta es la llamada dimensión de Krull, debida al matemático alemán Wolfgang Krull.

Como ejemplo consideremos el anillo de polinomios $\Bbbk[x]$ en una variable. Como es un dominio de ideales principales, todo ideal es de la forma $I = \langle f \rangle$ con $f \in \Bbbk[x]$; además $I \neq \{0\}$ es un ideal primo si y sólo si f es primo, por lo que si $\langle f \rangle \subsetneq \langle g \rangle$ y f es primo necesariamente g es invertible y $\langle g \rangle = \Bbbk[x]$; en el caso de ser g primo y cumplirse esa inclusión, se tiene que necesariamente $f = 0$. La conclusión es que todas las cadenas maximales de ideales primos constan de dos elementos:

$$\{0\} \subsetneq \langle f \rangle$$

con f primo. La altura de esas cadenas es 1, por lo que

$$\dim(\Bbbk[x]) = 1.$$

Tener en cuenta que como $\Bbbk[x]$ es un dominio de integridad, el ideal $\{0\}$ es primo. Si A no es un dominio, el cero no es un ideal primo.

Los siguientes resultados nos permiten relacionar la dimensión de una variedad afín irreducible con el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones del álgebra asociada.

Teorema 1.4.15. *Sea A una k-álgebra finitamente generada sin divisores de cero. Si denotamos por $[A]$ al cuerpo de fracciones de A, entonces:*

$$\deg_k\big([A]\big) = \dim(A).$$

Demostración. Ver [6, Cor. 2.56]. □

Observación 1.4.16. Si X una variedad afín irreducible, entonces su $\Bbbk$-álgebra asociada es un dominio de integridad ya que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo (observación 1.4.2) y $\Bbbk[X] \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \big/ \mathcal{I}(X)$. Por el teorema 1.4.15 tenemos que el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones de $\Bbbk[X]$ es igual a la dimensión del anillo $\Bbbk[X]$:

$$\deg_{\Bbbk}\left(\left[\Bbbk[X]\right]\right) = \dim(\Bbbk[X]).$$

Dado que existe una correspondencia entre los ideales primos de $\Bbbk[X]$ y los cerrados irreducibles de X de tal manera que una cadena de irreducibles se corresponde con una cadena de primos de la misma longitud y viceversa, tenemos que la dimensión de X es igual a la dimensión de su álgebra asociada:

$$\dim(X) = \dim(\Bbbk[X]),$$

entonces la dimensión de X es igual al grado de trascendencia del cuerpo de fracciones de $\Bbbk[X]$ sobre $\Bbbk$ y por lo tanto es finita:

$$\dim(X) = \deg_{\Bbbk}\left(\left[\Bbbk[X]\right]\right) < \infty.$$

En particular, si consideramos el espacio afín $\mathbb{A}^n$, su álgebra asociada es el anillo de polinomios con n indeterminadas $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, su cuerpo de fracciones lo denotamos por $\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)$ y es claro que $\deg_{\Bbbk}(\Bbbk(x_1, \ldots, x_n)) = n$, entonces $\dim \mathbb{A}^n = n$. Como cualquier prevariedad puede ser cubierta por una cantidad finita de abiertos afines tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.4.17. *Si X es una prevariedad algebraica, entonces*

$$\dim(X) < \infty.$$

Demostración. Sigue de la observación anterior y de la proposición 1.4.7. □

Los elementos del cuerpo de fracciones de una variedad afín X, pueden verse como funciones racionales, en el sentido de que si $f/g \in \left[\Bbbk[X]\right]$ se puede definir:

$$f/g\colon X_g \to \Bbbk$$

por $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dada la relación que hay entre la dimensión de X y el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones sobre $\Bbbk$, nos interesa extender la noción de función racional a una variedad algebraica. Definiremos el *cuerpo de funciones racionales* de una variedad irreducible; luego veremos que en el caso afín esta definición nos devuelve el cuerpo de fracciones del álgebra asociada. Concluiremos que la dimensión de una variedad algebraica irreducible es igual al grado de trascendencia del cuerpo de funciones racionales.

Definición 1.4.18. Sea X una variedad algebraica irreducible. Definimos el *cuerpo de funciones racionales* $\Bbbk(X)$ como el límite directo de la familia

$$\big(\mathcal{O}_X(U), \rho_{UV}\big)_{U,V\subset X\text{abiertos}},$$

donde los abiertos están ordenados por inclusión ($U \leq V$ si y sólo si $U \supset V$) y $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ es la restricción de funciones para cada par de abiertos $V \subset U \subset X$. En otras palabras, $\Bbbk(X)$ son clases de equivalencia de funciones regulares de tal manera que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ es equivalente a $g \in \mathcal{O}_X(V)$ si y sólo si existe un abierto no vacío $W \in U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$. Observamos que como X es irreducible, el abierto W es denso, por lo que f y g coinciden en todo $U \cap V$.

Observación 1.4.19. Es claro que si X es una variedad algebraica irreducible y $U \subset X$ es un abierto no vacío, este es denso e irreducible y se tiene que $\Bbbk(X) \cong \Bbbk(U)$, viendo a U como una subvariedad abierta de X.

Observación 1.4.20. El cuerpo de funciones racionales es, en efecto, un cuerpo: si $f \in \Bbbk(X)$ es no nulo, haciendo *abuso* de notación, existe $U \subset X$ un abierto no vacío tal que $f|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ es no nulo. Dado que X puede ser cubierto por abiertos afines podemos suponer que U es afín (más chico si es necesario). Consideramos el abierto afín:

$$U_f = \{x \in U \ / \ f|_U(x) \neq 0\} \subset U$$

y definimos $g = f|_{U_f} \in \mathcal{O}_X(U_f) = \mathcal{O}_U(U_f) \cong \Bbbk[U]_{f|_U}$; entonces $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{O}_X(U_f)$ es un representante del inverso de f.

La siguiente proposición nos da una caracterización más amigable del cuerpo de funciones racionales. De hecho, en [6] se define este cuerpo como el cuerpo de fracciones de un abierto afín cualquiera de la variedad y se prueba que no depende del abierto elegido.

Proposición 1.4.21. *Sea X una variedad algebraica irreducible. Si $V \subset X$ es un abierto afín, entonces $\Bbbk(X) \cong \big[\Bbbk[V]\big]$. En particular, si X es afín, tenemos $\Bbbk(X) \cong \big[\Bbbk[X]\big]$.*

Demostración. Vamos a definir, para cada abierto $U \subset X$ no vacío, un mapa

$$\alpha_U : \mathcal{O}_X(U) \to \big[\Bbbk[V]\big].$$

Como X es irreducible, el abierto $U \cap V$ es denso X y la restricción

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U \cap V) = \mathcal{O}_V(U \cap V)$$

es inyectiva. Si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, se tiene que $f|_{U\cap V} \in \mathcal{O}_V(U\cap V)$ y existen $g, h \in \Bbbk[V]$ tal que $f|_{V_h} = \dfrac{g}{h}\Big|_{V_h}$, con $V_h \subset U \cap V$ abierto básico. Definimos:

$$\alpha_U(f) = \frac{g}{h} \in \big[\Bbbk[V]\big].$$

La definición de α_U no depende de g y h; en efecto, si $g', h' \in \Bbbk[V]$ son tales que

$$f|_{V_{h'}} = \frac{g'}{h'}\Big|_{V_{h'}}$$

entonces, tomando $W = V_h \cap V_{h'} \neq \varnothing$ (porque X es irreducible), tenemos que

$$\frac{g}{h}\Big|_W = \frac{g'}{h'}\Big|_W,$$

entonces $(gh' - g'h)|_W = 0$. Como W es un abierto no vacío, es denso en V, por lo que $gh' - g'h = 0$ en V (por continuidad de las funciones regulares), así que $\dfrac{g}{h} = \dfrac{g'}{h'}$ en $\big[\Bbbk[V]\big]$. Es claro que α_U es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras para cada abierto $U \subset X$ y si $U' \subset U \subset X$ son abiertos, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_{UU'}"'] & \big[\Bbbk[V]\big] \\ \mathcal{O}_X(U') \arrow[ur, "\alpha_{U'}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, la unión de los conjuntos $\alpha_U(\mathcal{O}_X(U))$, para $U \subset X$ abierto, es igual al cuerpo de fracciones de $\Bbbk[V]$ ya que si $\dfrac{g}{h} \in \big[\Bbbk[V]\big]$ este es la imagen por α_{X_h} de la función regular $\dfrac{g}{h}\Big|_{X_h} \in \mathcal{O}_X(X_h)$. Por último, si $\alpha_U(f) = 0$ para algún $f \in \mathcal{O}_X(U)$, existen $g, h \in \Bbbk[V]$ tal que $g/h|_{X_h} = f|_{X_h} = 0$, por lo que $\rho_{UX_h}(f) = 0$. Luego, el cuerpo de fracciones de $\Bbbk[V]$ es el límite directo de $\big(\mathcal{O}_X(U), \rho_{UU'}\big)$, es decir el cuerpo de funciones racionales de X. $\square$

Observación 1.4.22. Sea X es una variedad algebraica irreducible y $U \subset X$ es un abierto afín. Si $X = \bigcup_{i=1}^r V_i$ es un cubrimiento finito por abiertos afines de X, entonces $\dim X = \sup_i \dim V_i$ (proposición 1.4.7). Como el cubrimiento es finito, existe i_0 tal que $\dim X = \dim V_{i_0}$, entonces

$$\dim X = \dim V_{i_0} = \deg_{\Bbbk}\left(\big[\Bbbk[V_{i_0}]\big]\right) = \deg_{\Bbbk}(\Bbbk(X)) = \deg_{\Bbbk}\left(\big[\Bbbk[U]\big]\right) = \dim U.$$

Observación 1.4.23. [6, Proposición 5.35.]. Si X e Y son dos variedades algebraicas irreducibles entonces

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Se puede suponer que X e Y son afines y la prueba consiste en tomar una base de trascendencia $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \Bbbk[X]$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \Bbbk[Y]$ de $\Bbbk(X)$ y $\Bbbk(Y)$ respectivamente (sobre $\Bbbk$) y ver que $\{x_i \otimes 1, 1 \otimes y_j : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ es una base de trascendencia de $\Bbbk(X \times Y) = \big[\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]\big]$ sobre $\Bbbk$.

Capítulo 2

Resultados centrales sobre morfismos

En este capítulo presentaremos los teoremas referentes a morfismos de variedades que necesitaremos para el resto de la monografía. Los teoremas centrales son el teorema de Chevalley (teorema 2.2.1) y el teorema sobre la dimensión de las fibras de un morfismo (teorema 2.2.9). Enunciamos también una versión del teorema principal de Zariski (corolario 2.3.11).

2.1. Definiciones básicas y resultados preliminares

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico, decimos que $Y \subset X$ es *localmente cerrado* si es la intersección de un conjunto cerrado con uno abierto, es decir $Y = A \cap B$ donde $A \subset X$ es abierto y $B \subset X$ es cerrado.

Decimos que Y es *constructible* si es unión finita de conjuntos localmente cerrados.

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $Y \subset X$ es localmente cerrado si y sólo si es abierto en $\overline{Y}$.*

Demostración. Sea $Y = A \cap B$ con A abierto y B cerrado; es claro que $Y \subset A \cap \overline{Y}$. Como $Y \subset B$ con B cerrado e $\overline{Y}$ es el menor cerrado que contiene a Y, se tiene que $\overline{Y} \subset B$, entones $Y = A \cap \overline{Y}$. Por lo tanto Y es un abierto de $\overline{Y}$.

En el otro sentido, si Y es abierto en $\overline{Y}$ entonces existe A abierto de X tal que $Y = A \cap \overline{Y}$, y como $\overline{Y}$ es cerrado se tiene que Y es localmente cerrado. $\square$

Proposición 2.1.3. *Sean X un espacio topológico noetheriano e $Y \subset X$ un conjunto constructible en X. Entonces existe $U \subset Y \subset \overline{Y}$ tal que U es un abierto denso de $\overline{Y}$.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ donde cada Y_i es localmente cerrado. Como la unión es finita se tiene que $\overline{Y} = \bigcup_i \overline{Y_i}$. En el caso de ser Y un conjunto irreducible se tiene que $\overline{Y}$ es irreducible, entonces $\overline{Y_i} = \overline{Y}$ para algún i. Como Y_i es localmente cerrado, es abierto en su clausura. Entonces $Y_i \subset Y$ es un abierto y denso de $\overline{Y}$.

Si Y se descompone como unión de cerrados irreducibles, $Y = \bigcup_{j=1}^{m} C_j$. Cada C_j es cerrado en Y, es decir que existen B_j cerrados en X tal que $C_j = Y \cap B_j = (\bigcup_{i=1}^{n} Y_i) \cap B_j = \bigcup_i (Y_i \cap B_j)$ que es constructible en X porque cada $Y_i \cap B_j$ es localmente cerrado. Por lo tanto tenemos que los C_j son constructibles en X e irreducibles, entonces por lo anterior se tiene que cada C_j contiene un abierto denso de su clausura, digamos $U_j \subset C_j \subset \overline{C_j}$. Por otro lado se tiene la igualdad $\overline{Y} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{C_j}$ y se puede probar fácilmente que los $\overline{C_j}$ son las componentes irreducibles de $\overline{Y}$; si para cada j consideramos el conjunto $C'_j = \overline{Y} \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \overline{C_i}\right) = \overline{C_j} \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \overline{C_i}\right)$ este es un abierto no vacío de $\overline{Y}$ contenido en $\overline{C_j}$, por lo que $U_j \cap C'_j$ es un abierto de $\overline{Y}$ que es denso en $\overline{C_j}$. Entonces $U = \bigcup_j \left(U_j \cap C'_j\right)$ es un abierto denso de $\overline{Y}$ contenido en Y. $\square$

Observación 2.1.4. No es válido el recíproco de la proposición anterior, es decir, si Y contiene un abierto denso de su clausura no necesariamente es constructible. Como ejemplo consideremos el espacio afín $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ y el cerrado $V = V(xy - 1) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : ab - 1 = 0\}$ la hipérbola, el abierto $U = \mathbb{C}^2 \setminus V$ y el conjunto $Y = U \cup C$, donde $C = \{\left(n, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{C}^2 : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito de puntos de la hipérbola (observar que C no es un conjunto cerrado). Entonces Y es un conjunto irreducible que claramente no es constructible, pero $U \subset Y$ es un abierto denso de $\overline{Y} = \mathbb{C}^2$.

Definición 2.1.5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades. Decimos que f es *dominante* si $\overline{f(X)} = Y$ y si para cada componente irreducible X_i de X se cumple que $\overline{f(X_i)}$ es una componente irreducible de Y.

Lema 2.1.6. *Si X e Y son variedades afines irreducibles, entonces un morfismo $f : X \to Y$ es dominante si y sólo si $f^{\#} : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ es inyectivo.*

Demostración. Sea f dominante y $\alpha \in \Bbbk[Y]$ tal que $f^{\#}(\alpha) = \alpha \circ f = 0 \in \Bbbk[X]$. Entonces α se anula en la imagen de f que es densa en Y, por lo tanto se anula en Y (por continuidad de las funciones regulares, ya que $\alpha^{-1}(0)$ es cerrado y contiene a $f(X)$, $Y = \overline{f(X)} \subset \overline{\alpha^{-1}(0)} = \alpha^{-1}(0)$). Así se tiene que α debe ser $0 \in \Bbbk[Y]$, luego $f^{\#}$ es inyectiva.

En el otro sentido, sea $f^{\#}$ inyectiva y supongamos por absurdo que $f(X)$ no es denso en Y, entonces existe $y \in Y \setminus \overline{f(X)}$ y $\alpha \in \Bbbk[Y]$ tal que $\alpha(y) \neq 0$ y $\alpha|_{\overline{f(X)}} \equiv 0$ (observación 1.2.24 item 4) luego $f^{\#}(\alpha) = \alpha \circ f = 0$ contradiciendo que $f^{\#}$ es inyectivo. $\square$

Lema 2.1.7. *Sean X e Y variedades irreducibles. Si $f : X \to Y$ es un morfismo dominante, entonces* $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

Demostración. Sea $V \subset Y$ un abierto afín no vacío de Y. Como $f(X)$ es denso en Y, entonces $V \cap f(X) \neq \varnothing$ y por lo tanto $f^{-1}(V) \subset X$ es un abierto no vacío. Sean $\mathcal{O}_X$ el haz de X y $\mathcal{O}_Y$ el haz de Y. Como f es un morfismo, tenemos el morfismo de haces $f^{\#}\colon \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ que nos da un morfismo de álgebras $f_V^{\#} : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$. El cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_Y(V)$ es $\Bbbk(Y)$ y el de $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ es $\Bbbk(X)$. El morfismo $f_V^{\#}$ induce un morfismo en el cuerpo de fracciones $\Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$ (de forma canónica, [1, Proposición 3.1]) y como todo morfismo de cuerpos es inyectivo tenemos la extensión

$$\Bbbk \subset \Bbbk(Y) \subset \Bbbk(X),$$

entonces $\deg_{\Bbbk}(\Bbbk(Y)) \leq \deg_{\Bbbk}(\Bbbk(X))$, por lo que $\dim(Y) \leq \dim(X)$. □

2.2. Teorema de Chevalley

Teorema 2.2.1 (Chevalley)**.** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre las variedades X e Y. Entonces existe un abierto y denso U de $\overline{f(X)}$ tal que $U \subset f(X)$.*

Demostración. Ya que el teorema es sobre la imagen de f podemos suponer que f es dominante. Además podemos suponer que X es irreducible y por lo tanto Y también lo será. Cuando X no es irreducible basta con aplicar el teorema a cada componente irreducible.

Primero probaremos el teorema para el caso en que X e Y son afines. Por la observación 1.2.41 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "E_X"'] & Y \arrow[d, "E_Y"] \\ \operatorname{Spm}(\Bbbk[X]) \arrow[r, "f^{\#^*}"'] & \operatorname{Spm}(\Bbbk[Y]) \end{tikzcd}$$

donde E_X y E_Y son homeomorfismos. Así que es suficiente probar la existencia de un abierto V de $\operatorname{Spm}(\Bbbk[Y])$ tal que $V \subset f^{\#^*}(\operatorname{Spm}(\Bbbk[X]))$, luego $U = E_Y^{-1}(V)$. Queremos probar la existencia de un elemento $g \in \Bbbk[Y]$ tal que

$$V = \operatorname{Spm}(\Bbbk[Y])_g \subset f^{\#^*}\big(\operatorname{Spm}(\Bbbk[X])\big) = \big\{ f^{\#^{-1}}(N) \;/\; N \in \operatorname{Spm}(\Bbbk[X]) \big\}.$$

Equivalentemente queremos probar la existencia de un elemento $g \in \Bbbk[Y]$ de tal manera que si M es un ideal maximal de $\Bbbk[Y]$ con $g \notin M$ entonces existe un ideal maximal $N \subset \Bbbk[X]$ tal que $M = f^{\#^{-1}}(N)$, es decir $f^{\#}(M) \subset N$ (recordar que $f^{\#^{-1}}(N)$ es maximal, lema 1.1.34).

Si M es un ideal maximal de $\Bbbk[Y]$, su imagen $f^{\#}(M)$ es un ideal maximal de $f^{\#}(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$. Entonces existe $\alpha : f^{\#}(\Bbbk[Y]) \to \Bbbk$ tal que $f^{\#}(M) = \ker(\alpha)$ (recordar que todo ideal maximal es de esta forma para una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada, donde $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado).

Por el lema 1.1.20, existe $u \in f^{\#}(\Bbbk[Y]) \subset \Bbbk[X]$ tal que todo morfismo $\alpha\colon f^{\#}(\Bbbk[Y]) \to \Bbbk$ con $\alpha(u) \neq 0$ se puede extender a un morfismo $\tilde{\alpha}\colon \Bbbk[X] \to \Bbbk$, por lo que

$$\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha}) \cap f^{\#}(\Bbbk[Y]),$$

además $\ker(\tilde{\alpha})$ es un ideal maximal de $\Bbbk[X]$.

Como f es dominante, $f^{\#} : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ es inyectivo, así que es suficiente tomar $g \in \Bbbk[Y]$ tal que $f^{\#}(g) = u$, ya que para todo ideal maximal $M \subset \Bbbk[Y]$ tal que $g \notin M$, se tiene que $u = f^{\#}(g) \notin f^{\#}(M) = \ker(\alpha)$, para algún morfismo $\alpha : f^{\#}(\Bbbk[Y]) \to \Bbbk$, por lo que $\alpha(u) \neq 0$. Entonces existe un ideal maximal N de $\Bbbk[X]$ tal que

$$f^{\#}(M) = N \cap f^{\#}(\Bbbk[Y]),$$

así que $f^{\#}(M) \subset N$ como queríamos probar.

Cuando X e Y no son afines, consideramos un cubrimiento por afines de Y:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{r} V_i.$$

Mediante la observación 1.3.17 existe un cubrimiento finito por abiertos afines de X:

$$X = \bigcup_{j=1}^{s} U_j$$

de tal manera que para j existe i (que depende de j) tal que $f(U_j) \subset V_i$. Como $f(X) = \bigcup_j f(U_j)$, se tiene que

$$Y = \overline{f(X)} = \bigcup_j \overline{f(U_j)},$$

pero como Y es irreducible, existe j_0 tal que $Y = \overline{f(U_{j_0})}$. Por otro lado existe i_0 tal que $f(U_{j_0}) \subset V_{i_0}$. Tenemos el morfismo $f|_{U_{j_0}} : U_{j_0} \to V_{i_0}$ entre variedades afines, entonces existe $U \subset f(U_{j_0})$ tal que U es abierto de $\overline{f(U_{j_0})}^{V_{i_0}}$, donde $\overline{}^{V_{i_0}}$ representa la clausura en V_{i_0}, pero como V_{i_0} es un abierto de Y se tiene que U es un abierto de $\overline{f(U_{j_0})} = Y$. Así que U es un abierto de Y contenido en $f(U_{j_0}) \subset f(X)$. $\square$

Corolario 2.2.2. *La imagen de un morfismo entre variedades algebraicas es un conjunto constructible.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades algebraicas, entonces por el teorema anterior podemos encontrar un abierto U de $\overline{f(X)}$ contenido en $f(X)$ y podemos escribir

$$f(X) = U \cup f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right)$$

Como U es abierto en $\overline{f(X)}$ es la intersección de un abierto de Y con el cerrado $\overline{f(X)}$ entonces U es localmente cerrado en Y. Resta probar que $f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right)$ es unión finita de conjuntos localmente cerrados.

Como f es continua y U es un abierto no vacío de $\overline{f(X)}$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de X, luego $X \setminus f^{-1}(U)$ es un cerrado propio de X. Entonces:

$$\dim\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) < \dim(X)$$

Razonando por inducción en la dimensión de X, si $\dim(X) = 0$ entonces X es una colección finita de puntos y por lo tanto también lo es $f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right)$, así que es localmente cerrado.

Ahora sea $\dim(X) = n+1$ y supongamos válido el teorema para $\dim(X) \leq n$. Como $\dim\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) < \dim(X) = n+1$, entonces $\dim\left(X \setminus f^{-1}(U)\right) \leq n$, por hipótesis de inducción se tiene que $f\left(X \setminus f^{-1}(U)\right)$ es constructible en Y. □

Definición 2.2.3. Un morfismo $f\colon X \to Y$ entre variedades algebraicas es *afín* si existe un cubrimiento por afines U_i de Y tal que $f^{-1}(U_i) = V_i$ es afín. Diremos que el morfismo es *finito* si además cada $\Bbbk[V_i]$ es un $\Bbbk[U_i]$-módulo finitamente generado.

Nos interesa presentar una prueba del teorema de Chevalley (2.2.9) sobre la dimensión de las fibras de un morfismo (la dimensión de la preimagen de un punto), este es un teorema central para esta monografía. Para la prueba seguimos principalmente las ideas de [2] y necesitamos una serie de lemas previos (lemas 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7 y corolario 2.2.8) que presentamos a continuación. Dado que son resultados meramente técnicos remitimos las pruebas a las referencias.

Lema 2.2.4. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito y sobreyectivo entre variedades algebraicas. Entonces $\dim f^{-1}(Z) = \dim Z$ para toda subvariedad cerrada $Z \subset Y$.*

Demostración. [2, Lema 2.2.24]. □

Lema 2.2.5. *Sean X e Y dos variedades afines irreducibles y $f : X \to Y$ un morfismo dominante. Entonces existe un abierto $U \subset Y$ no vacío tal que la función $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ se puede factorizar de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^r \times U \arrow[d, "p_2"] \\ & U \end{tikzcd}$$

donde g es un morfismo finito y sobreyectivo, p_2 es la proyección en la segunda coordenada, $r = \dim X - \dim Y$ y el diagrama de arriba conmuta: $f|_{f^{-1}(U)} = p_2 \circ g$.

Demostración. [2, Lema 1.5.2] □

Definición 2.2.6. Sea X una variedad irreducible e $Y \subset X$ una subvariedad. Definimos la *codimensión* de Y como $\operatorname{codim}(Y) = \dim X - \dim Y$.

Lema 2.2.7. *Sea X una variedad afín.*

1. *Si $f \in \Bbbk[X]$ es no constante, entonces las componentes irreducibles de $\mathcal{V}(f)$ tienen codimensión uno.*

2. *Si $Y \subset X$ una subvariedad irreducible de codimensión $m \geq 1$, entonces existen $f_1, \ldots, f_m \in \Bbbk[X]$ tal que Y es una componente irreducible de $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$.*

Demostración. Ver [8, X.1.5 y X.1.9]. □

Corolario 2.2.8. *Sea X una variedad afín y $f_1, \cdots, f_m \in \Bbbk[X]$, entonces, si Z es una componente irreducible de $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$, se tiene que*

$$\dim X - \dim Z \leq m$$

Demostración. Ver [8, X.1.7]. □

Teorema 2.2.9. *Sean X, Y variedades irreducibles y $f : X \to Y$ un morfismo dominante. Si $y \in f(X)$, entonces:*

1. *Para cada componente irreducible Z de $f^{-1}(y)$ se tiene que $\dim(Z) \geq \dim(X) - \dim(Y)$.*

2. *Existe U abierto no vacío de Y contenido en $f(X)$ tal que para todo $y \in U$ y para toda componente irreducible Z de $f^{-1}(y)$ se cumple que $\dim(Z) = \dim(X) - \dim(Y)$.*

3. *La función $x \mapsto \dim f^{-1}(f(x))$ es semi-continua superiormente, es decir que el conjunto $\{x \in X \ / \ \dim f^{-1}(f(x)) \geq n\}$ es cerrado $\forall\ n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.*

Demostración.

1. Si $\dim Y = 0$ entonces $Y = \{y\}$ es un punto porque es irreducible y por lo tanto $f^{-1}(y) = X$, así que no hay nada que probar en este caso. Consideremos ahora que $\dim Y > 0$. Podemos suponer que X, Y son afines, ya que si $y \in Y$ podemos tomar un abierto afín $V \subset Y$ (que será irreducible) con $y \in V$ y un abierto afín $W \subset X$ (también irreducible) tal que $f(W) \subset V$ (observación 1.3.17.*2*), de tal modo que $f|_W : W \to V$ es un morfismo de afines donde $Z \cap W$ es una componente irreducible $f^{-1}(y) \cap W = (f|_W)^{-1}(y)$. Además, como $Z \cap W$ es un abierto de Z, se tiene que $\dim Z = \dim(Z \cap W)$ (proposición 1.4.7). También tenemos que $\dim Y = \dim V$, $\dim X = \dim W$ y $f|_W$ es dominante porque $f(X) = f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$ y entonces $Y = \overline{f(W)}$, por lo que $\overline{f(W)}^V = \overline{f(W)} \cap V = V$.

Por lo tanto suponemos que Y es afín, al igual que X. Entonces por el lema 2.2.7 existen $m = \dim Y = \operatorname{codim}\{y\} \geq 0$ funciones regulares $f_1, \cdots, f_m \in \Bbbk[Y]$ tal que $\{y\}$ es una componente irreducible de $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$. Para cada $i = 1, \ldots, m$ consideremos las funciones regulares en X dadas por $g_i = f_i \circ f \in \Bbbk[X]$ (porque f es un morfismo). Si Z es una componente irreducible de $f^{-1}(y)$ entonces $Z \subset \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_m)$, pues

$$Z \subset f^{-1}(y) \Rightarrow f(Z) = y \Rightarrow g_i(Z) = f_i \circ f(Z) = f_i(y) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Sea Z_0 una componente irreducible de $\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_m)$ tal que $Z \subset Z_0$, entonces $f(Z_0)$ es irreducible y además $f_i\big(f(Z_0)\big) = g_i(Z_0) = 0$ para todo i, por lo que tenemos

$$y = f(Z) \subset f(Z_0) \subset \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$$

pero $\{y\}$ es una componente irreducible de $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$, entonces

$$f(Z) = f(Z_0) = \{y\},$$

por lo tanto $Z_0 \subset f^{-1}(y)$, entonces $Z = Z_0$. Es decir que Z es una componente irreducible de $\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_m)$, por el corolario 2.2.8 se tiene que

$$\dim X - \dim Z \leq m = \dim Y$$

entonces

$$\dim Z \geq \dim X - \dim Y.$$

2. Suponemos que X, Y son afines. Por el Lema 2.2.5 existe U abierto no vacío de Y y $g : f^{-1}(U) \to \mathbb{A}^r \times U$ un morfismo finito y sobreyectivo, donde $r = \dim X - \dim Y$, tal que $f|_{f^{-1}(U)} = p_2 \circ g$. Si $y \in U$ y Z es una componente irreducible de $f^{-1}(y)$, entonces, usando también el Lema 2.2.4 tenemos

$$\dim Z \leq \dim f^{-1}(y) = \dim g^{-1}(\mathbb{A}^r \times \{y\}) = \dim(\mathbb{A}^r \times \{y\}) = r$$

y de la parte anterior sabemos que

$$\dim Z \geq r$$

entonces $\dim Z = \dim X - \dim Y$. Además como g y p_2 son sobreyectivas $U = f(f^{-1}(U)) \subset f(X)$.

3. Sea $n \in \mathbb{Z}$, queremos ver que el conjunto

$$V_n = \{x \in X \ / \ \dim f^{-1}(f(x)) \geq n\}$$

es cerrado. Haremos la demostración por inducción en la dimensión de X. Si $\dim X = 0$, entonces no hay nada que probar dado que X es una colección finita de puntos; en este caso $V_n = \varnothing$ para todo $n > 0$ y $V_0 = X$.

Suponemos válida la tesis para dimensión del dominio de $f < \dim X$. Por la parte 1. tenemos que

$$\dim f^{-1}(f(x)) \geq \dim X - \dim Y = r \quad \forall\, x \in X$$

y si $r \geq n$ entonces $V_n = X$ y por lo tanto es cerrado. Si $r < n$ tomamos U abierto no vacío como en el item anterior, entonces

$$\dim f^{-1}(f(x)) = r < n \quad \forall\, x \in f^{-1}(U)$$

lo que implica que $V_n \subset X \setminus f^{-1}(U)$ pero $\dim X \setminus f^{-1}(U) < \dim X$, entonces por hipótesis de inducción, el conjunto V_n es cerrado.

□

2.3. Teorema principal de Zariski

Esta sección está dedicada a exponer brevemente las definiciones y resultados previos (que remitimos a las referencias) necesarias para entender los enunciados de unas de las versiones del teorema principal de Zariski (teorema 2.3.10 y corolario 2.3.11).

Definición 2.3.1. Sea A un anillo conmutativo que además es un dominio de integridad. Decimos que A es *integralmente cerrado* si es integralmente cerrado en el cuerpo de fracciones, es decir que *si* $b \in [A]$ es tal que existe un polinomio mónico $p \in A[x]$ con $p(b) = 0$ entonces $b \in A$ ([1, Capítulo 5]).

Ejemplo 2.3.2. El anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado; en efecto, por el teorema de la raíz racional, si $p/q \in \mathbb{Q}$ es raíz de un polinomio mónico (con p y q primos entre sí), entonces $q|1$, por lo que $p/q \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.3.3. Si consideramos el anillo de polinomios $\Bbbk[t]$ con la indeterminada t y el subanillo $\Bbbk[t^2, t^3] \subsetneq \Bbbk[t]$, entonces el cuerpo de fracciones de $\Bbbk[t^2, t^3]$ es $\left[\Bbbk[t^2, t^3]\right] = \Bbbk(t)$. La indeterminada $t \notin \Bbbk[t^2, t^3]$, pero si consideramos el polinomio mónico $p(x) = x^3 - t^2 x \in \Bbbk[t^2, t^3][x]$, se tiene que $p(t) = 0$, por lo que $\Bbbk[t^2, t^3]$ no es integralmente cerrado.

Definición 2.3.4. Sea X es una variedad algebraica irreducible. Decimos que un punto $x \in X$ es *normal* si existe un abierto afín $U \subset X$ con $x \in U$ tal que $\Bbbk[U]$ es integralmente cerrado, equivalentemente x es normal si $\mathcal{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado. Decimos que X es normal si todos sus puntos son normales.

Recordamos que si X es una variedad afín irreducible, el cuerpo de fracciones de $\Bbbk[X]$ es $\Bbbk(X)$. En este caso tenemos la siguiente proposición. ([2, Lema 1.4.106]).

Proposición 2.3.5. *Si X es una variedad afín e irreducible, entonces X es normal si y sólo si $\Bbbk[X]$ es integralmente cerrado.*

Ejemplo 2.3.6. La variedad $C = \mathcal{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ no es normal porque $\Bbbk[C] \cong \Bbbk[t^2, t^3]$ que no es integralmente cerrado.

Recordemos que si X, Y son variedades algebraicas irreducibles y $f\colon X \to Y$ es un morfismo dominante, entonces f induce un morfismo inyectivo en el cuerpo de funciones racionales $\tilde{f}^{\#}\colon \Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$ (ver el lema 2.1.7). En estas condiciones tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.7. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo dominante entre variedades irreducibles.

1. Decimos que f es *birracional* si el morfismo inducido $\tilde{f}^{\#}\colon \Bbbk(Y) \to \Bbbk(X)$ es un isomorfismo.
2. Decimos que f es *separable* si la extensión de cuerpos $\Bbbk(Y) \subset \Bbbk(X)$ es separable.

Recordamos que una extensión de cuerpos $K \subset F$ es *separable* si es una extensión algebraica tal que para todo elemento $a \in F$ existe un polinomio $p \in K[x]$ sin raíces múltiples (en una clausura algebraica de K) tal que $p(a) = 0$. Por ejemplo, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es separable: si $z \in \mathbb{C}$ este es raíz del polinomio $(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + |z|^2 \in \mathbb{R}[x]$ sin raíces múltiples. En realidad, en característica 0 todas las extensiones son separables; en efecto, si K es un cuerpo de característica 0 y $p \in K[x] \setminus K$ es un polinomio irreducible, entonces todas sus raíces son simples [7, proposición 2.12], lo que implica que si a pertenece a alguna extensión algebraica de K, su polinomio minimal en $K[x]$ se anula en a y no tiene raíces múltiples. Entonces cualquier extensión algebraica $K \subset F$ donde $\mathrm{Car}(K) = 0$ es separable.

Ejemplo 2.3.8. Como ejemplo de un morfismo birracional tenemos $f\colon \mathbb{A}^1 \to C$ (donde $C = \mathcal{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$) dado por $f(t) = (t^2, t^3)$. Como el cuerpo de fracciones de $\Bbbk[C]$ es isomorfo a $\Bbbk(t) = \Bbbk(\mathbb{A}^1)$, f es un morfismo birracional.

La siguiente proposición caracteriza en un sentido geométrico los morfismos birracionales ([13, 5.1.2]).

Proposición 2.3.9. *Un morfismo $f\colon X \to Y$ es birracional si y sólo si existe un abierto $U \subset X$ tal que $f(U) \subset Y$ es abierto de Y y $f|_U\colon U \to f(U)$ es un isomorfismo.*

Observar que un morfismo birracional no necesariamente es un isomorfismo (ejemplo 2.3.8, C no es normal). En este sentido tenemos el siguiente teorema y su corolario que son dos versiones del teorema principal de Zariski. No hablaremos de la versión original ni de otras versiones, para esto se puede consultar por ejemplo [6] o [13] entre otros.

Teorema 2.3.10. *Sean X e Y dos variedades irreducibles tal que Y es normal. Si $f : X \to Y$ un morfismo birracional y biyectivo, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. [6, Proposición 8.59]. □

Observar que el ejemplo 2.3.8 muestra que la hipótesis de normalidad es necesaria.

Corolario 2.3.11. *Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles tal que Y es normal, si $f : X \to Y$ un morfismo biyectivo y separable, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. [6, proposición 8.60]. □

Observación 2.3.12. Para nuestros fines será de particular interés el corolario 2.3.11, porque recordemos que nuestro cuerpo de base $\Bbbk$ en esta monografía es de característica 0, lo que implica que todo cuerpo de funciones racionales $\Bbbk(X)$ de una variedad irreducible es de característica 0 y por lo tanto todo morfismo dominante $f\colon X \to Y$ entre variedades irreducible es separable.

Para terminar con esta sección hablaremos de una clase particular de puntos de una variedad algebraica, los puntos *no-singulares* o *regulares*. Resultará que un grupo algebraico irreducible consiste sólo de puntos regulares, es decir que es una variedad *no-singular* o *regular*. Comenzamos recordando algunas definiciones sobre anillos locales.

Sea A un anillo local noetheriano y M su ideal maximal. El cociente $k := A/M$ es un cuerpo. Además M/M^2 es naturalmente un k-espacio vectorial: $(a + M)(m + M^2) = am + M^2 \in M/M^2$, con $a \in A$ y $m \in M$. Como A es noetheriano, M es un ideal finitamente generado por lo tanto es un A-módulo finitamente generado, lo que implica que $\dim_k \left(M/M^2\right) < \infty$. En general tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.13. *Sea A es un anillo local y noetheriano. Si M es su ideal maximal y $k = A/M$ su cuerpo residual, entonces*

$$\dim A \leq \dim_k(M/M^2).$$

Demostración. [1, corolario 11.15]. □

Definición 2.3.14. Sea A un anillo local y noetheriano. Si $\dim A = \dim_k(M/M^2)$ se dice que A es *regular*.

Recordamos que si $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica, la fibra en un punto $x \in X$, denotada por $\mathcal{O}_{X,x}$, es un anillo local, $m_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ es el ideal maximal y $k(x)$ el cuerpo residual.

Definición 2.3.15. Sea X una variedad algebraica. Decimos que un punto $x \in X$ es *no-singular, suave o regular* si la fibra $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular, es decir que $\dim_{k(x)}(m_x/m_x^2) = \dim \mathcal{O}_{X,x}$. Si todo punto de X es regular, decimos que X es regular.

Proposición 2.3.16. *Sea X es una variedad algebraica irreducible. Si $x \in X$ es un punto no-singular, entonces*

$$\dim_{k(x)}(m_x/m_x^2) = \dim X.$$

Demostración. Sea U un abierto afín de X tal que $x \in U$. Sabemos que $\dim X = \dim U$ (proposición 1.4.7) y que $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{U,x}$ porque uno puede considerar el límite directo $\varinjlim_{x\in V} \mathcal{O}_X(V)$ sólo tomando los abiertos V en una base local de entornos de x, es decir $\mathcal{O}_{X,x} \cong \varinjlim_{x\in V\subset U} \mathcal{O}_X(V) = \varinjlim_{x\in V} \mathcal{O}_U(V) \cong \mathcal{O}_{U,x}$, por lo que $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{U,x}$. Así que podemos suponer que X es afín, entonces el resultado sigue inmediatamente de que $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ ([1, teorema 11.25]). □

Teorema 2.3.17. *Si $x \in X$ es un punto no-singular de una variedad algebraica irreducible X, entonces x es normal.*

Demostración. [2, lema 1.4.108]. □

Teorema 2.3.18. *El conjunto de puntos no-singulares de una variedad algebraica es abierto y denso.*

Demostración. [3, corolario AG.17.2]. □

Capítulo 3

Monoides y grupos

3.1. Monoides y grupos abstractos

Definición 3.1.1 (Monoide)**.** Sea M un conjunto, $1_M \in M$ un elemento particular del conjunto que llamamos elemento *neutro* y $\mu : M \times M \to M$ un mapa. Decimos que la terna $(M, 1_M, \mu)$ es un *monoide* si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "id\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times id"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dd, "id"] & \\
M \times \{1_M\} \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \{1_M\} \times M \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones en la primera y segunda coordenada, e $id\times\mu : M \times M \times M \to M$ es el mapa dado por $(id \times \mu)(x, y, z) = (x, \mu(y, z))$.

Para las imágenes del mapa μ generalmente escribimos $xy := \mu(x, y)$ y decimos que μ es una multiplicación. Al elemento neutro, si no hay peligro de confusión, lo denotamos por 1. Entonces los diagramas de arriba se pueden escribir así:

1. $x(yz) = (xy)z =: xyz \quad \forall\, x, y, z \in M$.
2. $m1 = 1m = m \quad \forall\, m \in M$.

Observación 3.1.2. El elemento neutro de un monoide es único. Si M es un monoide con elemento neutro 1 y existe un elemento $u \in M$ tal que $um = mu = m$ para todo $m \in M$, entonces en particular $u = u1 = 1$.

Para un monoide M existen dos tipos de elementos de M que resultan muy importantes para su estudio, los elementos idempotentes y los elementos invertibles.

Definición 3.1.3. Sea M un monoide y $e \in M$:

1. Decimos e es *idempotente* si $ee = e^2 = e$.
2. Decimos que e tiene *inverso a izquierda* si existe $u \in M$ tal que $ue = 1$.
3. Decimos que e tiene *inverso a derecha* si existe $u \in M$ tal que $eu = 1$.
4. Decimos que e tiene *inverso* (o que es *invertible*) si existe $u \in M$ que es inverso a izquierda y a derecha.

Observación 3.1.4. Si $e \in M$ tiene inverso a izquierda e inverso a derecha entonces estos son iguales, en particular e tiene un único inverso que lo denotamos por e^{-1}. Para demostrar esto simplemente tomamos $u, v \in M$ tal que u es inverso a izquierda de e y v es inverso a derecha

$$ue = 1 \quad \text{y} \quad ev = 1$$

entonces

$$u = u1 = u(ev) = (ue)v = 1v = v$$

Definición 3.1.5. Un *submonoide* de un monoide M es un subconjunto $S \subset M$ tal que $1_M \in S$ y que es cerrado por la multiplicación, es decir, si x e y pertenecen a S entonces $xy \in S$.

Denotamos por $E(M)$ a los elementos idempotentes de un monoide M y por $G(M)$ a los elementos invertibles.

Definición 3.1.6. Si M es un monoide tal que $M = G(M)$ decimos que M es un *grupo*. Equivalentemente, un grupo es un monoide donde todo elemento es invertible.

Veamos algunas propiedades de estos conjuntos.

Proposición 3.1.7. *Si M es un monoide entonces el conjunto de invertibles $G(M)$ es un grupo.*

Demostración. El elemento neutro 1_M es invertible dado que $(1_M)(1_M) = 1_M$ y $(1_M)^{-1} = 1_M$, entonces $1_M \in G(M)$. Si x e y son invertibles, entonces $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x1_Mx^{-1} = xx^{-1} = 1_M$, lo que nos dice que xy tiene inverso a derecha, y con una cuenta análoga se puede ver que xy tiene inverso a izquierda y por lo tanto es invertible. Así que $G(M)$ es un submonoide de M donde todo elemento es invertible, luego $G(M)$ es un grupo. □

Debido a la proposición anterior llamamos *grupo de invertibles* de M al conjunto $G(M)$.

Definición 3.1.8. Un *morfismo* entre dos monoides $(M, 1_M, \mu_M)$ y $(N, 1_N, \mu_N)$ será un mapa $\varphi : M \to N$ tal que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ y $\varphi(1_M) = \varphi(1_N)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] & N \\ M \times M \arrow[u, "\mu_M"] \arrow[r, "\varphi\times\varphi"'] & N \times N \arrow[u, "\mu_N"'] \end{tikzcd}$$

En el caso de ser M y N grupos, decimos que φ es un *morfismo de grupos.*

Observemos que $f\colon G \to H$ es un morfismo de grupos si y sólo si $f(xy) = f(x)f(y)$. No es necesario imponer la condición $f(1) = 1$ ya que se deduce inmediatamente de lo siguiente:

$$f(1) = f\big((1)(1)\big) = f(1)f(1) \in H,$$

pero como H es un grupo, si se multiplica de ambos lados por el inverso de $f(1)$ se obtiene que $f(1) = 1$. Por otro lado, haciendo la siguiente operación para $x \in G$:

$$1 = f(1) = f\big((x)(x^{-1})\big) = f(x)f\big(x^{-1}\big)$$

se deduce que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ $\forall x \in G$.

El siguiente ejemplo sencillo ilustra la necesidad de imponer que en un morfismo de monoides la imagen del neutro sea el neutro.

Ejemplo 3.1.9. Sea $(\mathbb{R}, 1, \cdot)$ el monoide de los números reales con el producto usual. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ las matrices reales de tamaño 2×2, con el producto usual de matrices es un monoide donde el neutro es la identidad. Si consideramos el mapa $\varphi\colon \mathbb{R} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es claro que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, pero $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que no es la matriz identidad.

Si bien el neutro no se aplica en el neutro, sí sucede que que la imagen del neutro es idempotente. La siguiente proposición ilustra este hecho algo más general.

Proposición 3.1.10. *Sea $f : M \to N$ un morfismo de monoides, entonces*

1. $f(E(M)) \subset E(N)$.
2. *Consideremos la fibra de f en un elemento $y \in N$, es decir el conjunto $f^{-1}(y) = \{x \in M \ / \ f(x) = y\} \subset M$ tal que $f^{-1}(y) \neq \varnothing$. Este conjunto es cerrado por la multiplicación (es un subsemigrupo de M) si y sólo si $y \in E(N)$.*

3. *Sea* $y \in N$, $1_M \in f^{-1}(y)$ *si y sólo si* $1_N = y$.

4. $f^{-1}(1_N)$ *es un submonoide de* M.

Demostración.

1. Si $f(x) \in f(E(M)) \subset N$ con $x \in E(M)$ entonces $(f(x))^2 = f(x)f(x) = f(xx) = f(x^2) = f(x)$, así que $f(x) \in E(N)$.

2. ($\Leftarrow$) Consideremos primero $y \in E(N)$ y sean x y x' dos elementos pertenecientes a $f^{-1}(y)$,

$$f(xx') = f(x)f(x') = yy = y^2 = y$$

entonces $xx' \in f^{-1}(y)$.
($\Rightarrow$) Ahora sea $y \in N$ tal que la fibra es cerrada por la multiplicación. Sea $x \in f^{-1}(y) \neq \varnothing$, entonces $xx = x^2 \in f^{-1}(y) \Rightarrow f(x^2) = y$, por lo tanto

$$y^2 = (f(x))^2 = f(x)f(x) = f(x^2) = y$$

entonces $y \in E(N)$.

3. Como f es morfismo de monoides $f(1_M) = 1_N$, por lo tanto

$$1_M \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(1_M) = y \Leftrightarrow y = 1_N$$

4. Como $1_N \in E(N)$ entonces la afirmación se concluye de 2) y 3).

□

3.2. Monoides y grupos algebraicos

Definición 3.2.1. Un *monoide algebraico* es un monoide (M, μ) tal que M tiene una estructura de variedad algebraica donde el producto $\mu : M \times M \to M$ es un morfismo de variedades algebraicas. Aquí $M \times M$ es la variedad producto de M con M.

Definición 3.2.2. Un *grupo algebraico* es un grupo G equipado con una estructura de variedad donde el producto y el mapa inversión $\iota : M \to M$, $\iota(x) = x^{-1}$, son morfismos de variedades algebraicas.

Observación 3.2.3. Recordar que una variedad algebraica es una prevariedad X con la condición extra de ser separado, es decir que la diagonal $\triangle(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrado en el producto. Si G es un grupo con una estructura de prevariedad donde la multiplicación y el mapa inversión son continuas, entonces G es separado; en efecto, un elemento está en la diagonal $(g, h) \in \triangle(G)$

si y sólo si $gh^{-1} = \mu(g, \iota(h)) = 1$, así que $\triangle(G)$ es cerrado porque es la imagen inversa por una función continua del conjunto $\{1\}$ que es cerrado ([5, 3.4]). Así que en la definición de grupo algebraico podemos sólo pedir que G es una prevariedad, pero la realidad es que no es un aporte significativo.

Un hecho más interesante sobre la definición de grupo algebraico, que es parte principal de esta monografía, es que es posible probar que el mapa inversión es un morfismo de variedades si se omite en la definición, además si un monoide tiene inverso a izquierda (o derecha), entonces es invertible [11]. En este trabajo, ver el teorema 3.3.2.

Definición 3.2.4. Sea G un grupo algebraico (o monoide algebraico) y $H \subset G$ un subgrupo (resp. un submonoide). Si H es además un conjunto cerrado de la variedad G decimos que es un *subgrupo cerrado* o un *subgrupo algebraico* (resp. *submonoide algebraico*) de G.

Definición 3.2.5. Sean G y H dos grupos algebraicos (o monoides algebraicos). Un *morfismo de grupos algebraicos* (resp. monoides algebraicos) es morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ (resp. de monoides) que también es un morfismo de variedades algebraicas.

Proposición 3.2.6. *Sea $(M, 1, \mu)$ un monoide algebraico.*

1. *Existe una única componente irreducible de M que contiene al elemento neutro. Denotamos a esta componente como M^0.*

2. *Para toda componente irreducible X de M se cumple que $XM^0 = M^0X = X$.*

3. *Si $x \in M$ es invertible, entonces existe una única componente irreducible de M que contiene a x, esta es $xM^0 = \{xm : m \in M^0\}$.*

Demostración.

1. Sean X e Y dos componentes irreducibles de M tales que $1 \in X$ y $1 \in Y$. La subvariedad $X \times Y$ de $M \times M$ es irreducible, entonces $\mu(X \times Y) = XY = \{xy \in M \,/\, x \in X,\ y \in Y\}$ es irreducible en M porque μ es un mapa continuo. Además $X \subset XY$ ya que 1 está en Y e $Y \subset XY$ porque $1 \in X$. Pero X e Y son componentes irreducibles de M, entonces $X = XY = Y$.

2. Como M^0X, XM^0 son irreducible y $X \subset M^0X$, $X \subset XM^0$, entonces $X = M^0X = XM^0$ porque X es una componente irreducible.

3. La multiplicación a izquierda por x, $\ell_x : M \to M$ dada por $\ell_x(y) = xy$, es un isomorfismo ($\ell_x^{-1} = \ell_{x^{-1}}$) que lleva M^0 en xM^0, una componente irreducible de M que contiene a x. Si M_x es otra componente irreducible que contiene a x, entonces $xM^0 \subset M_xM^0 = M_x$ por lo tanto $xM^0 = M_x$.

$\square$

Observación 3.2.7.

1. Del item 2 de la proposición anterior se deduce en particular que M^0 es un submonoide de M dado que $M^0M^0 = M^0$.

2. Si G es un grupo algebraico entonces para cada elemento x de G existe una única componente irreducible de G que contiene a x.

Lema 3.2.8. *Sea G un grupo algebraico. Si $U \subset G$ es un abierto no vacío y $V \subset G$ es un abierto denso, entonces $G = UV = \{uv \ / \ u \in U, \ v \in V\}$.*

Demostración. Como V es denso en G se tiene que $V^{-1} := \iota(V) = \{\iota(v) = v^{-1} \in G \ / \ v \in V\}$ es denso en G porque $\iota : G \to G$ es un isomorfismo (de variedades). Si $x \in G$ entonces también es denso el conjunto $xV^{-1} := \{xv^{-1} : v^{-1} \in V^{-1}\}$ ya que es la imagen de V^{-1} por el mapa ℓ_x. Entonces $xV^{-1} \cap U \neq \varnothing$, por lo tanto existe $v \in V$ y $u \in U$ tal que

$$\begin{aligned} xv^{-1} &= u \\ x &= uv \end{aligned}$$

entonces $x \in UV$. $\square$

Lema 3.2.9. *Sea M un monoide algebraico y $H \subset M$ un submonoide abstracto (no necesariamente un conjunto cerrado). Entonces la clausura de H, $\overline{H}$, es un submonoide algebraico.*

Demostración. Sólo hay que probar que $\overline{H}$ es un submonoide. Tenemos que $\overline{H \times H} = \overline{H} \times \overline{H}$ (proposición 1.3.21). Dado que la multiplicación $\mu\colon M \times M \to M$ es un mapa continuo y H es un submonoide, se tiene:

$$\overline{H}\ \overline{H} = \mu\big(\overline{H} \times \overline{H}\big) = \mu\left(\overline{H \times H}\right) \subset \overline{\mu(H \times H)} = \overline{HH} = \overline{H}.$$

$\square$

Corolario 3.2.10. *Sea G un grupo algebraico y $H \subset G$ un subgrupo abstracto. Entonces $\overline{H}$ es un subgrupo algebraico.*

Demostración. El mapa inversión $\iota : G \to G \ x \to x^{-1}$ es continuo entonces $\iota(\overline{H}) \subseteq \overline{\iota(H)} \subseteq \overline{H}$ $\square$

Teorema 3.2.11. *Sea G un grupo algebraico y H un subgrupo de G (abstracto) tal que H es un subconjunto constructible de G. Entonces H es un subgrupo algebraico de G.*

Demostración. Por el corolario 3.2.10, $\overline{H}$ es un grupo algebraico. Sólo hay que probar que $\overline{H} = H$. Como H es constructible, existe un conjunto abierto $U \neq \varnothing$ de $\overline{H}$ con $U \subset H$. Al conjunto H lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$H = \bigcup_{x \in H} xU$$

donde $xU = \{xu : u \in U\}$, porque si $u \in U \subset H$, entonces $u^{-1} \in H$ y por lo tanto para todo $h \in H$ se tiene que $h = hu^{-1}u \in hu^{-1}U$, con $hu^{-1} \in H$. La multiplicación a izquierda es un homeomorfismo, así que xU es un abierto de $\overline{H}$ para todo $x \in H$ y por lo tanto H es un abierto de $\overline{H}$. Así que por el lema 3.2.8 tenemos que $\overline{H} = HH \subset H$, de donde se concluye que $\overline{H} = H$.

□

Corolario 3.2.12. *Todo morfismo $f\colon M \to G$ de grupos algebraicos tiene imagen cerrada.*

Demostración. La imagen de f es un subgrupo de G y además, por el corolario 2.2.2, es un conjunto constructible, por lo tanto es un conjunto cerrado de G. □

3.3. Grupo de invertibles

Si $(M, \mu, 1)$ es un monoide algebraico, definimos el grupo de invertibles de M como el conjunto

$$G(M) = \{x \in M \ / \ x \text{ es invertible}\}$$

Sabemos que $G(M)$ es un grupo (abstracto), nuestro objetivo es probar que $G(M)$ es un grupo algebraico y que además es un conjunto abierto en M.
Sean $p_1 : M \times M \to M$ y $p_2 : M \times M \to M$ las proyecciones en la primer y segunda coordenada: $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$.
Consideremos los conjuntos:

$$M_d = \{x \in M \ / \ x \text{ tiene inverso a derecha}\}$$

y

$$M_i = \{x \in M \ / \ x \text{ tiene inverso a izquierda}\}$$

Entonces tenemos que $G(M) = M_d \cap M_i$, esto es por la observación 3.1.4. (si un elemento tiene inverso a izquierda y a derecha, entonces estos coinciden).
Además es claro que $M_d = p_1\left(\mu^{-1}(1)\right)$ y $M_i = p_2\left(\mu^{-1}(1)\right)$

Observación 3.3.1. Las proyecciones p_1 y p_2 son morfismos de variedades algebraicas y el conjunto $\mu^{-1}(1)$ es una subvariedad de $M \times M$ entones $G(M)$ es un conjunto constructible de M.

Teorema 3.3.2. *Sea M un monoide algebraico y $G(M)$ su grupo de invertibles, entonces $G(M)$ es un grupo algebraico que es abierto en M.*

La prueba del teorema se basa en los siguientes lemas y observaciones, donde se considera que M es irreducible. Al final se incluye una prueba para el caso no irreducible.

En lo que sigue, se considera $G = G(M)$ y $\mu^{-1}(1)^\circ$ una componente irreducible de $\mu^{-1}(1)$ que contiene a $(1, 1)$.

Además, por la observación anterior, G es constructible en M y podemos escribir
$$G = p_1\left(\mu^{-1}(1)\right) \cap p_2\left(\mu^{-1}(1)\right).$$

Observación 3.3.3. Supongamos que M es irreducible. Entonces $M \times M$ es irreducible y

$$\dim(M \times M) = \dim(M) + \dim(M) = 2\dim(M).$$

Como el mapa $\mu : M \times M \to M$ es sobreyectivo ($\mu(1,x) = x \ \forall x \in M$), aplicando el teorema de la dimensión de las fibras (teorema 2.2.9) tenemos que

$$\dim\left(\mu^{-1}(1)^\circ\right) \geq \dim(M \times M) - \dim(M) = \dim(M).$$

Lema 3.3.4. *El mapa $\rho_1 \colon \mu^{-1}(1)^\circ \to M$ dado por $\rho_1 = p_1|_{\mu^{-1}(1)^\circ}$ es un morfismo dominante. En particular, existe un abierto no vacío de M contenido en $p_1(\mu^{-1}(1)^\circ)$.*

Demostración. Es suficiente probar que

$$\dim \overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)} = \dim M$$

ya que el lema 1.4.9 garantiza que $\overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)}$ no puede ser un cerrado propio de M.

Por el teorema 2.2.9 existe U abierto no vacío de $\overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)}$ contenido en $\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)$ tal que para todo $u \in U$ se tiene que

$$\dim\left(\rho_1^{-1}(u)\right) = \dim\left(\mu^{-1}(1)^\circ\right) - \dim\left(\overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)}\right). \tag{3.1}$$

La función $(x,y) \mapsto \dim\left(\rho_1^{-1}(\rho_1(x,y))\right)$ es semicontinua superiormente, por lo que el conjunto $V = \{(x,y) \in \mu^{-1}(1)^\circ \ / \ \dim\left(\rho_1^{-1}(\rho_1(x,y))\right) = 0\}$ es abierto en $\mu^{-1}(1)^\circ$. Además $\rho_1^{-1}(\rho_1(1,1)) = \rho_1^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mu^{-1}(1)^\circ \ / \ xy = 1 \text{ y } x = 1\} = \{(1,1)\}$. Entonces $\dim \rho_1^{-1}\left(\rho_1(1,1)\right) = 0$, por lo tanto $V \neq \emptyset$.

El mapa ρ_1 es una función continua, entonces $\rho_1^{-1}(U)$ es un abierto no vacío de $\mu^{-1}(1)^\circ$ porque U es un abierto no vacío de la imagen de ρ_1. Por lo tanto $W = \rho_1^{-1}(U) \cap V$ es un abierto no vacío de $\mu^{-1}(1)^\circ$.

Si $(x,y) \in W$, entonces $\rho_1(x,y) \in U$ y $\dim \rho_1^{-1}(\rho_1(x,y)) = 0$. De la ecuación (3.1) tenemos que:
$$\dim \mu^{-1}(1)^\circ = \dim \overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)},$$

entonces
$$\dim M \leq \dim \mu^{-1}(1)^\circ = \dim \overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)} \leq \dim M.$$

Así que tenemos la igualdad $\dim \overline{\rho_1(\mu^{-1}(1)^\circ)} = \dim M$, como queríamos probar. □

Observación 3.3.5. Observar que el lema 3.3.4 prueba que $G = G(M)$ es abierto de M, ya que por simetría existe además un abierto no vacío de M contenido en $p_2(\mu^{-1}(1)^\circ)$ y

$$p_1(\mu^{-1}(1)^\circ) \cap p_2(\mu^{-1}(1)^\circ) \subset G.$$

Como M es irreducible existe un abierto no vacío U de M contenido en G. Luego por traslación tenemos que G es abierto:

$$G = \bigcup_{g\in G} gU = \bigcup_{g\in G} \ell_g\,(U)\,,$$

porque la multiplicación a izquierda es un isomorfismo. Además como sabemos que el conjunto de puntos regulares en una variedad algebraica es abierto no vacío y un isomorfismo lleva puntos regulares en puntos regulares, se concluye que los puntos de G son regulares.

Lema 3.3.6. *Sea M irreducible y $x \in M$ un elemento que tiene inverso a izquierda o inverso a derecha, entonces x es invertible.*

Demostración. Supongamos que x tiene inverso a izquierda (el otro caso es análogo), así que existe $y \in M$ que verifica $yx = 1$. Entonces ℓ_x tiene inverso ℓ_y a izquierda: $\ell_y \circ \ell_x = id|_M$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\ell_x"] \arrow[dr, "id"'] & M \arrow[d, "\ell_y"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Luego ℓ_x es inyectivo, por lo que las fibras del mapa $\ell_x|_G \colon G \to M$ constan de un sólo punto, así que en particular, por el teorema 2.2.9, se tiene que:

$$\dim \overline{\ell_x(G)} = \dim G = \dim M,$$

donde la última igualdad es porque G es un abierto de M. De esto se deduce que $\overline{\ell_x(G)}$ no puede ser un cerrado propio de M (lema 1.4.9), entonces $\overline{\ell_x(G)} = M$. Como G es constructible $\ell_x(G)$ es constructible, entonces existe U abierto de $\overline{\ell_x(G)} = M$ tal que $U \subset \ell_x(G)$.

Como M es irreducible y G es abierto se tiene que $U \cap G \neq \emptyset$. Entonces existe $g \in G$ tal que $g \in U \subset \ell_x(G)$, es decir que existe $g \in G$ y $h \in G$ tal que $g = xh$, entonces $x = gh^{-1} \in G$, por lo que x es invertible. $\square$

Observación 3.3.7. Observemos que del lema 3.3.6 se deduce que

$$G = p_2\left(\mu^{-1}(1)\right) = p_1\left(\mu^{-1}(1)\right).$$

y por lo tanto

$$\mu^{-1}(1) = \{(x, x^{-1}) \in M \times M /\ x \in G\}.$$

Lema 3.3.8. *Si M es irreducible, entonces $\mu^{-1}(1)$ es irreducible, es decir $\mu^{-1}(1) = \mu^{-1}(1)^\circ$ (la componente irreducible que contiene al $(1,1)$).*

Demostración. Si X_1 es una componente irreducible de $\mu^{-1}(1)$, entonces el mapa $p_1|_{X_1} : X_1 \to M$ es dominante (la prueba es análoga al lema 3.3.4 ya que las fibras de la proyección constan de un solo punto). Entonces existe U_1 abierto no vacío de M contenido en $p_1(X_1)$. Si U es un abierto no vacío de M contenido en $p_1(\mu^{-1}(1)^\circ)$, como M es irreducible, se tiene que $U \cap U_1$ es un abierto no vacío de M tal que

$$U \cap U_1 \subset p_1\left(\mu^{-1}(1)^\circ\right) \cap p_1(X_1).$$

Como las fibras de $p_1|_{\mu^{-1}(1)}$ tienen un sólo elemento, si $x \in U \cap U_1$, entonces $p_1|^{-1}_{\mu^{-1}(1)}(x) = (x, x^{-1}) \in \mu^{-1}(1)^\circ \cap X_1$, así que

$$p_1|^{-1}_{\mu^{-1}(1)}(U \cap U_1) \subset \mu^{-1}(1)^\circ \cap X_1$$

es un abierto no vacío, entonces $\mu^{-1}(1)^\circ = X_1$ porque son irreducibles. □

Ahora veamos la prueba del teorema 3.3.2.

Demostración. (del teorema 3.3.2). Para probar que G es un grupo algebraico hay que probar que tomar inversos es un morfismo de variedades, es decir que $\iota\colon G \to G$, $\iota(x) = x^{-1}$ es un morfismo.

Si M es irreducible, entonces $\mu^{-1}(1)$ y G son irreducibles. El morfismo $\rho_1 = p_1|_{\mu^{-1}(1)}\colon \mu^{-1}(1) \to G$ es biyectivo y separable (recordar que $\Bbbk$ tiene característica 0). Como G es no-singular (observación 3.3.5), se tiene que es normal (teorema 2.3.17). Entonces, por el teorema principal de Zariski (2.3.11), tenemos que ρ_1 es un isomorfismo. Del mismo modo ρ_2 es un isomorfismo y es claro que $\iota = \rho_2 \circ \rho_1^{-1}$, entonces ι es un morfismo. Luego G es un grupo algebraico.

Si M no es irreducible, sea $M = M^0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, donde M^0 es la componente irreducible que contiene al neutro (proposición 3.2.6) y los X_i son las otras componentes irreducibles de M.

La componente M^0 es un submonoide algebraico de M (observación 3.2.7) cuyo grupo de invertibles $G(M^0) \subset M^0$ es un grupo algebraico abierto en M^0 (probado en la parte anterior). La primera observación es que

$$G(M^0) = G(M) \cap M^0;$$

para probar eso, sea $x \in M^0$ invertible en M, por la proposición 3.2.6 hay una única componente irreducible que contiene a x (cuando x es invertible), entonces hay una única componente irreducible que contiene a x^{-1}, esta es $x^{-1}M^0$. Como $x \in M^0$, se tiene que $1 = x^{-1}x \in x^{-1}M^0$ y por lo tanto $x^{-1}M^0 = M^0$, por lo que $x^{-1} \in M^0$. Ahora, con cierto abuso de notación, sea $G(X_i) = G(M) \cap X_i$.

Tenemos que

$$G(M) = G(M^0) \cup \bigcup_{i=1}^{n} G(X_i).$$

Para probar que $G(M)$ es abierto en M, vamos a probar que cada uno de los $G(M^0), G(X_i)$ son abiertos en M. Si $x \in G(X_i)$ (podría ocurrir el caso $G(X_i) = \varnothing$, que es abierto) se tiene que x es invertible, así que $X_i = xM^0$ y además $G(X_i)$ es la imagen de $G(M_0)$ por el isomorfismo $\ell_x \colon M \to M$; en efecto, los elementos de $xG(M^0) \subset xM^0$ son invertibles, por lo tanto $xG(M^0) \subset G(xM^0)$ y si $y \in G(xM^0)$, entonces $x^{-1}y \in M^0$ es invertible, así que $y \in xG(M^0)$. Si $G(M^0)$ es abierto en M, esto probaría que $G(X_i) = G(xM^0) = \ell_x(G(M^0))$ es abierto en M. Veamos por lo tanto que $G(M^0)$ es abierto en M (sabemos que es abierto en M^0). Sea

$$\widetilde{M}^0 = M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_i \subset M^0.$$

Como los X_i son cerrados en M, $\widetilde{M}^0$ es abierto de M. Además $G(M^0) \subset \widetilde{M}^0$ porque $G(M^0) \cap X_i = \varnothing$ dado que por cada elemento invertible existe una única componente irreducible a la cual pertenece (proposición 3.2.6). Luego tenemos

$$G(M^0) \subset \widetilde{M}^0 \subset M^0 \subset M$$

donde $G(M^0)$ es abierto en M^0 (con la topología relativa de M) y $\widetilde{M}^0$ es abierto de M, entonces $G(M^0)$ es abierto de M. Queda probado que $G(M)$ es abierto en M.

Probemos ahora que $G \coloneqq G(M)$ es un grupo algebraico. Para esto sólo hay que probar que la función $\iota : G(M) \to G(M)$, $\iota(x) = x^{-1}$ es un morfismo. Ya tenemos probado el caso

$$\iota|_{G(M^0)} : G(M^0) \to G(M^0) \subset G(M).$$

Si x es invertible, y $X = xM^0$ es la componente irreducible que contiene a x, entonces podemos escribir

$$\iota|_{G(X)} : G(X) \to M$$

como

$$\iota|_{G(X)} = r_{x^{-1}} \circ \iota|_{G(M^0)} \circ \ell_{x^{-1}},$$

donde r es la multiplicación por derecha, entonces $\iota|_{G(X)}$ es un morfismo. Luego $\iota : G \to G$ es un morfismo porque restringido a cada abierto $G(X_i) \neq \varnothing$ lo es. □

3.4. Acciones

En esta última sección veremos que si M es un monoide algebraico irreducible, entonces la acción de $G(M)$ sobre M por traslación a izquierda y derecha, tiene al menos una órbita abierta y una única órbita cerrada. Se dice en este caso que M es una *inmersión simple* de $G(M)$ [11].

Recordamos primero algunas definiciones.

Definición 3.4.1. Si $(G, \mu, 1)$ es un grupo y S es un conjunto, diremos que G *actúa* en S si existe un mapa

$$\rho\colon G \times S \to S$$

tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} G \times G \times S \arrow[r, "\mu\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\rho"'] & G \times S \arrow[d, "\rho"] \\ G \times S \arrow[r, "\rho"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{1\} \times S \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "p_2"'] & S \\ S \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Diremos que ρ es una *acción de* G en S.

Usaremos la notación $\rho(g, s) = g \cdot s$ para todo $g \in G$ y para todo $s \in S$; así los diagramas anteriores pueden escribirse de la siguiente manera

1. $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$ para $g, h \in G$ y $s \in S$
2. $1 \cdot s = s$ para todo $s \in S$.

Si $s \in S$ se define la *órbita* de s como el conjunto:

$$G \cdot s = \{g \cdot s : g \in G\} \subset S$$

y el *grupo de isotropía* o *estabilizador* de s es el conjunto:

$$G_s = \{g \in G : g \cdot s = s\}.$$

Observar que G_s es un subgrupo de G.

Definición 3.4.2. Sea G un grupo algebraico. Una G-*variedad* es una variedad algebraica X equipada con una acción del grupo G tal que el mapa:

$$\rho\colon G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

es un morfismo de variedades.

Ejemplo 3.4.3. Sea M un monoide algebraico y $G = G(M)$ su grupo de invertibles. Entonces el morfismo

$$\rho\colon (G \times G) \times M \to M,\ ((g, h), m) \mapsto gmh^{-1}$$

es una acción del grupo $G \times G$ en M, es decir que M es una $(G \times G)$-variedad. Para esta acción la órbita de 1 es G, por lo tanto $G \cdot 1$ es una órbita abierta de M. Además veremos que existe una única órbita cerrada en M para esta acción, que es el *núcleo* de M [11].

Definición 3.4.4. Sea M un monoide. Decimos que un subconjunto $I \subset M$ no vacío es un *ideal* de M si $MIM \subset I$; es decir que $man \in I$ para todo $a \in I$ y para todo $m, n \in M$. Si existe un ideal contenido en todos los ideales de M, se dice que este ideal es el *núcleo* de M.

Observación 3.4.5. Si $I \subset M$ es un ideal, observar que como $1 \in M$, se tiene que
$$II \subset IM \subset MIM \subset I,$$
entonces I es cerrado por la multiplicación, es decir que es un semigrupo (no necesariamente el 1 pertenece a I). Si I y J son dos ideales de M, entonces $\varnothing \neq IJ \subset IM \subset MIM \subset I$; del mismo modo $IJ \subset J$, así que $\varnothing \neq IJ \subset I \cap J$. Además $M(I \cap J)M \subset I \cap J$, por lo que $I \cap J$ es un ideal de M. Si $\{I_j\}_j$ es una familia arbitraria de ideales se tiene que $M\big(\bigcap_j I_j\big)M \subset \bigcap_i I_i$; por lo que si M tiene núcleo, necesariamente coincide con la intersección de todos lo ideales de M.

Teorema 3.4.6. *Sea M un monoide algebraico irreducible y G su grupo de invertibles. La acción de $G \times G$ en M por multiplicación a izquierda y derecha (ejemplo 3.4.3) tiene una única órbita cerrada, el núcleo de M.*

Demostración. Sea $I \subset M$ una órbita cerrada. Primero veamos que I es un ideal. Como M es irreducible y $G \subset M$ es abierto no vacío se tiene que $M = \overline{G}$. Además la multiplicación es una función continua, entonces:
$$MIM = \overline{G}I\overline{G} \subset \overline{GIG} = I,$$
donde en la última igualdad usamos que I es una órbita cerrada.

Si J es otra órbita cerrada, como también debe ser un ideal se tiene que $I \cap J$ es un ideal (observación 3.4.5), en particular $I \cap J \neq \varnothing$; pero dos órbitas o bien coinciden o son disjuntas, así que $I = J$, por lo que hay una única órbita cerrada.

Veamos ahora que I es el núcleo que M, es decir que está contenido en todos los ideales de M. Si $S \subset M$ un ideal, entonces $I \cap S \neq \varnothing$ y como I es una órbita:
$$I = GIG = G(I \cap S)G \subset GSG \subset MSM \subset S.$$
Así que I es el núcleo de M. □

Bibliografía

[1] M. Atiyah e I. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[2] W. Ferrer Santos, A. Rittatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups*, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group (2005).

[3] A. Borel, *Linear Algebraic Group* (Second Edition), Springer-Verlag, New York (1991).

[4] M. Brion, *On Algebraic Semigroups and Monoids*, Cornell University Library, arXiv:1208.0675v5 [math.AG] (2013).

[5] G. Kempf, *Algebraic Varieties*, Cambridge University Press (1993).

[6] James J. Milne, *Algebraic Geometry* (v6.02), www.jmilne.org/math/ (2017).

[7] James J. Milne, *Fields and Galois Theory* (v4.53), www.jmilne.org/math/ (2017).

[8] Gerhard P. Hochschild, *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*, Graduate texts in Mathematics, vol 75, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1981).

[9] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Second Edition, Springer, New York (1997).

[10] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate text in Mathematics, vol 52, Springer.

[11] A. Rittatore, *Algebraic monoids and group embeddings*, (1998). arXiv: https://arxiv.org/abs/math/9802073.

[12] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Graduate texts in Mathematics, Springer, (1974).

[13] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2da ed., Modern Birkhäuser CIassics, (1998).

[14] Mohan S. Putcha, *Linear Algebraic Monoids*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 133, Cambridge University Press, 1988.

[15] M. Demazure, P. Gabriel, *Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups*, North-Holland Mathematics Studies, 1980.