Álgebras Cocientes Extensiones de Álgebras y Conjetura Finitista

Aldo Rodríguez
Orientador: Dr. Marcelo Lanzilotta
Coorientador: Dr. José Vivero

Tesis de Maestría en Matemática
Pedeciba-Universidad de la República
Montevideo - Uruguay

Índice general

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo está enmarcado dentro del área del álgebra homológica aplicada al estudio de representaciones de álgebras. En particular este trabajo realiza aportes sobre lo que se conoce como la conjetura finitista.

En 2004 Changachang Xi, en su artículo "*On the finitistic dimension conjecture I: related to representation -finite algebras*", utilizó extensiones de álgebras para estudiar la conjetura de la dimensión finitista sobre álgebras de Artin. En particular, demuestra que si se tiene una extensión de álgebras de Artin $f : B \to A$ tal que el radical de B es un ideal de A, entonces si A es de tipo representación finita la dimensión finitista de B es finita. En la prueba de este resultado Changchang Xi comete un error en la demostración al suponer que si B es una subálgebra de un álgebra de Artin A con la misma identidad, tal que el radical de Jacobson $rad(B)$ de B es un ideal a izquierda de A, entonces para todo B-módulo M se cumple que $rad(M)$ es un A-módulo. Este error fue salvado en su artículo del "*Erratum to On the finitistic dimension conjecture I: related to representation-finite algebras*" en el cual incorpora dos lemas que generan las herramientas necesarias para la prueba del teorema. En el mismo artículo inicial, Changchang Xi también prueba que si A es un álgebra de Artin con dos ideales I y J tal que $IJ = 0$ y A/J y A/I son de tipo representación finita, entonces A tiene dimensión finitista finita. En 2018, Shugfeng Guo en su artículo "*Finitistic Dimension Conjecture and Extensions of Algebras*" obtiene resultados que generalizan los obtenidos por por Xi utilizando la misma metodología. Además de las proposiciones ya mencionadas, Guo también plantea algunos resultados sobre la conjetura finitista utilizando herramientas del álgebra homológica relativa.

El objetivo de este trabajo es desarrollar las ideas planteadas por Guo, establecer su vínculo con resultados previos y realizar aportes personales a dichas ideas.

Una de las principales herramientas utilizadas por Xi y Guo en la demostración de sus teoremas son las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov y sus propiedades. En particular cómo las propiedades de estas funciones permiten acotar la dimensión proyecitva de un módulo bajo determinadas condiciones. Por este motivo en el segundo capítulo se desarrollan los conceptos de las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov y sus principales propiedades.

En el tercer capítulo se desarrolla lo expuesto por Changchang Xi y Shugfeng Guo en los artículos mencionados. Se enuncian los lemas, proposiciones y teoremas planteados desarrollando por completo las demostraciones. En particular se plantea y desarrolla el contraejemplo que dejó en evidencia el error cometido por Xi. Además se proponen ejemplos que dan evidencia de la relevancia de los resultados de Guo, así como posibles estrategias para generar nuevos ejemplos.

En el cuarto capítulo se desarrollan mis aportes personales (además de lo ya realizado en los capítulos anteriores). A partir de la definición de una subcategoría de A-módulos logro vincular dos de los resultados planteados por Guo englobándolos en un solo enunciado que en cierta forma generaliza los anteriores. Además, de esta proposición se obtiene un resultado que no fue observado por Guo, el cual enuncio, demuestro y brindo un ejemplo de aplicación. En este capítulo, también se realizó aportes a los resultados de Guo relacionados con el álgebra homológica relativa.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebras de Caminos

En este capítulo se presentarán algunas de las nociones básicas sobre álgebras de caminos, teniendo como objetivo principal enunciar el Teorema de Gabriel, el cual nos permite identificar una gran familia de álgebras con álgebras de caminos. A lo largo de todo el trabajo consideraremos una K-álgebra A de dimensión finita con K algebraicamente cerrado.

Definición 1.1.1 *Un **carcaj** es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, donde Q_0 es un conjunto cuyos elementos son llamados puntos o vértices, y Q_1 también es un conjunto en el cual sus elementos son llamados flechas. Además, s y t son dos mapas $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada $\alpha \in Q_1$ su fuente y su destino, respectivamente. Si $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$, escribimos $\alpha : i \to j$ para representar a la flecha α. Decimos que un carcaj Q es finito si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos.*

Ejemplo 1.1.2 *Consideremos el siguiente carcaj:*

$$\begin{tikzcd}
& & 3 \arrow[dr, "\lambda"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\beta"'] & & 5 \arrow[r, "\theta"] & 6 \\
& & 4 \arrow[ur, "\epsilon"'] & &
\end{tikzcd}$$

$Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \lambda, \theta\}, s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = s(\delta) = s(\beta) = 2$, $t(\delta) = s(\lambda) = 3$, $t(\beta) = s(\epsilon) = 4$, $t(\lambda) = t(\epsilon) = s(\theta) = 5$ *y* $t(\theta) = 6$.

Definición 1.1.3 *Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un* ***camino de largo*** *$l \geq 1$ con fuente a y destino b (de a en b) es una secuencia*

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$, para $1 \leq k \leq l$, que cumple que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_{k-1}) = s(\alpha_k)$, para cada $1 < k \leq l$ y $t(\alpha_l) = b$. Un camino de esta forma se escribe abreviadamente como $\alpha_1\alpha_2...\alpha_l$.

Llamaremos camino trivial o estacionario al camino de largo cero el cual representaremos como $e_a = (a||a)$ para todo $a \in Q_0$. Además, diremos que un camino de largo $l \geq 1$ es un ciclo si comienza y termina en el mismo punto. Un carcaj que no contiene ciclos se llama acíclico.

Definición 1.1.4 *Sea Q un carcaj. El* ***álgebra de caminos*** *KQ es una K-álgebra que como espacio vectorial tiene de base los caminos en Q y el producto de los vectores de la base se define de la siguiente manera:*

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l|b)(c|\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k|d) = \begin{cases} (a|\alpha_1, ..., \alpha_l, \beta_1, ..., \beta_k|d) & si \quad b = c \\ 0 & si \quad b \neq c \end{cases}$$

Definición 1.1.5 *Decimos que el carcaj Q es conexo, si lo es el grafo que se obtiene al no considerar la orientación de la flechas en Q. Sea Q un carcaj finito y conexo. Llamaremos* ***ideal de flechas (R_Q)*** *al ideal bilateral de KQ generado por las flechas de Q y lo denotaremos por R_Q.*

Observemos que $R_Q = \bigoplus_{l \geq 1} KQ_l$ siendo KQ_l el subespacio de KQ generado por los caminos de largo l. A su vez, para cada $l \geq 1$, $R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} KQ_m$, es el ideal de KQ generado por los caminos de largo mayor o igual que l.

Definición 1.1.6 *Sea Q un carcaj finito y R_Q el ideal flecha del álgebra de caminos KQ.Un ideal I de KQ es llamado un* ***ideal admisible*** *si existe un entero $m \geq 2$ tal que:*

$$R_Q^m \subset I \subset R_Q^2.$$

Si I es un ideal admisible de KQ, el par (Q, I) se dice un carcaj acotado. Al álgebra cociente KQ/I la llamaremos álgebra de carcaj acotado (Q, I).

Definición 1.1.7 *Una* ***relación en*** *Q con coeficientes en K es una combinación K-lineal de caminos de largo $l \geq 2$ que comienzan en un mismo vértice y terminan en un mismo vértice. Entonces, una relación ρ es un elemento de KQ que tiene la siguiente forma: $\rho = \Sigma_{i=1}^m \lambda_i \omega_i$, con $\lambda_i \in K$ no todos cero y ω_i caminos de largo por lo menos 2 tal que $s(\omega_i) = s(\omega_j)$ y $t(\omega_i) = t(\omega_j)$, para $i, j = 1, ..., m$.*

Lema 1.1.8 *Sea Q un carcaj finito. Todo ideal admisible I de KQ está finitamente generado.*

La demostración se puede encontrar en [2, Cap. 2, Lema 2.8].

Corolario 1.1.9 *Sea Q un carcaj finito. Para todo ideal admisible I de KQ, existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_1, ..., \rho_m\}$ tal que $I = \langle \rho_1, ..., \rho_m \rangle$.*

La demostración se puede encontrar en [2, Cap. 2, Corolario 2.9].

Definición 1.1.10 *Sea A una K-álgebra con un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. El **álgebra A es básica** si $e_iA \neq e_jA$, para todo $i \neq j$.*

Observación 1.1.11 *Si A no es un álgebra básica, se define $e_A = e_{s_1} + ... + e_{s_t}$ como la suma de los elementos del conjunto maximal determinado por los idempotentes ortogonales primitivos tal que $e_{s_i}A \cong e_{s_j}A \Leftrightarrow i = j$. En [2, 6.I] se prueba que el álgebra e_AAe_A es básica y que A y e_AAe_A son equivalentes Morita. Por lo tanto, en la teoría de representaciones es suficiente con estudiar las álgebras básicas.*

Definición 1.1.12 *Un álgebra es **conexa** (o indescomponible) si no se puede escribir como producto directo de dos álgebras no nulas.*

Teorema 1.1.13 ***(de Gabriel)**. Sea A una K-álgebra básica de dimensión finita. Entonces existe un ideal admisible I y un carcaj Q_A tal que $A \simeq KQ_A/I$.*

La demostración se puede encontrar en [2, Cap. 2, Teorema 3,7 .II].

Observación 1.1.14 *El carcaj Q_A, mencionado en el teorema anterior, queda determinado de la siguiente manera:*
Los vértices de Q_A están en correspondencia biunívoca con el conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de idempotentes primitivos ortogonales de A tal que $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ (no depende del conjunto de idempotentes elegidos).
Dados dos vértices a y b de Q_A, el número de flechas de a hasta b es igual a la dimensión del espacio vectorial $e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b$, (en la próxima sección se definirá rad(A)).

1.2. Representaciones y Módulos

En esta sección se continua presentando las nociones básicas de teoría de representaciones. En particular veremos que dada un álgebra en las condiciones de las hipótesis del Teorema de Gabriel, entonces existe una equivalencia de categorías entre la categoría de módulos y la categoría de representaciones.

Definición 1.2.1 *Sea Q un carcaj. Una **representación K-lineal** M de Q es definida de la siguiente forma:*
A cada punto $a \in Q_0$ del carcaj se le asocia un k-espacio vectorial M_a.
A cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 se le asocia un mapa K-lineal $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Escribiremos $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ con $a \in Q_0$ y $\alpha \in Q_1$.

Diremos que la representación M es de dimensión finita si cada M_a es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

Ejemplo 1.2.2 *Consideremos el carcaj visto en el Ejemplo 1.1.2 y veamos una representación posible M:*

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dr, "\binom{0}{1}"] & & \\
K \arrow[r, "0"] & K \arrow[ur, "Id"] \arrow[dr, "Id"'] & & K^2 \arrow[r, "Id"] & K^2 \\
 & & K \arrow[ur, "\binom{0}{1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.2.3 *Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q. Un **morfismo de representaciones** es un conjunto de transformaciones lineales $\{f_a\}_{a \in Q_0}$, $f_a : M_a \to M'_a$, que para toda flecha $\alpha : a \to b$ se tiene que $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$. O sea, para toda flecha $\alpha : a \to b$, el siguiente diagrama conmunta:*

$$\begin{tikzcd}
M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\
M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b
\end{tikzcd}$$

Las representaciones K-lineales de Q con los morfismos entre representaciones forman una categoría a la que llamaremos $Rep_K(Q)$. A la subcategoría que se obtiene de considerar las representaciones de dimensión finita la denotaremos por $rep_K(Q)$.

Definición 1.2.4 *Sea Q un carcaj finito y $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una representación de Q. Para un camino no trivial $\omega = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ de a hacia b en Q, definimos la **evaluación** de M en el camino ω como el mapa k-lineal $\varphi_\omega : M_a \to M_b$ definido por $\varphi_\omega = \varphi_{\alpha_n}\varphi_{\alpha_{n-1}}...\varphi_{\alpha_1}$.*

Definición 1.2.5 *Sea Q un carcaj finito, e I un ideal admisible de KQ. Una* ***representación*** $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ *de Q se dice* ***acotada*** *por I si cumple que* $\varphi_\rho = 0$ *para todo $\rho \in I$.*

Se denota por $Rep_K(Q, I)$ a la subcategoría de $Rep_K(Q)$ que contiene a las representaciones de Q acotadas por el ideal admisible I. Análogamente, se denota por $rep_K(Q, I)$ a la subcategría de $rep_K(Q)$ que consiste de las representaciones de Q de K-dimensión finita acotadas por el ideal admisible I.

Teorema 1.2.6 *Sea $A = KQ/I$ donde Q es un carcaj finito y conexo e I es un ideal admisible de KQ. Existe una equivalencia K-lineal de categorías:*

$$F : A - Mod \xrightarrow{\simeq} Rep_K(Q, I)$$

y se restringe a una equivalencia de categorías:

$$F : A - mod \xrightarrow{\simeq} rep_K(Q, I).$$

donde A-Mod es la categoría de A-módulos y A-mod es la categoría de A-módulos finitamente generados. $F : A - mod \xrightarrow{\simeq} rep_K(Q, I)$ se define de la siguiente forma:

$F(M) = (M_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ para todo $M \in A$-mod, donde $M_i = Me_i$ es el espacio vectorial determinado por todos los me_i con $m \in M$, y para toda flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ el mapa $\varphi_\alpha : M_i \to M_j$ está dado por

$$\varphi_\alpha(me_i) = m(e_i\alpha) = \begin{cases} m\alpha \ si \ s(\alpha) = i \\ 0 \ de \ lo \ contrario \end{cases}$$

Si $f : M \to M'$ es un morfismo de A-módulos, entonces la imagen de f con respecto a F es $(f_i)_{i\in Q_0}$ siendo $f_i : M_i \to M'_i$ tal que $f_i(me_i) = f(m)e_i$.

1.3. Módulos y Dimensión Proyectiva

En esta sección se trabajará con K-álgebras de dimensión finita (aunque algunos resultados también son válidos para K-álgebras de dimensión infinita) y con la categoría de módulos finitamente generados. Se definirán módulos proyectivos, resoluciones proyectivas y dimensión proyectiva de un módulo. De forma similar se puede definir resolución inyectiva y dimensión inyectiva de un módulo, pero no se desarrollará en este trabajo. Por más detalles ver [13].

1.3.1. Módulos Proyectivos

Definición 1.3.1 *1) Un A-módulo P es* ***proyectivo*** *si para todo epimorfismo* $h : M \to N$ *de A-módulos, la aplicación* $Hom_A(P, h) : Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, N)$ *es sobreyectiva. Esto significa que para todo epimorfismo* $h : M \to N$ *y para todo* $f \in Hom_A(P, N)$ *existe un* $f' \in Hom_A(P, M)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

2) Si X e Y son dos A-módulos, decimos que un epimorfismo $f : X \to Y$ *es un* ***epimorfismo esencial*** *si para todo homomorfismo* $g : M \to X$ *tal que* $fg : M \to Y$ *es un epimorfismo, se tiene que g es un epimorfismo. Si X es un A-módulo, la cubierta proyectiva de X es un par* $(P(X), \varphi)$*, donde* $P(X)$ *es un A-módulo proyectivo y* $\varphi : P(X) \to X$ *es epimorfismo esencial. En ocasiones haremos referencia a la cubierta proyectiva de X como P(X).*

3) Sea X un A-módulo, llamaremos ***sizigia*** *de X al kernel del mapa* $\varphi : P(X) \to X$ *donde* $(P(X), \varphi)$ *es la cubierta proyectiva de X.*
Notaremos $Ker(\varphi) := \Omega(X)$*.*

Observación 1.3.2 *Si bien en este trabajo no profundizaremos en ello, de forma similar se pueden definir los módulo inyectivos. Un A-módulo I es inyectivo si para todo monomorfismo* $i : M \to N$ *de A-módulos, la aplicación* $Hom_A(i, I) : Hom_A(N, I) \to Hom_A(M, I)$ *es sobreyectiva.*

Proposición 1.3.3 *Si A es un álgebra de dimensión finita y M un A-módulo finitamente generado, entonces M admite cubierta proyectiva y es única a menos de isomorfismos.*

Definición 1.3.4 *El radical* ***rad(M)*** *de un A-módulo M, es la intersección de todos sus submódulos maximales.*

Proposición 1.3.5 *Sea M un A-módulo finitamente generado, de un álgebra de Artin A. Entonces se tiene que rad(M)=rad(A)M.*

Demostración: Ver en [3, Cap. 1, Proposición 3.5].

Proposición 1.3.6 *Sea X un A-módulo, entonces:*

1)El par $(P(X), \varphi)$ *es una cubierta proyectiva si y solo si el mapa inducido* $\varphi' : P(X)/rad(P(X)) \to X/rad(X)$ *es un isomorfismo.*

2) Si P es un módulo proyectivo, entonces el epimorfismo natural $P \to P/rad(P)$ es una cubierta proyectiva.

Demostración: Ver en [3, Cap. 1, Proposición 4.3 y Teorema 4.4].

Definición 1.3.7 *Sea A un álgebra de Artin y M in$A$-mod, llamaremos **top(M)** al cociente $M/rad(M)$.*

1.3.2. Resoluciones Proyectivas

Una resolución proyectiva de un A-módulo M es una sucesión exacta

$$... \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} ... \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es proyectivo. Todo módulo admite una resolución proyectiva, pero esta no es única.

Un A-módulo M tiene dimensión proyectiva menor o igual a n ($dp(M) \leq n$) si existe una resolución proyectiva finita

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Si no existe una resolución proyectiva finita para M diremos que $dp(M) = \infty$ y en caso de que exista diremos que $dp(M) = n$, si n es la longitud de la resolución proyectiva más corta.

Una resolución proyectiva de un módulo M se dice minimal si P_0 es la cubierta proyectiva de M y para cada $i \geq 1$, P_i es la cubierta proyectiva de $ker(d_{i-1})$. En particular $dp(M) = n$ si y solo si la resolución proyectiva minimal de M tiene longitud n.

Llamaremos *sizigia enésima* de M al $ker(d_{n-1})$, y la denotaremos como $\Omega^n(M)$, donde

$$... \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es la resolución proyectiva minimal de M. En particular $\Omega^1(M) := \Omega(M)$ y $\Omega^0(M) := M$.

Definición 1.3.8 *Sea A una K-álgebra:*

*1) Llamaremos **dimensión global** de A, que denotaremos por $gldim(A)$, al supremo de las dimensiones proyectivas de los A-módulos finitamente generados*

$$gldim(A) = sup\{pd(X)|X \in A - mod\}.$$

*2) Llamaremos **dimensión finitista** de A, que denotaremos por $findim(A)$ al supremo de las dimensiones proyectivas de los A-módulos finitamente generados que tienen dimensión proyectiva finita*

$$findim(A) = sup\{pd(X)|\ X \in A - mod\ y\ pd(X) < \infty\}.$$

*3) Si C es una subcategoría de A-mod y n un número natural, se el define conjunto $\Omega_A^n(C) := \{\Omega_A^n(X)|X \in C\}$. Diremos que **C** es **n-A-sizigia-finita**, o simplemente n-sizigia-finita si no hay confusión, si el número de sumandos directos de $\Omega_A^n(C)$ indescomponibles no isomorfos es finito, o sea que existe un A-módulo N tal que $\Omega_A^n(C) \subset add(_AN)$. Diremos que C es A-sizigia-finita si existe un número natural n tal que C es n-A-sizigia-finita.*

1.4. Radical de Jacobson

En esta sección se definirá el radical de Jacobson de un anillo y algunas de sus propiedades. Este ideal será de gran relevancia en los principales resultados que se presentarán en el Capítulo 3. En esta sección en particular los anillos no son necesariamente anillos con unidad. Las demostraciones de esta sección se pueden encontrar en [8, 2.IX].

Definición 1.4.1 *Un ideal a izquierda I de un **anillo** R **es regular** si existe $e \in R$ tal que $a - ae \in I$ para todo $a \in R$. Análogamente, decimos que un ideal a derecha J es regular si existe $e \in R$ tal que $a - ea \in J$ para todo $a \in R$.*

Es importante observar que todo ideal a izquierda (derecha) de un anillo con unidad es regular. Para ello basta tomar $e = 1_R$.

Definición 1.4.2 *Decimos que un elemento a de un anillo R es casi-regular a izquierda si existe $r \in R$ tal que $r + a + ra = 0$. En estas condiciones diremos que el elemento r es casi-inverso a izquierda de a. Análogamente se define elemento casi-regular a derecha, casi-inverso a derecha. Un ideal I (izquierdo, derecho o bilateral) de R es casi-regular si todo elemento de I es casi-regular.*

Observación 1.4.3 *Si R es un anillo con identidad, entonces $a \in R$ es casi regular a izquierda (derecha) si y solo si $1_R + a$ es invertible a izquierda (derecha) (tener en cuenta que $r + a + ra = 0$ si y solo si $(r + 1_R)(1_R + a) = 1_R$).*

Proposición 1.4.4 *Si R es un anillo, entonces existe un ideal $rad(R)$ tal que:*

1. *$rad(R)$ es la intersección de todos los anuladores a izquierda de los R-módulos simples a izquierda.*
2. *$rad(R)$ es la intersección de todos los ideales regulares a izquierda de R.*
3. *$rad(R)$ es la intersección de todos los ideales primitivos a izquierda de R.*
4. *$rad(R)$ es un ideal a izquierda casi-regular que contiene todo ideal casi-regular a izquierda de R.*
5. *los ítems anteriores son verdaderos si reemplazamos "izquierda" por "derecha".*

La definición de ideal primitivo se puede encontrar en [8, 2.IX, pág. 425]

Definición 1.4.5 *Sea R un anillo, llamamos **Radical de Jacobson** de R al ideal $rad(R)$.*

Definición 1.4.6 *Un elemento a de un anillo R es **nilpotente** si $a^n = 0$ para algún entero positivo n. Un ideal I de R es **nil** si todo elemento de I es nilpotente. A su vez I es nilpotente si $I^n = 0$ para algún entero positivo n.*

Proposición 1.4.7 *Si R es un anillo, entonces todo ideal a izquierda o derecha nil está contenido en $rad(R)$.*

La demostración de la siguiente proposición es un ejercicio en [8].

Proposición 1.4.8 *Sea R un anillo con identidad y $A := M_n(R)$, n entero positivo, el anillo de las matrices $n \times n$ cuyas entradas pertenecen a R. Entonces $rad(M_n(R)) = M_n(rad(R))$.*

Demostración: La demostración se realizará para $n = 2$, pero el procedimiento es válido para todo $n \geq 2$. Sea M un R-módulo, entonces $M_2 = M \oplus M$ visto como el vector columna es un A-módulo (con la multiplicación habitual entre matrices). Esta afirmación es válida ya que si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} \in M_2$, entonces $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xm + ym' \\ zm + tm' \end{pmatrix}$, y como M es un R-módulo se tiene que $xm + ym' \in M$ y $zm + tm' \in M$. Por lo tanto la multiplicación por A es cerrada en M_2. Además por propiedades de operaciones con matrices y por ser M un R-módulo ser verifica que:

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2, \ \ \forall r \in A$ y $m_1, m_2 \in M_2$.
- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m, \ \ \forall r_1, r_2 \in A$ y $m \in M_2$.
- $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2) \cdot m, \ \ \forall r_1, r_2 \in A$ y $m \in M_2$.
- $1_A \cdot m = m, \ \ \forall m \in M_2$.

Probemos ahora que si M es un R-módulo simple entonces M_2 es un A-módulo simple. Para ello se probará por absurdo que M_2 no tiene ningún submódulo propio. Ahora supongamos que N es un submódulo propio de M_2, entonces se define $M_N =: \left\{ a \in M : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in N, \ para \quad algún \quad b \in M \right\}$.

Si $a \in M_N$ y $\lambda \in R$ entonces existe $b \in M$ tal que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in N$ y como $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ b \end{pmatrix} \in N$, entonces $\lambda a \in M_N$.

Si $a \in M_N$ y $a' \in M_N$, entonces existen b y b' tal que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in N$ y $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in N$ y como $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \in N$ se tiene que $a + a' \in M_N$.

De los últimos resultados podemos deducir que M_N es un submódulo de M. Ahora si M_N es un submódulo propio de M llegamos a un absurdo ya que M es simple. Si M_N es igual a M, entonces para todo $a \in M$ existe $b \in M$ tal que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in N$, entonces $\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} \in N$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}$-$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in N \quad \forall a \in M$, además $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \in N \ \forall a \in M$. Por lo tanto tendríamos que $N = M_2$ lo que es absurdo porque N es un submódulo propio de M_2. Análogamente si $M_N = \{0\}$ tendríamos que $N = \{0\}$ lo que es absurdo. Por lo expuesto anteriormente deducimos que no existe un submódulo propio de M_2 y por lo tanto M_2 es un módulo simple.

Ahora estamos en condiciones de probar que $rad(M_2(R)) \subset M_2(rad(R))$. Sea M un R-módulo simple, entonces, por ser $\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}$ simple, se cumple que $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yb \\ za + tb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_2$ y todo $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in rad(M_2(R))$. Considerando $b = 0$ se tiene que $xa = 0$ para todo $a \in M$, entonces $xM = 0$ para todo R-módulo M y por lo tanto x pertenece a la intersección de todos los anuladores de R-módulos a izquierda simples, lo que significa, por proposición

1.4.4, que $x \in rad(R)$. Análogamente se tiene que $y, z, t \in rad(R)$.

Por último probemos que $M_2(rad(R)) \subset rad(M_2(R))$. Por ser $rad(R)$ un ideal y por cómo se define el producto de matrices se tiene que $\begin{pmatrix} rad(R) & 0 \\ rad(R) & 0 \end{pmatrix} \subset M_2(rad(R))$ es un ideal. Sea $r_1 \in rad(R)$ entonces existe $x \in R$ tal que $x + r_1 + xr_1 = 0$ y existe $q \in R$ tal que q es el inverso de $(1+r_1)$ por ser $rad(R)$ casi regular. Sea $r_2 \in rad(R)$ se define $z =: -r_2 \cdot q$ y de esta forma se verifica la siguiente igualdad $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ya que $x+r_1+xr_1 = 0$ y $z+r_2+zr_1 = -r_2.q+r_2+(-r_2).q.r_1 = -r_2.(q+q.r_1)+r_2 = -r_2.(q.(1+r_1))+r_2 = -r_2 + r_2 = 0$) lo que implica que el ideal $\begin{pmatrix} rad(R) & 0 \\ rad(R) & 0 \end{pmatrix}$ es casi regular. De forma análoga se puede probar que $\begin{pmatrix} 0 & rad(R) \\ 0 & rad(R) \end{pmatrix}$ es un ideal casi regular y deducir que $\begin{pmatrix} rad(R) & 0 \\ rad(R) & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & rad(R) \\ 0 & rad(R) \end{pmatrix} = M_2(rad(R))$ es un ideal casi regular y por lo tanto, por proposición 1.4.4, se tiene que $M_2(rad(R)) \subset rad(M_2(R))$. $\square$

1.5. Producto Tensorial

En esta sección se definirá el producto tensorial entre dos módulos, donde R representará un anillo con unidad, y se enunciarán algunas propiedades que serán utilizadas en las demostraciones de los principales resultados de este trabajo. Los enunciados y demostraciones que se presentarán en este capítulo se pueden encontrar en [13].

Definición 1.5.1 *Dado un anillo R y los módulos A_R y ${}_RB$, el* ***producto tensorial*** *es el grupo abeliano $A \otimes_R B$ y una función R-biaditiva $h : A \times B \to A \otimes_R B$ tal que para todo grupo abeliano G y toda función R-biaditiva $f : A \times B \to G$, existe un único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\tilde{f} : A \otimes_R B \to G$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.5.2 *Si R es un anillo y A_R y ${}_RB$ son módulos, entonces el producto tensorial existe y es único.*

Proposición 1.5.3 *Sea $f : A_R \to A'_R$ y $g : {}_RB \to {}_RB'$ mapas de R-módulos a derecha y R-módulos a izquierda respectivamente. Entonces existe un único $\mathbb{Z}$-homomorfismo, denotado por $f \otimes g : A \otimes {}_RB \to A' \otimes {}_RB'$, con $f \otimes g : a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.*

Proposición 1.5.4 *Dado el R-módulo A_R, existe un funtor aditivo F_A : R-Mod $\to$ Ab (donde R-Mod es la categoría de R-módulos a izquierda y Ab es la categoría de grupos abelianos) definido por $F_A(B) = A \otimes_R B$ y $F_A(g) = 1_A \otimes g$, donde $g : B \to B'$ es un mapa de R-módulos. Análogamente se obtiene el funtor F_B : Mod-R $\to$ Ab dado un R-módulo ${}_RB$ (donde Mod-R es la categoría de R-módulos a derecha). Podemos decir que $F_B := - \otimes B$.*

Proposición 1.5.5 *Sea A un R-módulo, y sea $B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos a izquierda. Entonces*

$$A \otimes_R B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Definición 1.5.6 *Si B es un R-módulo y $... \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \to 0$ es una resolución proyectiva del R-módulo A, entonces*

$$Tor_n^R(A, B) = \frac{ker(d_n \otimes 1_B)}{im(d_{n+1} \otimes 1_B)}.$$

Proposición 1.5.7 *Si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos, entonces existe una sucesión exacta larga para todo R-módulo a izquierda B*

$$...Tor_2^R(A', B) \longrightarrow Tor_2^R(A, B) \longrightarrow Tor_2^R(A'', B) \longrightarrow Tor_1^R(A', B) \longrightarrow Tor_1^R(A, B) \longrightarrow$$

$$Tor_1^R(A'', B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow 0.$$

Proposición 1.5.8 *Si un R-módulo F es proyectivo, entonces $Tor_n^R(F, M) = 0$ para todo $n \geq 1$ y para todo R-módulo a izquierda M.*

Definición 1.5.9 *Sean R y S anillos y sea M un grupo abeliano. Decimos que M es un (R, S)-**bimódulo** denotado por ${}_RM_S$, si M es un R-módulo a izquierda y un S-módulo a derecha, y las dos multiplicaciones escalares están relacionadas por la ley asociativa, o sea $r(ms) = (rm)s$ para todo $r \in R, m \in M$ y $s \in S$.*

Proposición 1.5.10 *Sea S un subanillo de un anillo R.*

1. *Dado un bimódulo ${}_RA_S$ y un módulo a izquierda ${}_SB$, entonces el producto tensorial $A \otimes_S B$ es un R-módulo a izquierda, donde $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b$. Análogamente, dados A_S y ${}_SB_R$, el producto tensorial $A \otimes_S B$ es un R-módulo a derecha, donde $(a \otimes b)r = a \otimes (br)$.*

2. *El anillo R es un (R,S)-bimódulo y si M es un S-módulo a izquierda, entonces $R \otimes_S M$ es un R-módulo a izquierda.*

Proposición 1.5.11 *Existe un R-isomorfismo natural $\phi_M : R \otimes_R M \to M$, para todo R-módulo a izquierda M donde $\phi_M : r \otimes m \to rm$.*

Proposición 1.5.12 *Si P es un R-módulo proyectivo a izquierda e I es un ideal a derecha de R, entonces el $\mathbb{Z} - homomorfismo$ $\theta_P : I \otimes_R P \to IP$, dado por $i \otimes p \mapsto ip$, es un isomorfismo.*

Definición 1.5.13 *Si R es un anillo, entonces un R-módulo a derecha M es* ***plano*** *si para toda sucesión exacta de R-módulos a izquierda*

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0$$

se tiene que

$$0 \longrightarrow M \otimes_R B' \xrightarrow{1_M \otimes i} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes p} M \otimes_R B'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Para R-módulos a izquierda se define de forma similar.

Proposición 1.5.14 *Sea R un anillo, entonces:*

1. *El R-módulo R es plano.*
2. *La suma directa $\bigoplus_j M_j$ de R-módulos es plano si y solo si todos los M_j son planos.*
3. *Todo R-módulo proyectivo es plano.*

1.6. Álgebra Homológica

Esta sección tiene como objetivo recordar algunas definiciones y propiedades del álgebra homológica que serán mencionadas en los próximos capítulos. En primer lugar se presentarán resultados relativos a sucesiones exactas que se obtienen a partir de una sucesión exacta dada. Luego se repasarán las principales propiedades de los funtores Hom y Ext. Por último se presentarán los conceptos básicos del álgebra homológica relativa, como el concepto de módulos proyectivos relativos y dimensiones proyectivas relativas.

1.6.1. Rotación de Sucesiones Exactas

Proposición 1.6.1 *Sea Λ un álgebra de Artin y X un Λ-módulo, para toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde P es un Λ-módulo proyectivo, se cumple que Z es isomorfo a $\Omega(X) \oplus Q$, siendo Q un Λ-módulo proyectivo.

Demostración: Sea X un Λ-módulo, consideremos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega(X) \longrightarrow P(X) \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

donde P es un Λ-módulo proyectivo y $P(X)$ es la cubierta proyectiva de X. Por propiedad de la cubierta proyectiva sabemos que existe un epimofismo $f : P \to P(X)$ el cual nos permite obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, leftrightarrow, "i"] \arrow[d, "g'"] & Q \arrow[r] \arrow[d, shift left, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f'"] & P \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g^{-1}"] \arrow[d, shift left, "f"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(X) \arrow[r] \arrow[d] & P(X) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión correspondiente a la segunda columna se escinde por ser $P(X)$ proyectivo. Además, i es un isomorfismo. Como la segunda columna se escinde, tenemos que $Q \oplus P(X) \simeq P$ por lo tanto Q es un Λ-módulo proyectivo. Por otro lado, como $lg' = gi$, se tiene que $ig^{-1}lg' = id_K$ por lo tanto la primer columna también se escinde. Por lo tanto se tiene que $Z \simeq K \oplus \Omega(X) \simeq Q \oplus \Omega(X)$, siendo Q un Λ-módulo proyectivo. $\square$

El enunciado y demostración del siguiente lema se puede encontrar en [6, pág. 99] o [13, 6.12]

Lema 1.6.2 *(Lema de la Serpiente). Sea Λ un álgebra de Artin, consideremos la categoría Λ-mod* [1]*. Dado el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow ker f \longrightarrow ker g \longrightarrow ker h \longrightarrow coker f \longrightarrow coker g \longrightarrow coker h \longrightarrow 0.$$

Una aplicación del lema anterior es poder construir sucesiones exactas cortas a partir de una sucesión exacta corta dada como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.6.3 *[16] Sea Λ un álgebra de Artin y $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en mod-Λ. Entonces*

1. *Existe $P \in proj\Lambda$ tal que $0 \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow \Omega Z \oplus P \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.*
2. *Existe $P' \in proj\Lambda$ tal que $0 \longrightarrow \Omega^2 Z \longrightarrow \Omega X \oplus P' \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.*
3. *Existe $P'' \in proj\Lambda$ tal que $0 \longrightarrow \Omega Z \longrightarrow X \oplus P'' \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.*

Demostración. 1. Sea $P(Y)$ la cubierta proyectiva de Y, consideremos el siguiente diagrama conmutativo exacto

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega Y \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Omega Z \oplus P \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(Y) \arrow[r, equal] \arrow[d, "t"'] & P(Y) \arrow[r] \arrow[d, "ht"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"'] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "h"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

[1]Este resultado es válido en general para categorías abelianas. En [13] se puede encontrar el desarrollo de este concepto.

Aplicando el Lema de la Serpiente obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow \Omega Z \oplus P \longrightarrow X \longrightarrow 0 \, .$$

2. Se puede demostrar considerando la sucesión anterior y aplicando el mismo procedimiento.

3. Sea $P(Z)$ la cubierta proyectiva de Z, entonces existe un morfismo $\mu : P(Z) \to Y$ que determina el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P(Z) \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[d, "\epsilon"] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"'] & Y \arrow[r, "h"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado que el mapa ϵ es sobreyectivo, para todo $y \in Y$ existe $p \in P(Z)$ tal que $h(y) = \epsilon(p) = h\mu(p)$ y por lo tanto $0 = h(y) - h\mu(p) = h(y - \mu(p))$, luego $y - \mu(p) \in$ Ker h =Im j por lo que podemos afirmar que $y - \mu(p) = j(x)$ para algún $x \in X$, entonces $y = j(x) + \mu(p)$. Dada que la última igualdad es para todo $y \in Y$ podemos definir el epimorfismo $g : X \oplus P(Z) \to Y$ dado por $g(x + p) := j(x) + \mu(p)$.

Por otro lado tenemos que $x + p \in$ Ker $g \leftrightarrow j(x) + \mu(p) = 0 \leftrightarrow -j(x) = \mu(p) \leftrightarrow j(-x) = \mu(p) \leftrightarrow h(\mu(p)) = 0 \leftrightarrow \epsilon(p) = 0 \leftrightarrow p \in \Omega(Z)$, por lo tanto Ker $g \cong \Omega Z$. Esto nos permite obtener la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega Z \longrightarrow X \oplus P(Z) \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \, .$$

□

Lema 1.6.4 *(Lema de la Herradura) Dado el siguiente diagrama de A módulos*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
 & P_1' \arrow[d] & & P_1'' \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[d] & & P_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "q"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde las columnas son resoluciones proyectivas y la sucesión horizontal es exacta, entonces existe una resolución proyectiva de M y una cadena de mapas tal que el siguiente diagrama tiene líneas y columnas exactas y es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "q_0"] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Ver Proposición 6.24 en [13].

1.6.2. Funtores Hom y Ext

Recordemos que si A es un anillo, para cada $M \in A$-mod, el funtor contravariante $Hom_A(-, M) : A\text{-mod} \rightarrow Ab$ se define como $Hom_A(-, M)(X) = Hom_A(X, M)$, el cual es el grupo abeliano determinado por todos los homomorfismos de X en M, y si $f \in Hom_A(X, Y)$ en A-mod se tiene que $f^* := Hom_A(f, M)$:

$Hom_A(Y,M) \to Hom_A(X,M)$ definido como $Hom_A(f,M)(g) = gf$ para todo $g \in Hom_A(Y,M)$.

Proposición 1.6.5 *Sea* $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta en A-mod y X un A-módulo. Entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow Hom_A(L,X) \xrightarrow{g^*} Hom_A(N,X) \xrightarrow{f^*} Hom_A(M,X).$$

En particular f^* es sobreyectivo si y solo si X es un A-módulo inyectivo. La demostración de estos resultados y los equivalentes para módulos proyectivos se pueden encontrar en los capítulos 2 y 3 de [13].

A continuación se dará una breve descripción del funtor Ext y la obtención de las sucesiones exactas largas para dicho funtor. Para profundizar en el tema se puede ver capítulos 6 y 7 en [13] .

Definición 1.6.6 *Sea* $... \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} X \longrightarrow 0$ *una resolución proyectiva del A-módulo X y B un A-módulo, entonces definimos*

$$ext_A^n(X,B) := \frac{ker(d_{n+1}{}^*)}{Im(d_n{}^*)},$$

donde $d_n{}^* : Hom_A(P_{n-1},B) \to Hom_A(P_n,B)$ *se define de forma usual como* $d_n{}^* : f \mapsto fd_n$.

Se define el funtor $ext_A^n(-,B) : A\text{-}mod \to Ab$ *tal que* $ext_A^n(-,B)(X) := ext_A^n(X,B)$ *para todo* $X \in A$*-mod. Si* $f \in Hom_A(M,N)$ *entonces* $ext_A^n(f)(\alpha_n + Im(d_{n-1}{}^*)) = \alpha_n f + Im(d_{n-1}{}^*)$ *para todo* $\alpha_n \in ker(d_n{}^*)$.

Proposición 1.6.7 *Si* $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de A-módulos, entonces para todo A-módulo Y, existe una sucesión exacta larga de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow Hom_A(C'',Y) \longrightarrow Hom_A(C,Y) \longrightarrow Hom_A(C',Y) \longrightarrow$$

$$ext_A^1(C'',Y) \longrightarrow ext_A^1(C,Y) \longrightarrow ext_A^1(C',Y) \longrightarrow ...$$

Observación 1.6.8 *Sean R y S dos anillos,* ${}_RM_S$ *un (R,S)-bimódulo y* $f \in Hom_R(M,N)$*. Entonces, para todo* $s \in S$*, se puede definir la multiplicación de s por* $f \in Hom_R(M,N)$ *de la siguiente forma:*

$$sf : x \longmapsto f(xs) \ (x \in M).$$

La multiplicación está bien definida por ser $sf \in Hom_R(M,N)$, *ya que* $(sf)(rx) = f((rx)s) = f(r(xs)) = r(f(xs)) = r(sf)(x)$. *Además,* $Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$ *tiene estructura de S-módulo a izquierda con la multiplicación definida anteriormente, donde la acción a izquierda de S sobre* $Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$ *es heredada de la acción a derecha de S sobre* ${}_RM_S$.

Análogamente, si ${}_RN_S$ *es un (R,S)-bimódulo, se tiene que* $Hom_R({}_RM, {}_RN_S)$ *es un S-módulo a derecha.*

1.6.3. Álgebra Homológica Relativa

Los principales resultados de esta sección son extraídos de [9].

Proposición 1.6.9 *Sean A y B álgebras de Artin. Todo homomorfismo de álgebras* $\varphi : B \to A$ *tal que* $\varphi(1_B) = 1_A$ *induce un funtor covariante* $\mathcal{F}$: *A-mod* $\to$ *B-mod, el cual es exacto y aditivo.*

Demostración: Sea ${}_AM \in$ *A-mod* definimos $\mathcal{F}({}_AM) = {}_BM$, siendo ${}_BM = {}_AM$ y $b.m = \varphi(b).m$. Probemos que ${}_BM \in$ *B-mod*:
1) $b.(m_1+m_2) = \varphi(b).(m_1+m_2) = \varphi(b).m_1+\varphi(b).m_2 = b.m_1+b.m_2$, $\forall m_1, m_2 \in {}_BM$ y $b \in B$.
2) $(b_1 + b_2).m = \varphi(b_1 + b_2).m = (\varphi(b_1) + \varphi(b_2)).m = \varphi(b_1).m + \varphi(b_2).m = b_1.m + b_2.m$ $\forall\ b_1, b_2 \in B$ y $m \in {}_BM$.
3) $1_B.m = \varphi(1_B).m = 1_A.m = m$, $\forall m \in {}_BM$.
4) $b_1(b_2.m) = \varphi(b_1).(\varphi(b_2).m) = (\varphi(b_1).\varphi(b_2)).m = \varphi(b_1.b_2).m = (b_1.b_2).m$, $\forall\ b_1, b_2 \in B$ y $m \in {}_BM$.

Si $f : {}_AM \to {}_AN$ es un morfismo de A-módulos, entonces se define $\mathcal{F}(f) : {}_BM \to {}_BN$ como $\mathcal{F}(f)(m) = f(m)$. Probemos que $\mathcal{F}(f)$ es un morfismo de B-módulos:
1) $\mathcal{F}(f)(m_1 + m_2) = f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) = \mathcal{F}(f)(m_1) + \mathcal{F}(f)(m_2)$. $\forall m_1, m_2 \in {}_BM$.
2) $\mathcal{F}(f)(b.m) = f(b.m) = f(\varphi(b).m) = \varphi(b).f(m) = b.\mathcal{F}(f)(m)$ para todo $b \in B$ y $m \in {}_BM$.

Veamos que el funtor $\mathcal{F}$ es exacto. Sea $0 \longrightarrow {}_AX \xrightarrow{f} {}_AY \xrightarrow{g} {}_AZ \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos, como ya vimos que todo morfismo de A-módulos lo podemos ver como un morfismo de B-módulos, tenemos la siguiente sucesión de B-módulos ${}_BX \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} {}_BY \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} {}_BZ$, la cual es una sucesión exacta corta por ser $\mathcal{F}(f)(x) = f(x)$ y $\mathcal{F}(g)(y) = g(y)$.

Por último veamos que el funtor $\mathcal{F}$ es aditivo. Si ${}_AX =_A M \oplus_A N \in A$-*mod* se tiene que ${}_BX = \mathcal{F}({}_AM \oplus_A N) = {}_B({}_AM \oplus_A N) =_B M \oplus_B N \in B$-*mod*. $\square$

En resumen, si A y B son álgebras de Artin, todo homomorfismo de álgebras $\varphi : B \to A$ tal que $\varphi(1_B) = 1_A$ induce un funtor covariante $\mathcal{F} : A$-*mod* $\to B$-*mod* donde cada A-módulo M lo vemos como un B-módulo, siendo $b.m = \varphi(b).m$ para todo $b \in B$ y $m \in M$. Si $f :_A M \to_A N$ es un morfismo de A-módulos, entonces $\mathcal{F}(f) :_B M \to_B N$ es un morfismo de B-módulos, donde $\mathcal{F}(f)(m) = f(m)$. Además notemos que $\varphi(B)$ es un subanillo de A.

Definición 1.6.10 *Una sucesión exacta de A-módulos $(t_i : M_i \to M_{i-1})$ es **(A,B)-exacta** si para cada $i \in \mathbb{Z}$ se cumple que $Ker(t_i)$ es un sumando de M_i como B-módulo.*

Proposición 1.6.11 *Sea $(t_i : M_i \to M_{i-1})$ una sucesión exacta de A-módulos, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *La sucesión es (A,B)-exacta.*
2. *Existe una B-homotopía, lo que significa que existen B-homomorfismos $s_i : M_i \to M_{i+1}$ tales que $t_i = t_i \circ s_{i-1} \circ t_i, \forall i$.*

Definición 1.6.12 *Un A-módulo M es **(A,B)-proyectivo** (proyectivo relativo) si para toda sucesión (A,B)-exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$ y todo A-homomorfismo $g : M \to Z$ existe un A-homomorfismo $g' : M \to Y$ tal que $q \circ g' = g$. Análogamente decimos que un A-módulo J es (A,B)-inyectivo (inyectivo relativo) si para cualquier A-homomorfismo $h : X \to J$, existe un A-homomorfismo $h' : Y \to J$ tal que $h' \circ p = h$.*

Observación 1.6.13 *Al igual que los módulos proyectivos, los módulos proyectivos relativos cumplen que la suma directa de módulos proyectivos relativos es un módulo proyectivo relativo, y que todo sumando de un módulo proyectivo relativo es un módulo proyectivo relativo.*

Se denotará la clase de todos los módulos (A,B)-inyectivos por $\mathcal{I}(A,B)$ y la de todos los módulos (A,B)-proyectivos por $\mathscr{P}(A,B)$.

Lema 1.6.14 *Si $\varphi : B \to A$ es un homomorfismo de álgebras que preserva la identidad, entonces:*
1) Para todo $N \in B$-mod, el A-módulo $A \otimes_B N$ es (A,B)-proyectivo.
2) Para todo $I \in B$-mod, el A-módulo $Hom_B(A,I)$ es (A,B)-inyectivo.

Demostración: Solo se planteará la demostración de 1), la demostración de 2) es similar. Si $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$ es una sucesión (A,B)-exacta, entonces X es un sumando de Y como B-módulo, por lo que la sucesión anterior se escinde como sucesión de B-módulos. Por lo tanto para todo $f \in Hom_B(N,Z)$ existe $f' \in Hom_B(N,Y)$ tal que $qf' = f$.

Consideremos los funtores covariantes $Hom_A(A \otimes_B N, -) : A-\text{mod} \to Ab$ (donde Ab es la categoría de grupos abelianos) tal que $Hom_A(A \otimes_B N, -)(M) = Hom_A(A \otimes_B N, M)$ y $Hom_B(N,-) : B-\text{mod} \to Ab$ tal que $Hom_A(N,-)(M) = Hom_A(N,M)$ y veamos que existe un isomorfismo natural $\tau = (\tau_M : Hom_A(A \otimes_B N, M) \to Hom_B(N,M))_{M \in B-mod}$ tal que la correspondencia está definida por $k \to k_1$ donde $k_1(n) = k(1 \otimes n)$ para todo $n \in N$. En primer lugar se tiene que $\tau(k+k')(n) = (k+k')(1 \otimes n) = k(1 \otimes n) + k'(1 \otimes n) = \tau(k)(n) + \tau(k)(n)$ por lo tanto $\tau(k+k') = \tau(k) + \tau(k')$. Ahora veamos que τ es inyectiva: como $k(a \otimes n) = k(a(1 \otimes n)) = a.k(1 \otimes n)$, si $\tau(k)(n) = k(1 \otimes n) = 0$ para todo $n \in N$, entonces $k = 0$. Probemos τ es sobreyectiva: sea $k_1 \in Hom_B(N,M)$ definimos $k \in Hom_A(A \otimes_B N, M)$ tal que $k(1 \otimes n) = k_1(n)$, de esta forma se tiene que $\tau(k) = k_1$. Ahora, por último, consideremos $h : M \to P$ un morfismo de $B-$módulos y observemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(A \otimes_B N, M) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_M"] \arrow[d, "Hom_A(A \otimes_B N, h)"] & Hom_B(N,M) \arrow[d, "Hom_B(N,h)"] \\
Hom_A(A \otimes_B N, P) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_P"] & Hom_B(N,P)
\end{tikzcd}$$

por un lado se tiene que $\tau_P(Hom_A(A \otimes_B N, h)(k))(n) = (Hom_A(A \otimes_B N, h)(k)(1 \otimes n)) = h(k(1 \otimes n))$ y por otro $Hom_B(N,h)(\tau_M(k))(n) = h(\tau_M(k)(n)) = h(k(1 \otimes n))$.

Retomando la demostración, considerando el morfismo $Y \xrightarrow{q} Z$ y el isomorfismo τ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(A \otimes_B N, Y) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_Y"] \arrow[d, "Hom_A(A \otimes_B N, q)"] & Hom_B(N,Y) \arrow[d, "Hom_B(N,q))"] \\
Hom_A(A \otimes_B N, Z) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau_Z"] & Hom_B(N,Z)
\end{tikzcd}$$

Dado que el mapa $Hom_B(N,q)$ es sobreyectivo y τ es un isomorfismo, se tiene que el mapa $Hom_A(A \otimes_B N, q)$ es sobreyectivo. $\square$

Proposición 1.6.15 *Si $\varphi : B \to A$ es un homomorfismo de álgebras que preserva la identidad, entonces:*

1) Un A-módulo P es (A,B)-proyectivo si y solo si es sumando de $A \otimes_B P$ como A-módulo.
2) Un A-módulo M es (A,B)-inyectivo si y solo si es sumando de $Hom_B(A,M)$ como A-módulo.

Demostración: 1) Dado un A-módulo P, consideremos el A-homomorfismo natural $r : A \otimes_B P \to P$ dado por $r(a \otimes p) = a.p$. Este mapa define la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K_P \longrightarrow A \otimes_B P \longrightarrow P \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

la cual es una sucesión (A,B)-exacta, pues el mapa $t : P \to A \otimes_B P$ dado por $t(m) = 1 \otimes m$ es una B-retracción ya que $r \circ t(m) = r(1 \otimes m) = m$ (observemos que $t(b.m) = 1 \otimes b.m = 1 \otimes \varphi(b).m = 1.\varphi(b) \otimes m = \varphi(b)1 \otimes m = \varphi(b).(1 \otimes m) = \varphi(b).t(m) = b.t(m)$, por lo que el mapa t es un morfismo de B-módulos). Dado que la sucesión (1.1) es (A,B)-exacta y $A \otimes_B P$ es proyectivo relativo por el lema 1.6.14, se tiene que P es (A,B)-proyectivo si y solo si la sucesión de A-módulos (1.1) escinde. Por lo tanto P es (A,B)-proyectivo si solo si es un sumando de $A \otimes_B P$.

2) Sea M un módulo (A,B)-inyectivo. Considerando la identificación natural $M \simeq Hom_A(A,M) \subseteq Hom_B(A,M)$ dada por $s : m \mapsto (a \mapsto a.m)$. Se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{s} Hom_B(A,M) \longrightarrow Hom_B(A,M)/M \longrightarrow 0$$

Esta sucesión resulta ser (A,B)-exacta pues el mapa $t : Hom_B(A,M) \to M$ dado por $t(f) = f(1)$ es una B-sección: $t \circ s(m) = s(m)(1) = 1.m = m$ (observemos que $t(b.f) = (b.f)(1) = f(b,1) = b.f(1) = b.t(f)$ por lo que el mapa t es un morfismo de B-módulos). Esto implica que M es un sumando de $Hom_B(A,M)$ como B-módulo, y por ser M (A,B)-inyectivo se tiene que M es un sumando de $Hom_B(A,M)$ como A-módulo.

Por otro lado por el lema 1.6.14 sabemos que $Hom_B(A,M)$ es (A,B)-inyectivo por lo tanto todo sumando es (A,B)-inyectivo. □

Definición 1.6.16 *Dado un A-módulo M, una **resolución** (A,B)**-proyectiva** (o resolución proyectiva relativa) para M es una sucesión (A,B)-exacta de la forma*

$$\ldots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $C_i \in \mathscr{P}(A,B)$ para todo $i \geq 0$.

Observación 1.6.17 *Todo A-módulo M posee una resolución (A,B)-proyectiva. Consideremos la sucesión (A,B)-exacta*

$$0 \longrightarrow K_M^1 \longrightarrow A \otimes_B M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

como ya vimos en la Proposición 1.6.15. Repitiendo el procedimiento con $M := K_M^1$ *se obtiene la sucesión* (A,B)*-exacta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_M^2 \arrow[r] & A \otimes_B K_M^1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \otimes_B M \arrow[r] & M \arrow[r] & 0\,. \\ & & & K_M^1 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Siguiendo este procedimiento se obtiene la siguiente resolución (A,B)*-proyectiva de M:*

$$\ldots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $C_0 = A \otimes_B M$ *y* $C_i = A \otimes_B K_M^i$ *para todo* $i > 0$. *Llamaremos resolución* (A,B)*-proyectiva estándar de M, a la sucesión obtenida con el procedimiento anterior.*

Definición 1.6.18 *Sea* $M \in A$*-mod, la* ***dimensión proyectiva relativa*** *de M es* $dpr(M) = \text{ínf}\{n|\, 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *es una resolución* (A,B)*-proyectiva de* $M\}$. *Si no existe ninguna resolución proyectiva relativa finita, entonces* $dpr(M) := \infty$.

Definición 1.6.19 *Sea* $\varphi : B \to A$ *un homomorfismo de álgebras que preserva la identidad, llamaremos:*
1) ***Dimensión global relativa*** *de* φ *a* $gl.dim(\varphi) = sup\{dpr(X)|X \in A\text{-}mod\}$.
2) $\boldsymbol{fin.dim(\varphi)}$= $sup\{dpr(X)|X \in A\text{-}mod,\ dp_A(X) < \infty\}$.
3) $\boldsymbol{re.fin.dim(\varphi)}$= $sup\{dpr(X)|X \in A\text{-}mod,\ dpr(X) < \infty\}$.

Las dimensiones anteriores cumplen las siguientes relaciones:

$$fin.dim(\varphi) \leq re.fin.dim(\varphi) \leq gl.dim(\varphi),$$

donde la primer desigualdad se debe a que todo A-módulo proyectivo es proyectivo relativo.

Definición 1.6.20 *Una* ***extensión de álgebras*** *es un homomorfismo de álgebras que preserva la identidad.*

Teorema 1.6.21 *Sea $\varphi : B \to A$ es una extensión de álgebras y $M \in A$-mod:*
1) Si A_B es plano, entonces $dp_A(M) \leq dpr(M) + gl.dim(B)$.
2) Si además $_BA$ es proyectivo, se cumple que

$$dp_B(M) \leq dp_A(M) \leq dpr(M) + dp_B(M).$$

Demostración: Si $... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ es una resolución proyectiva de M como B-módulo, por ser A_B plano, se tiene que $... \to A \otimes_B P_1 \to A \otimes_B P_0 \to A \otimes_B M \to 0$ es una resolución proyectiva de $A \otimes_B M$. Por lo tanto $dp(A \otimes_B M) \leq dp_B(M)$.

Podemos asumir que $dpr(M)$ es finita, ya que de no serlo las desigualdades a probar son evidentes. Se procederá por inducción en $dpr(M)$ tanto para la primer parte como para la segunda parte. Supongamos primero que $dpr(M) = 0$. En este caso M es (A, B)-proyectivo y por la Proposición 1.6.15 sabemos que M es un sumando de $A \otimes_B M$. Podemos afirmar entonces que $dp_A(M) \leq dp_A(A \otimes_B M) \leq dp_B(M)$.

Ahora asumamos que $dpr(M) > 0$, y consideremos la sucesión $(A, B)-$exacta estándar

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \otimes_B M \longrightarrow M \longrightarrow 0 . \qquad (1.2)$$

Dado que $A \otimes_B M$ es (A, B)-proyetivo, se tiene que $dpr(K) = dpr(M) - 1$. También, para todo $n > 0$ y todo A-módulo C, se tiene la sucesión exacta

$$Ext_A^{n-1}(A \otimes_B M, C) \to Ext_A^{n-1}(K, C) \to Ext_A^n(M, C) \to Ext_A^n(A \otimes_B M, C).$$

Ahora consideremos para la primera parte $n = dpr(M)+gl.dim(B)+1$ (suponiendo $gl.dim(B)$ finita ya que de lo contrario la desigualdad es evidente) y para la segunda parte $n = dpr(M)+dp_B(M)+1$. Dado que $dp(A\otimes_B M) \leq dp_B(M) < n-1$, los extremos de la sucesión anterior son 0, entonces

$$Ext_A^{n-1}(K, C) \approx Ext_A^n(M, C).$$

Ahora para probar la primera parte, considerando $n = dpr(M) + gl.dim(B) + 1$, como sabemos que $dpr(K) = dpr(M)-1$ y por inducción sabemos que $dp_A(K) \leq dpr(K) + gl.dim(B)$, se tiene que $dp_A(K) \leq dpr(M) - 1 + gl.dim(B) = n - 2$. Podemos concluir que $Ext_A^n(M, C) = 0$ para todo C, lo que implica que $dp_A(M) < n$ y por lo tanto $dp_A(M) \leq dpr(M) + gl.dim(B)$.

Para la segunda parte consideremos $n = dpr(M) + dp_B(M) + 1$ y que $_BA$ es proyectivo. Notemos que por ser $_BA$ proyectivo se tiene que toda resolución A-proyectiva también es una resolución B-proyectiva y por lo tanto $dp_B(M) \leq$

$dp_A(M)$ y $dp_B(A \otimes_B M) \le dp_A(A \otimes_B M) \le dp_B(M)$. Como (1.2) se escinde como sucesión de B-módulos se tiene que ${}_BK$ es un sumando de ${}_B(A \otimes_B M)$ y por lo tanto se cumple que $dp_B(K) \le dp_B(A \otimes_B M) \le dp_B(M)$. Ahora, como $dpr(K) = dpr(M) - 1$, por inducción tenemos que $dp_A(K) \le dpr(K) + dp_B(K)$, y además $dp_B(K) \le dp_B(M)$. Entonces $dp_A(K) \le dpr(M) - 1 + dp_B(K) = n - 2$. Podemos concluir que $Ext_A^n(M, C) = 0$ de donde se deduce que $dp_A(M) < n$ lo que implica que $dp_A(M) \le dpr(M) + dp_B(M)$. $\square$

El siguiente lema se puede encontrar [15].

Lema 1.6.22 *(Lema de Schanuel para sucesiones (A,B)-exactas). Sea $\varphi : B \to A$ una extensión de álgebras de Artin. Supongamos que*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0 \quad y$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow Q \xrightarrow{\pi'} X \longrightarrow 0$$

son sucesiones (A,B)-exactas tales que P y Q son (A,B)-proyectivos. Entonces $P \oplus K' \simeq Q \oplus K$.

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama de pull-back de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
Q \arrow[r, "\pi'"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Notemos que el diagrama anterior también corresponde a un pull-back de B-módulos. Además, dado que π' se escinde como morfismo de B-módulos, existe un morfismo de B-módulos $\alpha : X \to Q$ tal $\pi'\alpha = id$. Por lo tanto podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo de pull-back de B-módulos:

$$\begin{tikzcd}
& & P \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, bend right, "\alpha\pi"'] & & \\
0 \arrow[r] & Ker(\beta') \arrow[r] & H \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & Q \arrow[r, shift left, "\pi'"] & X \arrow[l, shift left, "\alpha"] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

La existencia del morfismo $\gamma : P \to H$ que queda determinada por ser $\pi i = \pi'\alpha\pi$ y cumple que $\beta'\gamma = i$. Por esto último podemos afirmar que β' se escinde, y como P es (A, B)-proyectivo se tiene que $H \simeq P \oplus Ker(\beta')$ en A-mod. Por lo tanto, por propiedad del pull-back, se tiene que $H \simeq P \oplus K'$, pues $ker(\beta') \cong K'$. De forma análoga se puede probar que $H \simeq Q \oplus K$ y por lo tanto se tiene que $Q \oplus K \simeq P \oplus K'$. □

Lema 1.6.23 *Sea $\varphi : B \to A$ una extensión de álgebras de Artin. Supongamos que*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \quad y$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_n \xrightarrow{g_n} Q_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} \ldots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

son sucesiones (A, B)-exactas en las cuales todos los P_i y Q_i son (A, B)-proyectivos para $0 \leq i \leq n$ donde n es un entero positivo. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo

$$M \oplus Q_n \oplus P_{n-1} \oplus \ldots \oplus C \simeq N \oplus P_n \oplus Q_{n-1} \oplus \ldots \oplus C'.$$

como A-módulos, donde $C = Q_0$ y $C' = P_0$ si n es un número par, y $C = P_0$ y $C' = Q_0$ si n es un número impar.

Demostración: Se demostrará por inducción en n utilizando como base inductiva lo probado en el Lema de Schanuel para sucesiones (A, B)-exactas. Se realizará para n par (para n impar se procede de igual forma).

Por hipótesis de la inducción sabemos que $Ker(g_{n-1}) \oplus P_{n-1} \oplus \ldots \oplus Q_0 \simeq Ker(f_{n-1}) \oplus Q_{n-1} \oplus \ldots \oplus P_0$. Sean $Z = P_{n-1} \oplus \ldots \oplus Q_0$ y $W = Q_{n-1} \oplus \ldots \oplus P_0$, se tienen las siguientes sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P_n \oplus W \arrow[r, "{(f_n,i)}"] & Ker(f_{n-1}) \oplus W \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & Q_n \oplus Z \arrow[r, "{(g_n,i)}"] & Ker(f_{n-1}) \oplus Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, aplicando el Lema de Schanuel relativo se tiene que $M \oplus Q_n \oplus Z \simeq N \oplus P_n \oplus W$. □

1.7. Contexto Morita

El objetivo de esta sección es presentar ideas y algunos resultados de lo que se conoce como Contexto Morita. Todos los resultados aquí enunciados podrán ser encontrados en [4]. Estos resultados serán utilizados en la Sección 3.2.

Sean A y B anillos, ${}_AN_B$ un $(A,B)-$bimódulo, ${}_BM_A$ un $(B,A)-$bimódulo, y sean $\alpha : M\otimes_A N \to B$ un homomorfismo de $(B,B)-$bimódulos, y $\beta : N\otimes_B M \to A$ un homomorfismo de $(A,A)-$bimódulos tales que $\alpha(m\otimes n)m' = m\beta(n\otimes m')$ y $n\alpha(m\otimes n') = \beta(n\otimes m)n'$ para todos $m,m'\in M$ y $n,n'\in N$. Entonces el Contexto Morita $\mathscr{M} = (A,N,M,B,\alpha,\beta)$ determina el anillo Morita

$$\Lambda_{(\alpha,\beta)}(\mathscr{M}) = \begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$$

donde la adición es componente a componente y la multiplicación está dada por

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \beta(n\otimes m') & an' + nb' \\ ma' + bm' & bb' + \alpha(m\otimes n') \end{pmatrix}$$

Para poder describir la categoría de módulos de $\Lambda_{(\alpha,\beta)}(\mathscr{M})$ (en particular es de nuestro interés describir los módulos simples) definiremos la categoría $\mathscr{M}(\Lambda)$ cuyos objetos son las 4-uplas (X,Y,f,g) donde $X\in mod-A$, $Y\in mod-B$, $f\in Hom_B(M\otimes_A X, Y)$ y $g\in Hom_A(N\otimes_B Y, X)$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} N\otimes_B M\otimes_A X \arrow[r, "N\otimes f"] \arrow[d, "\beta\otimes X"'] & N\otimes_B Y \arrow[d, "g"] \\ A\otimes_A X \arrow[r, "\simeq"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes_A N\otimes_B Y \arrow[r, "M\otimes g"] \arrow[d, "\alpha\otimes Y"'] & M\otimes_A X \arrow[d, "f"] \\ B\otimes_B Y \arrow[r, "\simeq"] & Y \end{tikzcd}$$

Sean (X,Y,f,g) y (X',Y',f',g') objetos de $\mathscr{M}(\Lambda)$, entonces un morfismo $(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$ en $\mathscr{M}(\Lambda)$ es un par de homomorfismos (a,b) donde $a : X\to X'$ es un A-morfismo y $b : Y\to Y'$ es un B-morfismo tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "M\otimes a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ M\otimes_A X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\otimes_B Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "N\otimes b"'] & X \arrow[d, "a"] \\ N\otimes_B Y' \arrow[r, "g'"] & X' \end{tikzcd}$$

Proposición 1.7.1 *Sea $\Lambda_{(\alpha,\beta)}(\mathscr{M}) = \begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ un anillo Morita. Entonces las categorías $\Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod y $\mathscr{M}(\Lambda)$ son equivalentes.*

Observación 1.7.2 *La equivalencia anterior queda determinada en parte por el funtor $F : \mathscr{M}(\Lambda) \to \Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod tal que $F(X,Y,f,g) = X\oplus Y$ es un grupo abeliano que tiene estructura de $\Lambda_{(\alpha,\beta)}(\mathscr{M})$-módulo dada por*

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}.(x,y) = (ax + g(n \otimes y), by + f(m \otimes x))$$

para todo $a \in A, b \in B, n \in N, m \in M, x \in X$ *e* $y \in Y$. *Si* $(a,b) : (X,Y,f,g) \to (X',Y',f',g')$ *es un morfismo en* $\mathscr{M}(\Lambda)$ *entonces* $F(a,b) = a \oplus b : X \oplus Y \to X' \oplus Y'$.

Para poder identificar los módulos sobre $\Lambda_{(\alpha,\beta)}$ con objetos de $\mathscr{M}(\Lambda)$, definimos los siguientes funtores:

- $U_A : \Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod$\to$ A-mod definida por $U_A(X,Y,f,g) = X$ en objetos $(X,Y,f,g) \in \Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod y dado un morfismo

  $$(a,b) : (X,Y,f,g) \to (X',Y',f',g') \in \Lambda_{(\alpha,\beta)} - mod$$

  entonces $U_A(a,b) = a$.
- $U_B : \Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod$\to$ B-mod definida por $U_B(X,Y,f,g) = Y$ en objetos $(X,Y,f,g) \in \Lambda_{(\alpha,\beta)}$-mod y dado un morfismo

  $$(a,b) : (X,Y,f,g) \to (X',Y',f',g') \in \Lambda_{(\alpha,\beta)} - mod$$

  entonces $U_B(a,b) = b$.

El siguiente resultado permite describir los $\Lambda_{(\alpha,\beta)}$-módulos simples en términos de los B-módulos simples, $B/Im(\alpha)$-módulos simples, A-módulos simples y $A/Im(\beta)$-módulos simples.

Proposición 1.7.3 *Existen las siguientes biyecciones:*

- $\{B/Im(\alpha)\text{-módulos simples}\} \underset{U_B}{\leftrightarrows} \{\Lambda_{(\alpha,\beta)}\text{-módulos simples, con } U_A(X,Y,f,g) = 0\}$.
- $\{A/Im(\beta)\text{-módulos simples}\} \underset{U_A}{\leftrightarrows} \{\Lambda_{(\alpha,\beta)}\text{-módulos simples, con } U_B(X,Y,f,g) = 0\}$.
- $\{B\text{-módulos simples}\} \underset{U_B}{\leftrightarrows} \{\Lambda_{(\alpha,\beta)}\text{-módulos simples tal que } U_B(X,Y,f,g) \neq 0\}$.
- $\{A\text{-módulos simples}\} \underset{U_A}{\leftrightarrows} \{\Lambda_{(\alpha,\beta)}\text{-módulos simples tal que } U_A(X,Y,f,g) \neq 0\}$.

Capítulo 2

Funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov

A continuación se introducirán las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov las cuales fueron definidas en [11]. De dichas funciones se desprenden algunos resultados que brindarán herramientas importantes para determinar la dimensión proyectiva de un módulo finitamente generado. Estas propiedades serán fundamentales para demostrar los principales resultados del capítulo siguiente.

Sea Λ un álgebra de Artin, se define K_0 como el grupo abeliano generado por los símbolos $[M]$, donde M es un Λ-módulo finitamente generado y se cumplen las siguientes relaciones:
1) $[C] = [A] + [B]$ si $C \simeq A \oplus B$.
2) $[P] = 0$ si P es proyectivo.

De otra forma podemos decir que K_0 es el grupo abeliano generado por la clase de los Λ-módulos indescomponibles finitamente generados no proyectivos no isomorfos. Es decir, los elementos de K_0 son de la forma $\lambda_1[M_1] + \lambda_2[M_2] + ... + \lambda_n[M_n]$ siendo $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ y M_i un Λ-módulo indescomponible finitamente generado no proyectivo tal que $M_i \ncong M_j$ para todo $i \neq j$.

Consideremos la aplicación $L : K_0 \to K_0$ tal que para todo $[M] \in K_0, L[M] = [\Omega(M)]$ donde $\Omega(M)$ es la sizigia de M. Dado que la sizigia de un módulo proyectivo es cero y que la sizigia es aditiva, tenemos que L es un homomorfismo de grupos. A continuación enunciaré el Lema de Fitting que dará las bases para definir las funciones de Igusa-Todorov tal como lo hicieron en [11].

Lema 2.0.1 (Lema de Fitting) *Sea M un módulo sobre un álgebra Noetheriana Λ, $f : M \to M$ un endomorfismo de M y X un submódulo de M finitamente generado. Entonces:*
a) Existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo para todo $m \geq n$. Al menor n lo denotaremos $n_f(X)$.

b) Si Y es un submódulo de X, entonces $n_f(Y) \leq n_f(X)$.
c) Si Λ es un álgebra de Artin y $X = M$ existe una descomposición en suma directa $X = Y \oplus Z$ tal que $Z = Ker(f^m)$ e $Y = Im(f^m)$ para todo $m \geq n_f(X)$. Además, en dicha descomposición, el endomorfismo $f : Y \oplus Z \to Y \oplus Z$ puede ser visto como la siguiente matriz $\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}$ donde $f_{11} : Y \to Y$ es un isomorfismo y $f_{22} : Z \to Z$ es nilpotente.

La demostración de esta versión del Lema de Fitting se puede encontrar en [12]. Este lema nos permite dar la siguiente definición.

Definición 2.0.2 *Se define la **función ϕ de Igusa-Todorov** como:*

$$\phi : mod(\Lambda) \to \mathbb{N} \cup 0 \text{ tal que } \phi(M) := n_L\langle add(M)\rangle.$$

donde $\langle add(M)\rangle$ denota el subgrupo de K_0 generado por todos los sumandos directos indescomponibles de M.

Definición 2.0.3 *Definimos el **rango de un módulo** $M, rk(M)$, como el rango del subgrupo de K_0, generado por $\langle add(M)\rangle$.*

Observación 2.0.4 *Se cumple que:*
1) $rk(L^n\langle add(M)\rangle) \geq rk(L^i\langle add(M)\rangle)$, $\forall i \geq n$.
2)En particular $rk(L^{\phi(M)}\langle add(M)\rangle) = rk(L^i\langle add(M)\rangle)$, $\forall i \geq \phi(M)$. Obsérvese que $\phi(M)$ es el menor número de $\mathbb{N} \cup 0$ que cumple esta propiedad, lo cual es otra forma de caracterizar la función de Igusa-Todorov.

Proposición 2.0.5 *([11]) Sean M y $N \in \Lambda$-mod*

1. *Si M tiene dimensión proyectiva finita entonces $\phi(M) = dp(M)$.*
2. *Si M tiene dimensión proyectiva infinita y es indescomponible entonces $\phi(M) = 0$.*
3. *$\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.*
4. *$\phi(M^k) = \phi(M)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. 1. Sea $M \in \Lambda$-mod tal que $dp(M) = m > 0$. Entonces $\Omega^m(M)$ es un Λ-módulo proyectivo y por lo tanto $[\Omega^i(M)] = 0$ para todo $i \geq m$, lo que implica que $\phi(M) \leq m$. Dado que $[\Omega^m(M)] = 0$, si suponemos que $\phi(M) = t < m$ tendríamos que $[\Omega^t(M)] = 0$ lo que implicaría que $\Omega^t(M)$ es un Λ-módulo proyectivo o nulo y por lo tanto $dp(M) \leq t < m$ lo que es absurdo.

2. Si M es un Λ-módulo indescomponible entonces $rk(M) = 1$. Como además $dp(M) = \infty$ se cumple que $rk(\Omega^i(M)) \neq 0$ y por la observación 2.0.4 podemos

afirmar que $rk(\Omega^i(M)) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $\phi(M) = 0$.

3. Como $\langle add(M)\rangle$ es un subgrupo de $\langle add(M \oplus N)\rangle$, y por lo tanto un $\mathbb{Z}$-submódulo, entonces por el Lema de Fitting parte b) se cumple que $n_f(add(M)) \leq n_f(add(M \oplus N)$ lo que implica que $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.

4. La igualdad $\phi(M^k) = \phi(M)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ se deduce directamente de que $\langle add(M)\rangle = \langle add(M^k)\rangle$. $\square$

Definición 2.0.6 *Definimos la* ***función*** ψ ***de Igusa-Todorov*** *para* $M \in mod\Lambda$ *como:*

$$\psi(M) = \phi(M) + sup\{dp(N) : N \oplus N' = \Omega^{\phi(M)}(M) \ y \ dp(N) < \infty\}.$$

Proposición 2.0.7 *[11] Sean* M *y* $N \in \Lambda$*-mod.*

1. *Si* M *tiene dimensión proyectiva finita entonces* $\psi(M) = dp(M)$.
2. $\psi(M^k) = \psi(M)$ *para cualquier* $k \in \mathbb{Z}^+$.
3. *Si* N *es un sumando directo de* $\Omega^n(M)$ *donde* $n \leq \phi(M)$ *y* $dp(N) < \infty$, *entonces* $dp(N) + n \leq \psi(M)$.
4. $\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$.

Demostración: 1. Si $dp(M) = m < \infty$, por la parte 1) de la Proposición 2.0.5, sabemos que $\Omega^m(M) = \Omega^{\phi(M)}(M)$ es un Λ-módulo proyectivo y por lo tanto todo sumando N de $\Omega^{\phi(M)}(M)$ es proyectivo. Entonces $sup\{dp(N) : N \oplus N' = \Omega^{\phi(M)}(M)$ y $dp(N) < \infty\} = 0$. Ahora tenemos que $\psi(M) = \phi(M)$ y por lo tanto $\psi(M) = dp(M)$.

2. Por definición se tiene que

$$\psi(M^k) = \phi(M^k) + sup\{dp(N) : N \text{ es un sumando de } \Omega^{\phi(M^k)}(M^k) \text{ y } dp(N) < \infty\}$$

y por la Proposición 2.0.5 sabemos que $\phi(M^k) = \phi(M)$ lo que implica que

$$\psi(M^k) = \phi(M) + sup\{dp(N) : N \text{ es un sumando de } \Omega^{\phi(M)}(M^k) \text{ y } dp(N) < \infty\}.$$

Además sabemos que $\Omega^{\phi(M)}(M^k) = (\Omega^{\phi(M)}(M))^k$ y por lo tanto

$\psi(M^k) = \phi(M) + sup\{dp(N) : N = \bigoplus_i N_i$ tal que N_i sumandos de $\Omega^{\phi(M)}(M)$ y $dp(N) < \infty\}$.

Por último se tiene que $dp(\bigoplus_i N_i) = máx\{dp(N_i)\}$ lo que implica que

$\psi(M^k) = \phi(M) + sup\{dp(N) : N$ sumando de $\Omega^{\phi(M)}(M)$ y $dp(N) < \infty\} = \psi(M)$.

3. Como N es un sumando directo de $\Omega^n(M)$ se tiene que $\Omega^{\phi(M)-n}(N)$ es un sumando directo de $\Omega^{\phi(M)}(M)$. Además, como $dpN < \infty$, se tiene que $dp\Omega^{\phi(M)-n}(N) < \infty$. Por lo tanto, directamente por la definición de $\psi(M)$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\phi(M) + dp\Omega^{\phi(M)-n}(N) \leq \psi(M)$$

y finalmente $\phi(M) + dp(N) - \phi(M) + n \leq \psi(M)$.

4. Por la Proposición 2.0.5 parte 3. sabemos que $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$. Si Z es un sumando de $\Omega^{\phi(M)}(M \oplus N)$ y $dp(Z) < \infty$, por la parte anterior, se tiene que

$$dp(Z) + \phi(M) \leq \psi(M \oplus N),$$

lo que implica que

$$\psi(M) = \phi(M) + sup\{dp(Z) : Z \oplus Z' = \Omega^{\phi(M)}(M) \text{ y } dp(Z) < \infty\} \leq \psi(M \oplus N).$$

□

Proposición 2.0.8 *[11] Sea* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *una sucesión exacta corta de* Λ*-módulos donde* M'' *tiene dimensión proyectiva finita. Entonces* $dp(M'') \leq \psi(M' \oplus M) + 1$.

Demostración. Si $dp(M'') = r < \infty$ sabemos que $\Omega^r(M'')$ es un Λ-módulo proyectivo. Aplicando el Lema de la Herradura a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega^r(M') \longrightarrow \Omega^r(M) \oplus P \longrightarrow \Omega^r(M'') \longrightarrow 0\,,$$

donde P es un Λ-módulo proyectivo, la cual se escinde por ser $\Omega^r(M'')$ un Λ-módulo proyectivo y por lo tanto se cumple que $\Omega^r(M) \oplus P \simeq \Omega^r(M') \oplus \Omega^r(M'')$. Este resultado nos permite afirmar que $[\Omega^r(M')] = [\Omega^r(M)]$ y así poder definir $n := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : [\Omega^k(M')] = [\Omega^k(M)]\}$. Observemos que $n \leq r$.

Por otro lado observemos que $[\Omega^n(M')] = [\Omega^n(M)]$ pero $[\Omega^{n-1}(M')] \neq [\Omega^{n-1}(M)]$ lo que implica que el homomorfismo de grupos

$$L : L^{n-1}(\langle M' \oplus M\rangle) \to L^n(\langle M' \oplus M\rangle)$$

no es inyectivo y por lo tanto $\phi(M' \oplus M) = n_L\langle M' \oplus M\rangle \geq n$.

Ahora apliquemos nuevamente el Lema de la Herradura a la sucesión

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

para obtener la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega^n(M') \longrightarrow \Omega^n(M) \oplus P_1 \longrightarrow \Omega^n(M'') \longrightarrow 0$$

donde P_1 es un Λ-módulo proyectivo. Como $[\Omega^n(M')] = [\Omega^n(M)]$ podemos afirmar que $\Omega^n(M')$ y $\Omega^n(M)$ difieren en un módulo proyectivo, por lo tanto por el teorema de Krull-Schmidt[1], existe un Λ-módulo X tal que $\Omega^n(M') \simeq X \oplus P$ y $\Omega^n(M) \simeq X \oplus Q_1$ donde P y Q_1 son Λ-módulos proyectivos. Entonces la sucesión anterior la podemos expresar como

$$0 \longrightarrow X \oplus P \xrightarrow{t} X \oplus Q \longrightarrow \Omega^n(M'') \longrightarrow 0$$

donde P y Q son Λ-módulos proyectivos y el mapa t está dado por la matriz

$$t = \begin{pmatrix} \alpha & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

Considerando que $\alpha \in End(X)$, por el Lema de Fitting parte c), se tiene la descomposición del módulo $X = Y \oplus Z$ donde el mapa α se puede representar de forma matricial como $\alpha = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ donde el mapa g es nilpotente y el mapa f es un isomorfismo. Por lo tanto la sucesión exacta anterior la podemos escribir como

$$0 \longrightarrow Y \oplus Z \oplus P \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & t_1 \\ 0 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}} Y \oplus Z \oplus Q \longrightarrow \Omega^n(M'') \longrightarrow 0$$

y a partir de ella obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z \oplus P \xrightarrow{\begin{pmatrix} g & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}} Z \oplus Q \longrightarrow \Omega^n(M'') \longrightarrow 0$$

Dado $S \in \Lambda$-mod, aplicando el funtor $Hom(-, S)$ a la sucesión exacta corta anterior obtenemos la sucesión exacta larga siguiente:

$$...Ext_\Lambda^{k-1}(Z \oplus P, S) \longrightarrow Ext_\Lambda^k(\Omega^n(M''), S) \longrightarrow Ext_\Lambda^k(Z \oplus Q, S)$$

$$\xrightarrow{Ext_\Lambda^k(\begin{pmatrix} g & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}, S)} Ext_\Lambda^k(Z \oplus P, S) \longrightarrow Ext_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(M''), S) \longrightarrow ...$$

[1]El enunciado y demostración de este teorema se puede encontrar en [1].

Como el funtor $Ext(-, S)$ es aditivo y $Ext^k(L, S) = 0$ para todo módulo proyectivo L y $\forall k > 1$, la sucesión anterior se puede expresar como

$$...Ext_\Lambda^{k-1}(Z,S) \longrightarrow Ext_\Lambda^k(\Omega^n(M''),S) \longrightarrow Ext_\Lambda^k(Z,S) \tag{2.1}$$

$$\xrightarrow{Ext_\Lambda^k(g,S)} Ext_\Lambda^k(Z,S) \longrightarrow Ext_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(M''),S) \longrightarrow ...$$

Observemos que $Ext_\Lambda^k(g, S)$ es nilpotente ya que g lo es.

Afirmación 1: $dp(Z) < \infty$.

Como $dp(M'') = r$ se cumple que $dp(\Omega^n(M'')) = r - n$ y por lo tanto $Ext_\Lambda^j(\Omega^n(M''), S) = 0$ para todo $j \geq r - n + 1$. Entonces, en la sucesión exacta anterior, se tiene que $Ext_\Lambda^j(g, S)$ es un epimorfismo para todo $j \geq r-n$. Tenemos entonces que $Ext_\Lambda^j(g, S)$ es un epimorfismo nilpotente para todo $j \geq r - n$, lo que implica que para todo $S \in \Lambda$-mod $Ext_\Lambda^j(Z, S) = 0$ para todo $j \geq r-n$ y por lo tanto $dp(Z) < r - n$.

Afirmación 2: $dp(\Omega^n(M'')) \leq dp(Z) + 1$

Si $dp(Z) = h$, entonces $Ext_\Lambda^j(Z, S) = 0$ para todo $S \in \Lambda$-mod y para todo $j \geq h+1$ y por lo tanto de la sucesión (2.1) podemos deducir que $Ext_\Lambda^k(\Omega^n(M''), S) = 0$ para todo $k \geq h + 2$, lo que implica la afirmación realizada.

Por último tenemos que

$$\begin{aligned} dp(M'') &\leq dp(\Omega^n(M'')) + n \\ &\leq dp(Z) + 1 + n \\ &= (dp(Z) + n) + 1. \end{aligned}$$

Donde la segunda desigualdad justifica por la afirmación 2. Además, como Z es un sumando de X y éste es un sumando de $\Omega^n(M)$ y de $\Omega^n(M')$, se tiene que Z es un sumando de $\Omega^n(M) \oplus \Omega^n(M')$. Considerando además que $n \leq \phi(M \oplus M')$ y que por afirmación 1 $dp(Z) < \infty$, por la parte 3 de la Proposición 2.0.7 podemos afirmar que:

$$dp(M'') \leq (dp(Z) + n) + 1 \leq \psi(M \oplus M') + 1.$$

$\square$

El siguiente lema se puede encontrar en [7].

Lema 2.0.9 *Sea A una álgebra de Artin.*

1. *Si $M \in A$-mod, entonces $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$.*
2. *Si $M \in A$-mod, entonces $\psi(M) \leq \psi(\Omega(M)) + 1$.*

Demostración: 1. Si $n := \phi(\Omega(M))$, se tiene que $L : L^m\langle\Omega(M)\rangle \to L^{m+1}\langle\Omega(M)\rangle$ es un isomorfismo para todo $m \geq n$. Dado que $\Omega\langle M\rangle \subseteq \langle\Omega(M)\rangle$, podemos afirmar que $L^{m+1}\langle M\rangle$ es un subgrupo de $L^m\langle\Omega(M)\rangle$, y por lo tanto $L : L^{m+1}\langle M\rangle \to L^{m+2}\langle M\rangle$ es un isomorfismo para todo $m+1 \geq n+1$. Entonces $\phi(M) \leq n+1 = \phi(\Omega(M)) + 1$.

2. Sea M un A-módulo. Se considera el conjunto C_M cuyos elementos son todos los sumandos directos de $\Omega^{\phi(M)}(M)$. Sea $Y \in C_M$ tal que $dp(Y) = dpf(C_M) := sup\{dp(X) : X \in C_M \ y \ dp(X) < \infty\}$, por definición de ψ, se tiene que $\psi(M) = dp(Y) + \phi(M)$. Probemos ahora que $dp(Y) + \phi(M) - 1 \leq \psi(\Omega(M))$.

Si $n := \phi(M) - 1$ y $Z := \Omega(M)$, tenemos que Y es un sumando directo de $\Omega^{\phi(M)}(M) = \Omega^n(Z)$. Además, por la parte anterior, sabemos que $n \leq \phi(Z)$. Ahora, por la Proposición 2.0.7 parte 3), podemos afirmar que $dp(Y) + n \leq \psi(Z)$, lo que significa que $dp(Y) + \phi(M) - 1 \leq \psi(\Omega(M))$. □

Proposición 2.0.10 *1) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta en A-mod con $dp(Y) < \infty$, entonces $dp(Y) \leq \psi(\Omega(X) \oplus \Omega^2(Z)) + 2$.*
2) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta en A-mod con $dp(X) < \infty$, entonces $dp(X) \leq \psi(\Omega(Y \oplus Z)) + 1$.

Demostración:
1) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta en A-*mod*, entonces por la Proposición 1.6.3 la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Omega^2(Z) \longrightarrow \Omega(X) \oplus P' \longrightarrow \Omega(Y) \longrightarrow 0.$$

Como $pd(Y) < \infty$, por la Proposición 2.0.8, se tiene que $dp(\Omega(Y)) \leq \psi(\Omega(X) \oplus \Omega^2(Z)) + 1$ y por lo tanto $dp(Y) \leq \psi(\Omega(X) \oplus \Omega^2(Z)) + 2$.

2) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta en A-*mod*, entonces por la Proposición 1.6.3 la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(Z) \oplus P \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

Como $pd(X) < \infty$, por la Proposición 2.0.8, se tiene que $dp(X) \leq \psi(\Omega(Y) \oplus \Omega(Z)) + 1$ y por lo tanto $dp(X) \leq \psi(\Omega(Y \oplus Z)) + 1$. □

Capítulo 3

Resultados Sobre la Conjetura Finitista

El objetivo de este capítulo es mostrar cuáles fueron las primeras ideas que motivaron el trabajo de Shufeng Guo desarrollado en "*Finitistic Dimension Conjecture and Extensions of Algebras*", y cómo éstas se desarrollaron.

3.1. Resultados iniciales

Tomaré como resultados iniciales tres teoremas elaborados por Changchang Xi en su artículo [19] "*On the finitistic dimension conjecture I: related to representation -finite algebras*" publicado en 2004. En particular dos de los resultados los demuestra correctamente en un artículo del mismo año [18] "*Erratum to On the finitistic dimension conjecture I: related to representation-finite algebras*". Dichas demostraciones se desarrollarán en esta sección y observaremos cuál fue el error de Changcang Xi en [19]. Para la demostración de los teoremas utiliza dos lemas que enuncio y demuestro a continuación.

Lema 3.1.1 *[18] Sea B una subálgebra de un álgebra de Artin A con la misma identidad tal que el radical de Jacobson rad(B) de B es un ideal a izquierda en A. Si X es un B-módulo, entonces rad($\Omega_B(X)$) y $\Omega_B^2(X)$ son A-módulos.*

Demostración: Sea X un B-módulo y sea $f : P(_BX) \to_B X$ la cubierta proyectiva minimal de X. Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega_B(X) \xrightarrow{g} P(_BX) \xrightarrow{f} {_BX} \longrightarrow 0 \,.$$

Por otro lado tenemos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow rad({}_BX) \longrightarrow {}_BX \longrightarrow top({}_BX) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow rad(P({}_BX)) \longrightarrow P({}_BX) \longrightarrow top(P({}_BX)) \longrightarrow 0\ .$$

Dado que la cubierta sobreyectiva $f : P({}_BX) \to_B X$ induce un mapa sobreyectivo $f' : rad(P({}_BX)) \to rad({}_BX)$ (donde f' es la restricción de f) y que $top({}_BX)$ es isomorfo a $top(P_B(X))$ podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & ker(f') \arrow[d] & \Omega_B(X) \arrow[d, "g"] & & \\
0 \arrow[r] & rad(P({}_BX)) \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & P({}_BX) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & top(P({}_BX)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & rad({}_BX) \arrow[r] \arrow[d] & {}_BX \arrow[r] \arrow[d] & top({}_BX) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad del diagrama anterior y por como está definida f', tenemos que $ker(f') = rad(P({}_BX)) \cap \Omega_B(X)$. Ahora como $ker(f) = \Omega_B(X) \subseteq rad(P({}_BX))$ se tiene que $ker(f') \simeq \Omega_B(X)$.(también se puede probar que $ker(f') \simeq \Omega_B(X)$ utilizando el Lema de la Serpiente). Por lo tanto la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_B(X) \xrightarrow{g'} rad(P({}_BX)) \xrightarrow{f'} rad({}_BX) \longrightarrow 0$$

donde g' se obtiene de restringir el codominio de g.

Haciendo el producto tensorial por $rad(B)$ sobre la segunda columna del esquema anterior y considerando los mapas $\mu_X : rad(B) \otimes_B X \to rad(B)X = rad({}_BX)$ y $q_X : rad({}_BX) \hookrightarrow X$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo de B-módulos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Tor_1^B(rad(B), X) \arrow[r, "\delta"] & rad(B) \otimes_B \Omega_B(X) \arrow[r, "1\otimes g"] \arrow[d, "\mu_{\Omega_B(X)}"] & rad(B) \otimes P({}_BX) \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[dd, "\mu_{P({}_BX)}"] & rad(B) \otimes_B X \arrow[r] \arrow[dd, "\mu_X"] & 0 \\
 & & rad(B)\Omega_B(X) \arrow[d, "q_{\Omega_B(X)}"] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & \Omega_B(X) \arrow[r, "g'"] & rad(P({}_BX)) \arrow[r, "f'"] & rad({}_BX) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la conmutatividad de primer cuadrado se debe a que $\mu_{P_B(X)}(1\otimes g)(b,x) = \mu_{P({}_BX)}(b,g(x)) = bg(x)$ y $g'(q_{\Omega_B(X)})(\mu_{\Omega_B(X)})(b,x) = g'(q_{\Omega_B})(bx) = g'(bx) = bg'(x) = bg(x)$ para todo $(b,x) \in rad(B)\otimes_B \Omega_B(X)$. Análogamente se da la conmutatividad del segundo cuadrado.

Por la exactitud de la primera fila del diagrama anterior y la conmutatividad del primer cuadrado se tiene $\mu_{P({}_BX)}(1\otimes g)\delta = g'q_{\Omega_B(X)}\mu_{\Omega_B(X)}\delta = 0$. Siendo que g' y $q_{\Omega_B(X)}$ son monomorfismos podemos afirmar que $\mu_{\Omega_B(X)}\delta = 0$. Además, por la conmutatividad del primer cuadrado, se tiene que $\mu_{P({}_BX)}(1\otimes g)(b,x) = g'(q_{\Omega_B(X)})(\mu_{\Omega_B(X)})(b,x)$ para todo $(b,x)\in rad(B)\otimes_B \Omega_B(X)$, y dado que $\mu_{P({}_BX)}$ es un isomorfismo se tiene que si $\mu_{\Omega_B(X)}(b,x) = 0$ entonces $(1\otimes g)(b,x) = 0$. Esto implica que $ker(\mu_{\Omega_B(X)}) \subset ker(1\otimes g) = Im(\delta)$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Tor_1^B(rad(B),X) \xrightarrow{\delta} rad(B)\otimes_B \Omega_B(X) \xrightarrow{\mu_{\Omega_B(X)}} rad(B)\Omega_B(X) = rad(\Omega_B(X)) \longrightarrow 0.$$

Siendo que $rad(B)$ es un (A,B)-bimódulo podemos ver el morfismo $\delta : Tor_1^B(rad(B),X) \longrightarrow rad(B)\otimes_B \Omega_B(X)$ como un homomorfismo de A-módulos por ser ker$(1\otimes g)$. De este modo tenemos que $rad(\Omega_B(X))$ es un A-módulo por ser el cociente de un homomorfismo de A-módulos. La estructura de $rad(\Omega_B(X))$ como A-módulo viene inducida por $rad(B)\otimes_B \Omega_B(X)$ que es la estructura de A-módulo de $rad(B)\Omega_B(X)$ dada por $a.(bx) = (ab).x$ para todo $a\in A, b\in rad(B)$ y $x\in \Omega_B(X)$.

Ahora de igual forma que al principio, haciendo el mismo procedimiento que con el mapa f, consideremos el mapa sobreyectivo $P(\Omega_B(X)) \to \Omega_B(X)$ para obtener la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega_B^2(X) \longrightarrow rad(P(\Omega_B(X))) \longrightarrow rad(\Omega_B(X)) \longrightarrow 0.$$

Siendo que $rad(B)\otimes P(\Omega_B(X))$ es isomorfo a $rad(P(\Omega_B(X)))$ dado por $\mu_{P(\Omega(X))}$ se tiene que $rad(P(\Omega_B(X)))$ y $rad(\Omega_B(X))$ tienen estructura de A-módulo dada por la multiplicación a la izquierda por un elemento de A. Por lo tanto el mapa $rad(P(\Omega_B(X))) \to rad(\Omega_B(X))$ es un A-homomorfismo, lo que implica que su kernel $\Omega_B^2(X)$ es un A-módulo. $\square$

Lema 3.1.2 *[18] Supongamos que B es una subálgebra de A tal que $rad(B)$ es un ideal a izquierda en A. Para todo B-módulo X y para todo entero $i \geqslant 2$, existe un A-módulo proyectivo Q y un A-módulo Z tal que $\Omega_B^i(X) \simeq \Omega_A(Z)\oplus Q$ como A-módulo.*
Si $rad(B)$ es un ideal en A, entonces existe una sucesión exacta de A-módulos:

$$0 \longrightarrow \Omega_B^i(X) \longrightarrow \Omega_A^2(Y)\oplus P \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

donde P es proyectivo y S es un A-módulo tal que ${}_BS$ es semisimple. En particular, si $rad(B) = rad(A)$, el módulo S es también un A-módulo semisimple.

De este lema solo se demostrará la primera parte, la cual es la que se utilizará en las demostraciones de las siguientes proposiciones. El resto de la demostración se puede ver en el artículo ya mencionado.

Demostración: Consideremos la resolución proyectiva minimal del B-módulo ${}_BX$:

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} {}_BX \longrightarrow 0,$$

la cual se construye a partir de las siguientes coberturas proyectivas minimales

$$0 \longrightarrow \Omega_B^i(X) \longrightarrow P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \Omega_B^{i-1}(X) \longrightarrow 0$$

donde el mapa d_{i-1} es la restricción del mapa d_{i-1} de la resolución proyectiva minimal de X (se hará abuso de esta notación en el resto de la demostración). Por lo visto en la demostración del lema anterior tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_B^i(X) \longrightarrow rad({}_BP_{i-1}) \xrightarrow{d_{i-1}} rad({}_B\Omega_B^{i-1}(X)) \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Ahora, teniendo que $0 \to \Omega_B^{i-1}(X) \to P_{i-2}$ y recordando que para todo morfismo $f : M \to N$ se tiene que $f(rad(M)) \subset rad(N)$, se puede comprobar la exactitud de la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \Omega_B^i(X) \longrightarrow rad({}_BP_{i-1}) \xrightarrow{d_{i-1}} rad({}_BP_{i-2}).$$

Siendo que $rad({}_BP_i)$ es un A-módulo dado por la multiplicación a la izquierda por un elemento de A y considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} rad(B) \otimes_B P_{i-1} \arrow[r, "id \otimes d_{i-1}"] \arrow[d, equal] & rad(B) \otimes_B (P_{i-2}) \arrow[d, equal] \\ rad_B(P_{i-1}) \arrow[r, "d_{i-1}"] & rad_B(P_{i-2}) \end{tikzcd}$$

sabemos que el mapa d_{i-1} en la sucesión exacta anterior es un A-homomorfismo con imagen $rad(\Omega_B^{i-1}(X))$ y además que la sucesión 3.1 es una sucesión de A-módulos. Ahora tenemos la sucesión exacta

$$A \otimes_B P_{i-1} \xrightarrow{g} A \otimes_B P_{i-2} \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

donde Y es el cokernel del mapa $g = id \otimes_B d_{i-1}$. Entonces tenemos la inclusión de A-módulos $\Omega_B^i(X) \hookrightarrow rad({}_BP_{i-1}) \simeq rad(B) \otimes_B P_{i-1} \hookrightarrow A \otimes_B P_{i-1}$ donde la última inclusión se da por considerar la inclusión $0 \to rad(B) \to A$ y tensorizar por el módulo proyectivo P_{i-1}.

Sea Z el cokernel $\Omega_B^i(X) \hookrightarrow A \otimes_B P_{i-1}$ tenemos que $\Omega_B^i(X) \simeq \Omega_A(Z) \oplus Q$ donde Q es un A-módulo proyectivo sumando de $A \otimes_B P_{i-1}$. Los A-módulos Z y Q dependen de X. $\square$

Definición 3.1.3 *Un álgebra A de dimensión finita se dice que es de **tipo representación finita**, si tiene una cantidad finita de A-módulos indescomponibles no isomorfos de dimensión finita.*

Teorema 3.1.4 *[19] Sea B una subálgebra de un álgebra de Artin A con la misma identidad tal que el radical de Jacobson rad(B) de B es un ideal a izquierda de A. Si A es de tipo de representación finita, entonces la dimensión finitista de B es finita.*

Demostración: Sea ${}_BX$ un módulo de dimensión proyectiva finita (no proyectivo ya que de ser proyectivo sabemos que tiene dimensión proyectiva 0) cuya primera sizigia $\Omega_B(X)$ admite la siguiente cubierta proyectiva minimal

$$0 \longrightarrow \Omega_B^2(X) \longrightarrow P_B(\Omega_B(X)) \longrightarrow \Omega_B(X) \longrightarrow 0$$

de la cual, igual que lo realizado en el Lema 3.1.1, podemos obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_B^2(X) \longrightarrow rad(P_B(\Omega_B(X))) \longrightarrow rad(\Omega_B(X)) \longrightarrow 0.$$

Por el Lema 3.1.1 sabemos que $rad(P_B(\Omega_B(X)))$ y $rad(\Omega_B(X))$ son A-módulos con la estructura de multiplicación a izquierda por un elemento de A, por lo tanto $\Omega_B^2(X)$ es también un A-módulo por ser el kernel de un A-homomorfismo. Como A es de tipo representación finita podemos escribir $\Omega_B^2(X) = \bigoplus_{j=1}^t M_j^{s_j}$ donde s_j es un entero no negativo para todo $1 \leq j \leq t$ y $\{M_1, M_2, ..., M_t\}$ es una lista completa de A-módulos indescomponibles no isomorfos. Recordemos que todo A-módulo lo puedo ver como un B-módulo y como esta identificación respeta la aditividad, entonces la descomposición de $\Omega_B^2(X) = \bigoplus_{j=1}^t M_j^{s_j}$ es también una descomposición como B-módulo. Por lo tanto tenemos que

$$dp({}_BX) \leqslant dp(\Omega_B^2(X)) + 2$$

y utilizando la función Ψ_B de Igusa-Todorov se tiene que

$$\begin{aligned} dp({}_BX) &\leqslant \Psi_B(\Omega_B^2(X)) + 2 \\ &= \Psi_B(\bigoplus_j M_j^{s_j}) + 2 \\ &= \Psi_B(\bigoplus_j M_j) + 2. \end{aligned}$$

Por la desigualdad anterior se deduce que la dimensión finitista de B está acotada por $\Psi_B\left(\bigoplus_j M_j\right) + 2$. □

Observación 3.1.5 El teorema anterior lo enuncia Changchang Xi en su artículo [19] y en su intento de demostración comete el error de considerar que bajo las hipótesis del teorema se cumple que $rad({}_BM)$ es un A-módulo para todo B-módulo ${}_BM$. Este error fue salvado por Changchang Xi, como recién se desarrolló, en el artículo [18] del mismo año al sustituir en la demostración $rad({}_BM)$ por $rad({}_B\Omega(M))$ el cual es un A-módulo por el Lema 3.1.1. El error mencionado fue observado por C.M. Ringel, quien le recordó a Changchang Xi un contraejemplo propuesto por R. Farnsteiner, el cual se desarrollará en la siguiente sección.

Teorema 3.1.6 *Si A es un álgebra de Artin con dos ideales I y J tal que $IJ = 0$ y ambos A/I y A/J son de tipo representación finita, entonces la dimensión finitista de A es finita.*

Demostración: Por suposición ambos A/I y A/J son de representación finita, por lo tanto existen $\{M_1, M_2, ..., M_s\}$ y $\{N_1, N_2, ..., N_t\}$ listas completas de A/I-módulos y A/J-módulos indescomponibles no isomorfos. Ahora, sea X un A-módulo con dimensión proyectiva finita, consideremos la sucesión exacta
$0 \to JX \to X \to X/JX \to 0$. Siendo que $IJ = 0$, el módulo JX es un A/I-módulo y por lo tanto $JX = \bigoplus_{j=1}^{s} M_j^{s_j}$ para algunos enteros no negativos s_j. Por otro lado X/JX es un A/J-módulo y por tanto $X/JX = \bigoplus_{j=1}^{t} N_j^{t_j}$ para algunos enteros no negativos t_j. Utilizando la función de Ψ_A de Igusa-Todorov tenemos que

$$\begin{aligned}
dp({}_AX) = \Psi({}_AX) &\leqslant \Psi\left(\Omega\left(\bigoplus_{j=1}^{s} M_j^{s_j}\right) \oplus \Omega^2\left(\bigoplus_{j=1}^{t} N_j^{t_j}\right)\right) + 2 \\
&= \Psi\left(\bigoplus_{j=1}^{s} \Omega(M_j)^{s_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} \Omega^2(N_j)^{t_j}\right) + 2 \\
&= \Psi\left(\bigoplus_{j=1}^{s} \Omega(M_j) \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} \Omega^2(N_j)\right) + 2,
\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad es por la Proposición 2.0.10 y la última igualdad por la Proposición 2.0.7. De lo anterior se deduce que la dimensión proyectiva de ${}_AX$ está acotada por $\Psi\left(\bigoplus_{j=1}^{s} \Omega(M_j) \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} \Omega^2(N_j)\right) + 2$ y por tanto queda demostrado el teorema. □

Teorema 3.1.7 *[19] Sean A, B y C tres álgebras de Artin con la misma identidad tal que (i) $C \subseteq B \subseteq A$, y (ii) el radical de Jacobson de C es un ideal* *izquierda de B y el radical de Jacobson de B es un ideal izquierda de A. Si A es de representación finita, entonces C tiene dimensión finitista finita.*

Demostración: Sea ${}_CX$ un C-módulo de dimensión proyectiva finita. Por lo visto en el Lema 3.1.1 se cumple que $\Omega_C^2(X)$ es un B-módulo. Por lo tanto podemos considerar la siguiente sucesión exacta de B-módulos

$$0 \longrightarrow \Omega_B\Omega_C^2(X) \longrightarrow P \longrightarrow \Omega_C^2(X) \longrightarrow 0.$$

donde P es un B-módulo proyectivo. Por el Lema 3.1.2 existe un B-módulo Y y un B-módulo Q' proyectivo tal que ${}_B\Omega_C^2(X) \simeq \Omega_B(Y) \oplus Q'$. Ahora la sucesión anterior se puede escribir como

$$0 \longrightarrow \Omega_B^2(Y) \longrightarrow P \longrightarrow \Omega_C^2(X) \longrightarrow 0.$$

De nuevo por el Lema 3.1.2 existe un A-módulo Z y un A-módulo proyectivo Q tal que ${}_A\Omega_B^2(Y) \simeq \Omega_A(Z) \oplus Q$. Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_A(Z) \oplus Q \longrightarrow P \longrightarrow \Omega_C^2(X) \longrightarrow 0.$$

Si consideramos la sucesión anterior como sucesión de C-módulos se puede afirmar que

$$\begin{aligned} dp({}_CX) &\leqslant dp(\Omega_C^2(X)) + 2 \\ &\leqslant \Psi\left(P \oplus (\Omega_A(Z) \oplus Q)\right) + 3 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por la Proposición 2.0.8. Dado que A es de representación finita existe $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ lista completa de A-módulos indescomponibles no isomorfos. Como $\Omega_A(Z) \oplus Q$ es un A-módulo se tiene que $\Omega_A(Z) \oplus Q = \oplus_i M_i^{t_i}$ para enteros no negativo t_i como A-módulo y por tanto también como C-módulo. Entonces la desigualdad anterior la podemos escribir como

$$\begin{aligned} dp({}_CX) &\leqslant \Psi\left(P \oplus \bigoplus_i M_i^{t_i}\right) + 3. \\ &\leqslant \Psi\left({}_CB \oplus \bigoplus_i M_i\right) + 3. \end{aligned}$$

Esto prueba que la $dp({}_CX)$ está acotada por $\Psi\left({}_CB \oplus \bigoplus_i M_i\right) + 3$, lo que prueba el teorema. □

El siguiente resultado fue publicado en 2015 por Chengxi Wang y Changchang Xi en [17, Lema 2.35].

Definición 3.1.8 *Sea A un álgebra de Artin, M es un* ***A-módulo sin torsión*** *si es isomorfo a un submódulo de un producto directo de copias de A. En particular todo submódulo de un módulo proyectivo es un módulo sin torsión.*

Lema 3.1.9 *Sea A un álgebra de Artin y B un subálgebra de A con la misma identidad. Supongamos que I es un ideal de B y también un ideal a izquierda de A. Entonces, para cualquier B-módulo X sin torsión, IX es un A-módulo sin torsión y existe un A-módulo proyectivo Q y un A-módulo Z tal que $IX \simeq \Omega_A(Z) \oplus Q$ como A-módulos.*

Demostración: Dado que X es un B-módulo sin torsión existe la inclusión $X \hookrightarrow P$, donde P es un B-módulo proyectivo. Por lo tanto podemos obtener la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\eta} P \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

donde Y es el cokernel de $X \hookrightarrow P$. Siendo P proyectivo se tiene que $Tor_1^B(I, P) = 0$, por lo tanto, a partir de la sucesión anterior podemos obtener la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_1^B(I, Y) \xrightarrow{\psi} I \otimes_B X \xrightarrow{i\otimes\eta} I \otimes_B P \longrightarrow I \otimes_B Y \longrightarrow 0\ ,$$

y considerando el mapa multiplicación $\mu_P : I \otimes_B P \to IP$ obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Tor_1^B(I, Y) \arrow[r, "\psi"] & I \otimes_B X \arrow[r, "1\otimes\eta"] & I \otimes_B P \arrow[r] \arrow[d, "\mu_P"'] & I \otimes_B Y \arrow[r] & 0\ . \\ & & & IP & & \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo tenemos que μ_P es un isomorfismo y por lo tanto se tiene que $Im(1 \otimes \eta) \simeq Im(\mu_P(1 \otimes \eta)) = IX$. Ahora tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Tor_1^B(I, Y) \xrightarrow{\psi} I \otimes_B X \xrightarrow{\mu_P(i\otimes\eta)} IX \longrightarrow 0\ .$$

Dado que I es un ideal a izquierda de A sabemos que $I \otimes_B X$ e $I \otimes_B P$ son A-módulos y el mapa $I \otimes_B X \to I \otimes_B P$ es un homomorfismo de A-módulos, por lo tanto $Tor_1^B(I, Y) \xrightarrow{\psi} I \otimes_B X$ es un homomorfismo de A-módulos. Entonces el B-módulo IX tiene estructura de A-módulo por ser IX el cokernel de ψ cuya estructura de A-módulo es la inducida por $I \otimes_B X$, o sea $a(jx) = (aj)x, \forall a \in A, j \in I, x \in X$. Recordemos que $Im(1 \otimes \eta) \simeq IX$, por lo tanto IX es un submódulo de $I \otimes P$ y además, como se tiene que $I \hookrightarrow A$ y P proyectivo, sabemos que $I \otimes_B P \hookrightarrow_A A \otimes_B P$. Por último tenemos las siguientes inclusiones de A-módulos $IX \hookrightarrow I \otimes_B P \hookrightarrow_A A \otimes_B P$, donde ${}_A A \otimes_B P$ es un A-módulo proyectivo. Si Z es el cokernel de $IX \hookrightarrow_A A \otimes_B P$, como ${}_A A \otimes_B P$ es proyectivo, se tiene que $IX \simeq \Omega_A(Z) \oplus Q$ donde Q es un A-módulo proyectivo. □

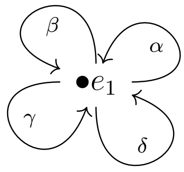
3.2. Ejemplo

En esta sección se desarrollará el contraejemplo enunciado por R. Farnsteiner que dejó en evidencia el error en el primer intento de demostración del Teorema 3.1.4 realizado por Changchang Xi. El objetivo de este ejemplo es probar que si B es una subálgebra de un álgebra de Artin A con la misma identidad, tal que el radical de Jacobson $rad(B)$ de B es un ideal a izquierda de A, entonces no podemos asegurar que para todo B-módulo M se cumple que $rad(M)$ es un A-módulo. La idea es definir dos álgebras particulares A y B que verifican las condiciones anteriores y encontrar un B-módulo M cuyo radical es un B-módulo simple de dimensión 1 y el cual no puede ser un A-módulo ya que, para este caso, todos los A-módulos simples tienen dimensión 2.

Sea $\Lambda = K[x]/(x^2)$ una K-álgebra, consideremos el álgebra A de matrices de 2x2 cuyas entradas pertenecen a Λ, o sea $A := M_{2\times 2}(\Lambda)$. Por lo demostrado en la Proposición 1.4.8, el radical de Jacobson de A es $rad(A) = M_{2\times 2}(rad(\Lambda))$, lo que en este caso significa que $rad(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x & \alpha_2 x \\ \alpha_3 x & \alpha_4 x \end{pmatrix}$ con $\alpha_i \in K$. Definimos B como el álgebra generada por el radical de A y la unidad en A. En este caso la unidad en A es $\begin{pmatrix} 1_\Lambda & 0 \\ 0 & 1_\Lambda \end{pmatrix}$. Ya definidas las álgebras A y B, ahora pasaremos a probar que $rad(B)$ es un ideal a izquierda en A y que hay un B-módulo M cuyo radical no es un A-módulo.

Por como se define B, el radical de A es un ideal maximal en B y además $rad(A)$ es nil, ya que si $a \in rad(A)$ se cumple que $a^2 = 0$. Ahora, dado que $rad(B)$ es la intersección de todos los ideales maximales, se tiene que $rad(B) \subset rad(A)$ y por la Proposición 1.4.7 sabemos que $rad(B)$ contiene a todos los ideales nil de B, por lo tanto se cumple que $rad(A) \subset rad(B)$. Podemos concluir entonces que $rad(A) = rad(B)$. Tenemos entonces que $rad(A) = rad(B)$ es un ideal maximal de B, y como $rad(B)$ es la intersección de todos los ideales maximales, podemos afirmar que $rad(B)$ es el único ideal maximal de B, por lo tanto el álgebra B es local.

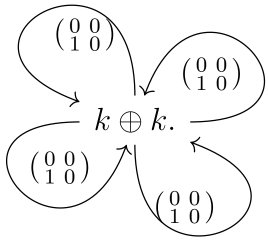
El álgebra B tiene un único idempotente primitivo que es la unidad, por lo tanto es un álgebra básica cuyo carcaj tiene un sólo vértice, y además como $rad^2(B) = 0$ se tiene que $e_1 rad(B)/rad^2(B) e_1$ tiene dimensión 4. Por lo tanto el carcaj de B es el siguiente:



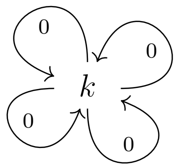
con las relaciones dadas por el producto de dos flechas cualesquiera igual a cero, o sea $rad^2(B) = 0$.

Consideremos el B-módulo M y su radical $rad(M) = rad(B)M$, como se muestra en la siguiente figura:

$M =$



$rad(M) =$



El radical de M es un B-módulo simple de dimensión 1, entonces si $rad(M)$ también fuese un A-módulo sería un A-módulo simple de dimensión 1. A continuación se justificará, de dos formas distintas, que los A-módulos simples tienen dimensión 2.

En A consideremos el conjunto $\{e_1, e_2\}$, donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_\Lambda \end{pmatrix}$, el cual es un conjunto de elementos primitivos ortogonales idempotentes tal que $1_A = e_1 + e_2$ y $e_1 A \cong e_2 A$, por lo tanto la categoría de módulos de A y $e_1 A e_1 \cong \Lambda$ son equivalentes Morita (ver [14, Observación 5.3]). En la Proposición 1.4.8 se probó que hay una correspondencia inyectiva entre los Λ-módulos simples y los A-módulos simples donde a cada Λ-módulo simple X le corresponde el A-módulo simple $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$. Esta correspondencia, dada la equivalencia de categorías, se puede afirmar que es una biyección y por lo tanto podemos asegurar que los únicos A-módulos simples son de la forma $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ donde X es un Λ-módulo simple. De esta última afirmación se deduce que todos los A-módulos simples tienen dimensión 2.

Veamos otra forma de justificar el resultado anterior. Si consideramos la 6-upla $\mathscr{M} = (\Lambda, \Lambda, \Lambda, \Lambda, \alpha, \beta)$ donde $\alpha : \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \to \Lambda$ tal que $\alpha(m \otimes n) = nm$ y $\beta : \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \to \Lambda$ tal que $\beta(n \otimes m) = mn$ se tiene que

$$\Lambda_{(\alpha,\beta)}(\mathscr{M}) = \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda \\ \Lambda & \Lambda \end{pmatrix} = A.$$

Ahora, por lo visto en la Proposición 1.7.1 la categoría de A-módulos y la categoría $\mathscr{M}(A)$ son equivalentes, donde los elementos de $\mathscr{M}(A)$ son de la forma (X, Y, f, g) donde $X \in mod - A$, $Y \in mod - B, f \in Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_\Lambda X, Y)$ y $g \in Hom_\Lambda(\Lambda \otimes_\Lambda Y, X)$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \otimes_\Lambda X \arrow[r, "\Lambda\otimes f"] \arrow[d, "\beta\otimes Id_X"'] & \Lambda \otimes_\Lambda Y \arrow[d, "g"] \\ \Lambda \otimes_\Lambda X \arrow[r, "\simeq"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \otimes_\Lambda Y \arrow[r, "\Lambda\otimes g"] \arrow[d, "\alpha\otimes Id_Y"'] & \Lambda \otimes_\Lambda X \arrow[d, "f"] \\ \Lambda \otimes_\Lambda Y \arrow[r, "\simeq"] & Y \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 1.5.11 podemos considerar $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$ y $g \in Hom_\Lambda(Y, X)$, y los diagramas conmutativos anteriores como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "\simeq"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "Id_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\simeq"] & Y \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de los diagramas anteriores implica que los elementos de $\mathscr{M}(A)$ son 4-uplas de la forma (X, X, f, f^{-1}) donde $X \in$ mod-Λ y $f : X \to X$ es un isomorfismo. Por la Proposición 1.7.3 hay una biyección entre los A-módulos simples vistos como elementos de $\mathscr{M}(A)$ y los Λ-módulos

$\{\Lambda$-módulo simple$\} \longleftrightarrow \{A$-módulo simple tal que $U_A(X, X, f, f^{-1}) = X \neq 0\}$

Ahora por como se definió en la Sección 1.7, el funtor $F : \mathscr{M}(A) \to A$ hace corresponder a cada elemento (X, X, f, f^{-1}) de $\mathscr{M}(A)$ el grupo abeliano $X \oplus X$ cuya estructura de A-módulo está dada en este caso por considerar $X \oplus X$ como un vector columna y la multiplicación por un elemento de A como la multiplicación entre matrices. Además, en la Proposición 1.4.8 se probó que hay una correspondencia inyectiva entre los Λ-módulos simples y los A-módulos simples, donde a cada Λ-módulo simple X le corresponde el A-módulo simple $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$. Esto implica que la biyección antes mencionada en este caso se simplifica a

$\{\Lambda$-módulo simple$\} \longleftrightarrow \{A$-módulos simples$\}$=$\{A$-módulo M tal que $M = X \oplus X$ tal que X es un Λ-módulo simple$\}$.

Por lo tanto todos los A-módulos simples tienen dimensión 2.

3.3. Resultados de Shufeng Guo

3.3.1. Extensión de Álgebras e Ideales

El objetivo de esta sección es mostrar algunos de los resultados obtenidos por Shufeng Guo en su artículo "Finitistic dimension conjecture and extensions of algebras" los cuales generalizan algunos de los resultados antes mencionados.

El siguiente teorema generaliza el Teorema 3.1.6

Teorema 3.3.1 *[5] Sea A un álgebra de Artin e I,J,K tres ideales de A tales que IJK=0 y* $K \supseteq rad(A)$*. Si ambos* A/I *y* A/J *son A-sizigia-finita, entonces A tiene dimensión finitista finita.*

Demostración: Sea X un A-módulo con dimensión proyectiva finita. Consideremos la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow J\Omega_A(X) \longrightarrow \Omega_A(X) \longrightarrow \Omega_A(X)/J\Omega_A(X) \longrightarrow 0$$

siendo $IJ\Omega_A(X) \subseteq IJrad(P(X)) = IJrad(A)P(X) \subseteq IJKP(X) = 0$, la última igualdad por hipotésis, donde $P(X)$ es la cubierta proyectiva de X (la primer desigualdad se debe a que $\Omega_A(X) \subseteq rad(P(X)))$. Tenemos que $Y := J\Omega_A(X)$ es un A/I-módulo y $Z := \Omega_A(X)/J\Omega_A(X)$ es un A/J-módulo.

Si A/I y A/J son A-sizigia-finita, entonces existe un entero no negativo n y A-módulos M y N tal que $\Omega_A^n(Y) \in add({}_AM)$ y $\Omega_A^n(Z) \in add({}_AN)$. Utilizando el Lema de la Herradura sobre sucesiones exactas obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_A^n(Y) \longrightarrow \Omega_A^{n+1}(X) \oplus P \longrightarrow \Omega_A^n(Z) \longrightarrow 0$$

donde P es un A-módulo proyectivo. Ahora acotemos la dimensión proyectiva de ${}_AX$:

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq pd(\Omega_A^{n+1}(X)) + n + 1 \\ &= pd(\Omega_A^{n+1}(X) \oplus P) + n + 1 \\ &\leq \Psi(\Omega_A^{n+1}(Y) \oplus \Omega_A^{n+2}(Z)) + n + 3 \\ &\leq \Psi(\Omega_A(M) \oplus \Omega_A^2(N)) + n + 3 \end{aligned}$$

siendo Ψ es la función de Igusa-Todorov, donde la segunda desigualdad es por la Proposición 2.0.10 y la última desigualdad es por la Proposición 2.0.7. Por lo tanto $fin.dim(A)$ está acotada por $\Psi(\Omega_A(M) \oplus \Omega_A^2(N)) + n + 3$ con lo cual $fin.dim(A) < \infty$. $\square$

Lema 3.3.2 *[5] Sea*

$$B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_{s-1} \subseteq A_s = A$$

una cadena de subálgebras de un álgebra de Artin A tal que I_{i-1} es un ideal de A_{i-1} y también es un ideal izquierda de A_i para todo $1 \leq i \leq s$ con s un entero positivo. Si A es 1-sizigia-finita y $B/I_{s-1}...I_1I_0$ es B-sizigia-finita (por ejemplo, $B/I_{s-1}...I_1I_0$ es de representación finita), entonces $fin.dim(B) < \infty$.

Demostración: Si $s = 1$ es claro que $I = I_{s-1}...I_1I_0 = I_0$ es un ideal en B. Ahora, si $s \geq 2$, como I_{s-2} es un ideal a izquierda de A_{s-1} se tiene que $I_{s-1}I_{s-2}$ está contenido en I_{s-2}, y continuando este procedimiento tenemos que $I_{s-1}...I_1I_0$ está contenido en I_0. Como B está incluida en A_{s-1} e I_{s-1} es un ideal de A_{s-1} se tiene que $bI_{s-1} \subset I_{s-1}$ para todo $b \in B$ y por lo tanto $bI_{s-1}...I_1I_0 \subset I_{s-1}...I_1I_0$, lo que implica que $I_{s-1}...I_1I_0$ es un ideal a izquierda de B. Por otro lado, como I_0 es un ideal de B, se tiene que $I_{s-1}...I_1I_0$ es un ideal derecha de B. Tenemos entonces que $I := I_{s-1}...I_1I_0$ es un ideal en B contenido en I_0.

Si X es un B-módulo con dimensión proyectiva finita. Entonces podemos formar la siguiente sucesión exacta de B-módulos.

$$0 \longrightarrow I\Omega_B(X) \longrightarrow \Omega_B(X) \longrightarrow \Omega_B(X)/I\Omega_B(X) \longrightarrow 0$$

Dado que B/I es B-*sizigia-finita* existe un entero no negativo n y un B-módulo M tal que $\Omega_B^n(Y) \in add(_BM)$, siendo $Y := \Omega_B(X)/I\Omega_B(X)$ claramente un B/I-módulo.

Por otro lado tenemos que $\Omega_B(X)$ es un B-módulo sin torsión entonces $I_0\Omega_B(X)$ es un A_1-módulo sin torsión por el Lema 3.1.9. Inductivamente, por el Lema 3.1.9 obtenemos que $Z := I\Omega_B(X)$ es un A-módulo sin torsión y existe un A-módulo proyectivo Q y un A-módulo W tal que $Z \simeq \Omega_A(W) \oplus Q$ como A-módulos. Siendo que A es 1-*sizigia-finita* existe un A-módulo N tal que $\Omega_A(W) \in add(_AN)$, lo que significa que $Z \in add(_AN \oplus A)$.

Tomando la n-ésima sizigia de la sucesión anterior y por el Lema de la Herradura, se obtiene la sucesión exacta de B-módulos

$$0 \longrightarrow \Omega_B^n(Z) \longrightarrow \Omega_B^{n+1}(X) \oplus P \longrightarrow \Omega_B^n(Y) \longrightarrow 0$$

con P B-módulo proyectivo. Ahora podemos acotar la dimensión proyectiva de ${}_BX$.

$$\begin{aligned} pd({}_BX) &\leq pd(\Omega_B^{n+1}(X)) + n + 1 \\ &= pd(\Omega_B^{n+1}(X) \oplus P) + n + 1 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1}(Z) \oplus \Omega_B^{n+2}(Y)) + n + 3 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1}(N \oplus A) \oplus \Omega_B^{2}(M)) + n + 3. \end{aligned}$$

donde Ψ es la función de Igusa-Todorov, la segunda desigualdad es por la Proposición 2.0.10 y la última desigualdad es por Proposición 2.0.7 parte 4). Por lo tanto $fin.dim(B)$ está acotada por $\Psi(\Omega_B^{n+1}(N \oplus A) \oplus \Omega_B^{2}(M)) + n + 3$. □

El siguiente lema es una versión similar al Lema 3.3.2.

Lema 3.3.3 *[5] Sea*

$$B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_{s-1} \subseteq A_s = A$$

una cadena de subálgebras de un álgebra de Artin A tal que I_{i-1} es un ideal de A_{i-1} y también un ideal a izquierda de A_i para todo $1 \leq i \leq s$ con s un entero positivo. Supongamos que I_0 es el radical de Jacobson rad(B) de B. Si A es 1-sizigia-finita y $A_1/I_{s-1}...I_1$ es B-sizigia-finita (por ejemplo, $A_1/I_{s-1}...I_1$ es representación finita), entonces $fin.dim(B) < \infty$.

Demostración: Por lo asumido $I := I_{s-1}...I_1$ es un ideal en A_1 contenido en I_1. Si X es un B-módulo con dimensión proyectiva finita, entonces podemos formar la siguiente sucesión exacta de B-módulos.

$$0 \longrightarrow I_{s-1}...I_1\Omega_B^2(X) \longrightarrow \Omega_B^2(X) \longrightarrow \Omega_B^2(X)/I_{s-1}...I_1\Omega_B^2(X) \longrightarrow 0$$

Dado que $A_1/I_{s-1}...I_1$ es B-*sizigia-finita* existe un entero no negativo n y un B-módulo M tal que $\Omega_B^n(Y) \in add({}_BM)$, siendo $Y := \Omega_B^2(X)/I_{s-1}...I_1\Omega_B^2(X)$ claramente un $A_1/I_{s-1}...I_1$-módulo.

Por otro lado, por el Lema 3.1.2, tenemos que $\Omega_B^2(X)$ es un A_1-módulo sin torsión, entonces $I_1\Omega_B^2(X)$ es un A_1-módulo sin torsión por el Lema 3.1.9. Inductivamente, por el Lema 3.1.9 obtenemos que $Z := I_{s-1}...I_1\Omega_B^2(X)$ es un A-módulo sin torsión y existe un A-módulo proyectivo Q y un A-módulo W tal que $Z \simeq \Omega_A(W) \oplus Q$ como A-módulos. Siendo que A es 1-*sizigia-finita* existe un A-módulo N tal que $\Omega_A(W) \in add({}_AN)$, lo que significa que $Z \in add({}_AN \oplus A)$.

Tomando la n-ésima sizigia de la anterior sucesión y por el lema de la Herradura, se obtiene la sucesión exacta de B-módulos

$$0 \longrightarrow \Omega_B^n(Z) \longrightarrow \Omega_B^{n+2}(X) \oplus P \longrightarrow \Omega_B^n(Y) \longrightarrow 0$$

con P B-módulo proyectivo. Ahora podemos acotar la dimensión proyectiva de ${}_BX$.

$$\begin{aligned} dp({}_BX) &\leq dp(\Omega_B^{n+2}(X)) + n + 2 \\ &= dp(\Omega_B^{n+2}(X) \oplus P) + n + 2 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1}(Z) \oplus \Omega_B^{n+2}(Y)) + n + 4 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1}(N \oplus A) \oplus \Omega_B^{2}(Z)) + n + 4. \end{aligned}$$

donde Ψ es la función de Igusa-Todorov. Por lo tanto $fin.dim(B)$ es acotada por $\Psi(\Omega_B^{n+1}(N \oplus A) \oplus \Omega_B^{2}(Z)) + n + 4$. $\square$

El Lema 3.3.2 y el Lema 3.3.3 prueban el siguiente teorema:

Teorema 3.3.4 *: [5] Sea*

$$B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{s-1} \subseteq A_s = A$$

una cadena de subálgebras de un álgebra de Artin A tal que $rad(A_{i-1})$ es un ideal a izquierda de A_i para todo $1 \leq i \leq s$ con s un entero positivo y A es $1-sizigia-finita$. Entonces $fin.dim(B) < \infty$ bajo las siguientes condiciones:

1. *$B/rad(A_{s-1})...rad(A_1)rad(A_0)$ es $B-sizigia-finita$ (por ejemplo, $B/rad(A_{s-1})...rad(A_1)rad(A_0)$ es representación finita).*
2. *$A_1/rad(A_{s-1})...rad(A_1)$ es $B-sizigia-finita$ (por ejemplo, $A_1/rad(A_{s-1})...rad(A_1)$ es representación finita).*

El Teorema 3.3.4 recupera el Teorema 3.1.4 si tomamos $s = 1$ y recupera el Teorema 3.1.7 si $s = 2$.

El siguiente ejemplo presentado por Guo en [5] pretende mostrar cómo el Teorema 3.3.4 (más general el Lema 3.3.3) le permite demostrar que un álgebra tiene dimensión finitista finita, probando de otra forma un resultado ya obtenido por Changchang Xi.

Ejemplo 3.3.5 *Se considera el álgebra B cuyo carcaj es*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\gamma"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift left, "\delta"] \arrow[loop above, "\lambda"] & 3, \arrow[l, shift left, "\alpha+\epsilon"] \end{tikzcd} \qquad \beta\gamma = \delta(\alpha+\epsilon),\ \gamma\beta = \gamma\delta = \lambda^2 = \lambda\beta = \lambda\delta = (\alpha+\epsilon)\beta\gamma\lambda = 0.$$

Probemos que $fin.dim(B) < \infty$. Para ello consideremos la cadena de subálgebras $B \subseteq A_1 \subseteq A$ de la siguiente forma:

A_1 que está determinada por el carcaj $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\gamma"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[r, shift left=2, "\delta"] & 3 \arrow[l, "\alpha"] \arrow[l, shift left=2, "\epsilon"] \end{tikzcd}$ *con la relaciones* $\beta\gamma = \delta\epsilon$, $\gamma\beta = \gamma\delta = \lambda^2 = \lambda\beta = \lambda\delta = \delta\alpha = \epsilon\beta = \epsilon\delta = \alpha\lambda = \alpha\beta\gamma\lambda = 0$ *y la inclusión de B en A_1 es generada por el conjunto* $\{e_1, e_2, e_3, \beta, \lambda, \delta, \gamma, \alpha + \epsilon\}$.

A está determinada por el carcaj

$$6 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\xi} 3' \xrightarrow{\epsilon} 2' \xrightarrow{\lambda} 5$$

con la relación $\alpha\beta\xi\epsilon\lambda = 0$ y la inclusión de A_1 en A es generada por el conjunto $\{e_1, e_2 = e_{2'} + e_4 + e_5, e_3 = e_{3'} + e_6, \lambda, \beta, \alpha, \epsilon, \gamma := \xi\epsilon, \delta := \beta\xi\}$.

Observemos que estamos en las hipótesis del Lema 3.3.3: La cadena de subálgebras $B \subseteq A_1 \subseteq A$ cumple que existe un ideal I_0 de B ($I_0 = rad(B)$) tal que es un ideal de A_1 y existe un ideal I_1 de A_1 ($I_1 = rad(A_1)$) tal que es un ideal de A. Además A es un álgebra de Nakayama y por lo tanto es de tipo representación finita, en particular es 1-sizigia-finita. Además A_1/I_1 es de tipo representación finita. Por lo tanto, por el Lema 3.3.3 (en particular por Teorema 3.3.4 parte 2) se tiene que $fin.dim(B) < \infty$.

Si bien este ejemplo cumple su cometido, se puede observar que no es necesario aplicar el Teorema 3.3.4 propuesto por Guo para probar lo buscado, ya que en este caso se cumplen las hipótesis del Teorema 3.1.7 demostrado por Changchang Xi en 2004. Por tal motivo el ejemplo propuesto no muestra el potencial real de los Lemas 3.3.2 y 3.3.3. A continuación mostraré otra forma de probar que $fin.dim(B) < \infty$ (B definida en el ejemplo anterior) utilizando el Lema 3.3.2 sin caer en las hipótesis del Teorema 3.1.7.

Ejemplo 3.3.6 *Consideremos nuevamente el álgebra B, como se definió en el ejemplo anterior, definida por el siguiente carcaj:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\gamma"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 3 \arrow[l, shift left, "\alpha+\epsilon"] \end{tikzcd} \quad , \beta\gamma = \delta(\alpha+\epsilon),\ \gamma\beta = \gamma\delta = \lambda^2 = \lambda\beta = \lambda\delta = (\alpha+\epsilon)\beta\gamma\lambda = 0.$$

Ahora consideremos nuevamente el álgebra A como se definió en el ejemplo anterior, cuyo carcaj es

$$6 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\xi} 3' \xrightarrow{\epsilon} 2' \xrightarrow{\lambda} 5$$

con la relación $\alpha\beta\xi\epsilon\lambda = 0$, de la cual sabemos que B es una subálgebra y la inclusión está dada por el conjunto $\{e_1, e_2 = e_{2'} + e_4 + e_5, e_3 = e_{3'} + e_6, \lambda, \beta, \alpha + \epsilon, \gamma := \xi\epsilon, \delta := \beta\xi\}$.

En este caso la cadena de subálgebras obtenida es $B \subseteq A$, la cual no cumple que $I_0 = rad(B)$ sea un ideal de A ya que $\alpha + \epsilon$ pertenece al rad(B) pero al considerarlo en A tenemos que $e_6(\alpha+\epsilon) = \alpha \notin rad(B)$. Por lo tanto no podemos aplicar el Lema 3.3.3.

Ahora consideremos $I_0 = rad(B) - \{\alpha+\epsilon\}$ (ideal generado por todas las flechas menos $\alpha + \epsilon$) el cual es un ideal en B y también es un ideal a izquierda en A. Entonces tenemos que:

- *$I_0 = rad(B) - \{\alpha + \epsilon\}$ el cual es un ideal en B y un ideal a izquierda en A,*
- *A es 1-sizigia-finita (en este caso de representación finita),*
- *B/I_0 es B-sizigia-finita (en este caso es de representación finita),*

lo que implica que estamos en las hipótesis del Lema 3.3.2 y por lo tanto podemos afirmar que $fin.dim(B) < \infty$.

El ejemplo anterior deja en clara evidencia cómo el Lema 3.3.2 generaliza el Teorema 3.1.4 y la pertinencia de la generalización del Teorema 3.1.7.

3.3.2. Álgebra Homológica Relativa y Dimensión Finitista

Si B es una subálgebra de una álgebra de Artin A, recordar que notaremos por $\mathscr{P}(A, B)$ a la subcategoría completa de A-mod determinada por todos los A-módulos (A, B)-proyectivos.

Lema 3.3.7 *Sea $\varphi : B \to A$ una extensión de álgebras de Artin. Si B es de representación finita, entonces $\mathscr{P}(A, B)$ también lo es.*

Demostración: Sea $\{B_1, ..., B_t\}$ una lista completa de B-módulos indescomponibles no isomorfos. Si $X \in \mathscr{P}(A, B)$ es un A-módulo indescomponible, entonces ${}_BX = \bigoplus_{j=1}^t B_j^{n_j}$ visto como un B-módulo y por lo tanto $A \otimes_B X \simeq \bigoplus_{j=1}^t (A \otimes_B B_j)^{n_j}$. Ahora, dado que X es un sumando de $A \otimes_B X$ y es indescomponible, se tiene que X es un sumando de $A \otimes_B B_i$ para algún i, $1 \leq i \leq t$. Por lo tanto tenemos que el conjunto de los A-módulos indescomponibles no isomorfos que son sumandos de $A \otimes_B B_i$ para algún i, $1 \leq i \leq t$ determina una lista completa de los A-módulos indescomponibles no isomorfos de $\mathscr{P}(A, B)$. Este conjunto es finito por ser $\{B_1, ..., B_t\}$ finito y porque cada A-módulo $A \otimes_B B_i$ se descompone en una cantidad finita de módulos indescomponibles. $\square$

Teorema 3.3.8 *Sean B y A álgebras de Artin con B de representación finita. Supongamos que $\varphi : B \to A$ es una extensión de álgebras. Entonces:*

1. *Si $fin.dim(\varphi) \leq 1$, entonces A tiene dimensión finitista finita.*
2. *Si $2 \leq fin.dim(\varphi) < \infty$ y si para todo A-módulo X con dimensión proyectiva finita, ${}_AA \otimes_B X$ tiene dimensión proyectiva finita, entonces A tiene dimensión finitista finita.*

Demostración: Dado que B es de representación finita, por el Lema 3.3.7, tenemos que $\mathscr{P}(A, B)$ es de representación finita. Por lo tanto podemos asumir que $\{Q_1, ..., Q_m\}$ es una lista completa de A-módulos (A, B)-proyectivos indescomponibles no isomorfos. Sea X un A-módulo con dimensión proyectiva finita:

1. Si $fin.dim(\varphi) \leq 1$, entonces $dpr({}_AX) \leq 1$, y por lo tanto ${}_AX$ tiene una resolución (A, B)-proyectiva de longitud 1:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Siendo ${}_AP_1 \oplus P_0 \in \mathscr{P}(A, B)$, podemos escribir ${}_AP_1 \oplus P_0 = \oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}$, donde s_j es un entero no negativo para todo j.
Ahora acotemos la dimensión proyectiva de ${}_AX$:

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq \Psi(P_1 \oplus P_0) + 1 \\ &= \Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}) + 1 \\ &\leq \Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j) + 1. \end{aligned}$$

donde Ψ es la función de Igusa-Todorov, la primera desigualdad es por la Proposición 2.0.8 y la última desigualdad es por el Lema 2.0.7. Por lo tanto tenemos que la $fin.dim(A)$ está acotada por $\Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j) + 1$.

2. Si $2 \leq fin.dim(\varphi) = n < \infty$, entonces por definición $dpr({}_AX) \leq n$, por lo tanto ${}_AX$ tiene una resolución (A, B)-proyectiva de longitud n

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\ .$$

Consideremos ahora la resolución proyectiva estándar de ${}_AX$

$$... \longrightarrow C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\ ,$$

donde $C_0 = A \otimes_B X$ y $C_i = A \otimes_B ker\delta_{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Entonces podemos obtener la siguiente resolución (A, B)-proyectiva de ${}_AX$ de longitud n

$$0 \longrightarrow Im(\delta_n) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \qquad (3.2)$$

Por el Lema 1.6.23 observemos que

$$P_n \oplus C_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus ... \oplus D \simeq Im(\delta_n) \oplus P_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus ... \oplus D',$$

donde $D = P_0$ si n es par y $D = C_0$ si n es impar. Por lo tanto podemos afirmar que

$$Im\delta_n = \oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_{nj}} \;\; y \;\; C_i = \oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_{ij}},$$

donde todos los s_{ij} son enteros no negativos para $0 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

Probemos que los módulos C_i e $Im\ \delta_n$ tienen dimensión proyectiva finita para todo $0 \leq i \leq n-1$. Para ello consideremos la sucesión $0 \to ker\delta_0 \to C_0 \to X \to 0$ obtenida de (3.2). Dado que X y C_0 tienen dimensión proyectiva finita por hipótesis, se tiene que $dp(ker\delta_0) < \infty$. Ahora procediendo de igual forma con $ker\delta_0$ en lugar de X podemos probar que C_1 y $ker\delta_1$ tienen dimensión proyectiva finita. Continuando este procedimiento probamos lo buscado.

Acotemos la dimensión proyectiva de X

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq max\{proj.dim(Im\ \delta_n), dp(C_i), i = 0, ..., n-1\} + n. \\ &= max\{\Psi(Im\ \delta_n), \Psi(C_i), i = 0, ..., n-1\} + n. \\ &\leq max\{\Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_{nj}}), \Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j^{s_{ij}}), i = 0, ..., n-1\} + n. \\ &\leq \Psi(\oplus_{j=1}^{m} Q_j) + n. \end{aligned}$$

donde Ψ es función de Igusa-Todorov. □

Corolario 3.3.9 *Sea $f : B \to A$ una extensión de álgebras de Artin tal que $2 \leq fin.dim(f) < \infty$. Supongamos que $dp({}_BA) < \infty$ y A_B es proyectivo. Si $fin.dim(B) < \infty$, entonces $fin.dim(A) < \infty$.*

Demostración: Primero probemos que para todo A-módulo X con dimensión proyectiva finita se tiene que ${}_AA \otimes_B X$ tiene dimensión proyectiva finita. Sea X un A-módulo tal que $dp({}_AX) = p < \infty$, entonces ${}_AX$ admite una resolución proyectiva de longitud p

$$0 \longrightarrow {}_AP_p \longrightarrow {}_AP_{p-1} \longrightarrow ... \longrightarrow {}_AP_0 \longrightarrow {}_AX \longrightarrow 0\ .$$

Ahora, si vemos esa sucesión de A-módulos como una sucesión de B-módulos se tiene que $dp({}_BX) \leq máx\{dp({}_AP_i), i = 0, ..., p\} + p$. Entonces, si vemos X como un B-módulo, sabemos que $dp({}_BX) \leq dp({}_BA) + dp({}_AX) = m < \infty$. Podemos entonces considerar la siguiente resolución B-proyectiva de ${}_BX$ de longitud m:

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow {}_BX \longrightarrow 0 .$$

Siendo que A_B es proyectivo, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes_B P_m \longrightarrow A \otimes_B P_{m-1} \longrightarrow ... \longrightarrow A \otimes_B P_0 \longrightarrow A \otimes_B X \longrightarrow 0$$

es exacta y es una resolución proyectiva de $A \otimes_B X$, lo cual prueba que $dp(A \otimes_B X) < \infty$.

Sea X un A-módulo con $dp({}_AX) < \infty$. Dado que $2 \leq fin.dim(f) < \infty$, por lo hecho en la prueba del Teorema 3.3.8, ${}_AX$ tiene una resolución (A, B)-proyectiva de longitud n:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 .$$

tal que ${}_AY$ y ${}_AC_i$ con $0 \leq i \leq n-1$ tienen dimensión proyectiva finita y para todo $0 \leq i \leq n-1$ C_i se expresa de la siguiente forma: $C_i = A \otimes_B M_i$, donde ${}_BM_i$ tiene dimensión proyectiva finita. Por hipótesis sabemos que $fin.dim(B) = m < \infty$, entonces ${}_BM_i$ tiene una resolución proyectiva de longitud m:

$$0 \longrightarrow Q_m \longrightarrow Q_{m-1} \longrightarrow ... \longrightarrow Q_0 \longrightarrow {}_BM_i \longrightarrow 0 .$$

Dado que consideramos A_B proyectivo, la sucesión

$$0 \longrightarrow A \otimes_B Q_m \longrightarrow A \otimes_B Q_{m-1} \longrightarrow ... \longrightarrow A \otimes_B Q_0 \longrightarrow A \otimes_B M_i \longrightarrow 0 .$$

es exacta y es una resolución proyectiva de ${}_AA \otimes_B M_i$, por lo cual podemos afirmar que $dp({}_AA \otimes_B M_i) \leq m$.

Notemos que $dp({}_BY) < \infty$ ya que $dp({}_AY) < \infty$ y $dp({}_BY) \leq dp({}_AY) + dp({}_BA) < \infty$. Ahora procediendo igual que con ${}_BM_i$ podemos justificar que $dp({}_AY) \leq dp(A \otimes_A Y) \leq m$. Ahora podemos acotar la dimensión proyectiva de ${}_AX$:

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq máx\{dp(Y);\ dp(C_i), i = 0, ..., n-1\} + n \\ &\leq m + n. \end{aligned}$$

Esto implica que $fin.dim(A) < \infty$. $\square$

Capítulo 4

Aportes a la Conjetura finitista

El objetivo de este capítulo es profundizar en el alcance de los resultados obtenidos por Shufeng Guo, observando cómo se caracterizan los principales resultados mencionados y dando posibles ideas de cómo utilizarlos en casos particulares.

4.1. Extensiones y Álgebras Cociente

Definición 4.1.1 *Sea A un álgebra de Artin e I un ideal de A, se define la **subcategoría $C_{A,I}$** de A/I-mod como $C_{A,I} := \{M \in A\text{-mod} \mid M$ es un A-módulo sin torsión y $M \in A/I\text{-mod}\}$.*

Observación 4.1.2
1. *Notemos también que si X es un módulo sin torsión de A, se tiene que $IX \hookrightarrow X \hookrightarrow A$ y por lo tanto $IX \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/IX$, lo que implica que $IX = \Omega(A/IX) \oplus Q$ donde Q es un A-módulo proyectivo.*
2. *En la demostración del Teorema 3.3.1 se define el A-módulo $Y := I\Omega_A(X)$ el cual es un A/J-módulo, y por lo dicho en la parte 1. tenemos que existe un A-módulo W y un A-módulo Q proyectivo tal que $Y \simeq \Omega(W) \oplus Q$. Tenemos entonces que $Y \in C_{A,J}$ y por lo tanto podemos enunciar de forma más general el Teorema 3.3.1.*

El siguiente teorema, además de generalizar algunos resultados de Guo (Teorema 3.3.1 y Lema 3.3.2), deja en evidencia cómo se relacionan estos resultados entre sí.

Teorema 4.1.3 *Sea $B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_{s-1} \subseteq A_s = A$ una cadena de* *subálgebras de un álgebra de Artin A tal que I_{i-1} es un ideal de A_{i-1} y también un ideal a izquierda de A_i para todo $1 \leq i \leq s$ con s un entero positivo. Sea $I = I_{s-1}...I_1 I_0$ y J un ideal de B que también es un ideal en A tal que $JIrad(B) = 0$. Si ambos $C_{A,J}$ y B/I son B-sizigia-finita, entonces $fin.dim(B) < \infty$.*

Demostración: Primero observemos que $I = I_{s-1}...I_1 I_0$ es un ideal de B contenido en I_0. Sea X es un B-módulo con dimensión proyectiva finita, entonces podemos construir la siguiente sucesión exacta de B-módulos.

$$0 \longrightarrow I\Omega_B(X) \longrightarrow \Omega_B(X) \longrightarrow \Omega_B(X)/I\Omega_B(X) \longrightarrow 0$$

Dado que B/I es $B - finita$ existe un entero no negativo p y un B-módulo M tal que $\Omega_B^p(Y) \in add({}_B M)$, siendo $Y := \Omega_B(X)/I\Omega_B(X)$ claramente un B/I-módulo.

Por otro lado tenemos que $\Omega_B(X)$ es un B-módulo sin torsión, entonces $I_0\Omega_B(X)$ es un A_1-módulo sin torsión por el Lema 3.1.9. Inductivamente, por el Lema 3.1.9 obtenemos que $Z := I\Omega_B(X)$ es un A-módulo sin torsión y existe un A-módulo proyectivo Q y un A-módulo W tal que $Z \simeq \Omega_A(W) \oplus Q$ como A-módulos. Además $JI\Omega_B(X) \subseteq JIrad(P(X)) = JIrad(B)P(X) = 0$. Por lo tanto $Z \in C_{A,J}$, y siendo que $C_{A,J}$ es $B - sizigia - finita$ existe un entero no negativo m y un B-módulo N tal que $\Omega_B^m(Z) \in add({}_B N)$.

Si $n = \text{máx}\{p, m\}$, tomando la enésima sizigia de la sucesión anterior y por el Lema de la Herradura, se obtiene la sucesión exacta de B-módulos

$$0 \longrightarrow \Omega_B^n(Z) \longrightarrow \Omega_B^{n+1}(X) \oplus P \longrightarrow \Omega_B^n(Y) \longrightarrow 0$$

con P B-módulo proyectivo. Ahora podemos acotar la dimensión proyectiva de ${}_B X$.

$$\begin{aligned} dp({}_B X) &\leq dp(\Omega_B^{n+1}(X)) + n + 1 \\ &= dp(\Omega_B^{n+1}(X) \oplus P) + n + 1 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1}(Z) \oplus \Omega_B^{n+2}(Y)) + n + 3 \\ &\leq \Psi(\Omega_B^{n+1-m}(N) \oplus \Omega_B^{n+2-p}(M)) + n + 3. \end{aligned}$$

donde Ψ es la función de Igusa-Todorov. Por lo tanto $fin.dim(B)$ está acotada por $\Psi(\Omega_B^{n+1-m}(N) \oplus \Omega_B^{n+2-p}(M)) + n + 3$. □

Si en el Teorema 4.1.3 tenemos que $A = B$ obtenemos el siguiente corolario, el cual generaliza en cierta medida el Teorema 3.3.1 .

Corolario 4.1.4 *Sea A un álgebra de Artin y sean J e I ideales de A tales que $JIrad(A) = 0$. Si ambos $C_{A,J}$ y A/I son A-sizigia-finita, entonces A tiene dimensión finitista finita.*

Observación 4.1.5 *Si B es una subálgebra de un álgebra de Artin A, entonces si A es 1-$sizigia$-$finita$, $C_{A,J}$ es de representación finita para todo ideal J de A y por lo tanto $C_{A,J}$ es B-sizigia-finita. Esto implica que el Teorema 4.1.3 generaliza el Lema 3.3.2 (basta considerar $J = 0$).*

El siguiente corolario se deduce del Teorema 4.1.3 y es un resultado distinto a los planteados por Guo.

Corolario 4.1.6 *Sea $B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_{s-1} \subseteq A_s = A$ una cadena de subálgebras de un álgebra de Artin A tal que I_{i-1} es un ideal de A_{i-1} y también un ideal izquierda de A_i para todo $1 \leq i \leq s$ con s un entero positivo. Sean $I = I_{s-1}...I_1I_0$ y J un ideal de B que también es un ideal en A tal que $JIrad(B) = 0$. Si A/J es de tipo representación finita y $B/I_{s-1}...I_1I_0$ es B-sizigia-finita, entonces $fin.dim(B) < \infty$.*

Demostración: Si A/J es de tipo representación finita, entonces $C_{A,J}$ es B-sizigia finita y por el Teorema 4.1.3 se tiene que $fin.dim(B) < \infty$.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación del Corolario 4.1.6.

Ejemplo 4.1.7 *Consideremos el álgebra B determinada por el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & \\
1 \arrow[ddr, "\eta"'] & 4 \arrow[l, "\omega"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[ul, "\theta_1"'] \arrow[dl, "\theta_2"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\alpha_2"] & \\
 & 6 \arrow[uur, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

y las relaciones $\epsilon\theta_1\alpha_1\eta = \epsilon\theta_2\alpha_2\eta = \eta\epsilon = \delta\omega - \theta_1\alpha_1 - \theta_2\alpha_2 = 0$.

Ahora, B es una subálgebra de A, generada por el conjunto $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4, e_5,\ e_6 = e_7 + e_8, \alpha_1, \alpha_2, \epsilon, \delta, \eta, \theta_1 = \delta\beta_1,\ \theta_2 = \beta_2\delta,\ \omega = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2\}$, donde A está deter-

minada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & & & \\
7 & 1 \arrow[l, "\eta"'] & & 4 \arrow[ul, "\beta_1"'] \arrow[dl, "\beta_2"] & 5 \arrow[l, "\delta"'] & 8 \arrow[l, "\epsilon"'] \\
 & & 3 \arrow[ul, "\alpha_2"] & & &
\end{tikzcd}$$

y las relaciones $\epsilon\delta\beta_1\alpha_1\eta = \epsilon\delta\beta_2\alpha_2\eta = 0$.
En B *consideremos los ideales* I *y* J *generados por* $\{\alpha_2, \theta_2, \omega, \eta\}$ *y* $\{\alpha_1, \delta\}$ *respectivamente. Observemos que tanto* I *como* J *son ideales en* A *y* $JIrad(B) = 0$ *(en particular* $JI = 0$*). Observemos que* A/J *y* B/I *son* B*-sizigia-finita (en particular de representación finita):*
A/J *queda determinada por el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
7 & 1 \arrow[l, "\eta"'] & 3 \arrow[l, "\alpha_2"'] & 4 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[r, "\beta_1"] & 2 & & 5 & 8 \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

y B/I *está determinada por el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 6 \arrow[dl, "\epsilon"'] \\
1 & 2 \arrow[l, "\alpha_1"'] & 5 \arrow[l, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
3 & & & 4
\end{tikzcd}$$

Por el Corolario 4.1.6 se tiene que $fin.dim(B) < \infty$.

4.2. Resoluciones Proyectivas Relativas

Definición 4.2.1 *Sean* A *y* B *dos álgebras de Artin,* $f : B \to A$ *un homomorfismo de álgebras y* C_A *una subcategoría de* A*-mod. Se define* $\boldsymbol{fin.dim(f, C_A)}$:= $sup\{dpr(X) \mid X \in C_A \text{ y } dp(X) < \infty\}$.

Al igual que en la sección anterior, en esta sección se pretende seguir profundizando en los resultados obtenidos por Guo. El siguiente teorema muestra una generalización del Teorema 3.3.8.

Teorema 4.2.2 *Sean B y A álgebras de Artin. Supongamos que $f : B \to A$ es una extensión de álgebras, entonces:*

1. *Si existe un entero positivo n tal que $fin.dim(f, \Omega^n(A{-}mod)) \leq 1$ y $\Psi_A dim\mathscr{P}(A, B) < \infty$, entonces A tiene dimensión finitista finita.*
2. *Asumamos que $2 \leq fin.dim(f) < \infty$. Si para todo A-módulo X con dimensión proyectiva finita, ${}_AA \otimes_B X$ tiene dimensión proyectiva finita y $fin.dim\mathscr{P}(A, B) < \infty$, entonces A tiene dimensión finitista finita.*

Demostración: 1. Sea X un A-módulo con dimensión proyectiva finita, si existe un entero positivo n tal que $fin.dim(f, \Omega^n(\mathrm{A}{-}mod)) \leq 1$, entonces $dpr(\Omega^n_A(X)) \leq 1$, y por lo tanto $\Omega^n_A(X)$ tiene una resolución (A, B)-proyectiva de longitud 1:

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \Omega^n_A(X) \longrightarrow 0$$

Siendo ${}_A(P_1 \oplus P_0) \in \mathscr{P}(A, B)$ podemos acotar la dimensión proyectiva de ${}_AX$:

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq dp(\Omega^n_A(X)) + n. \\ &\leq \Psi(P_1 \oplus P_0) + n + 1. \\ &\leq \Psi dim\mathscr{P}(A, B) + n + 1. \end{aligned}$$

donde Ψ es función de Igusa-Todorov y la segunda desigualdad es por el Lema 2.0.7. Por lo tanto tenemos que la $fin.dim(A)$ está acotada por $\Psi dim\mathscr{P}(A, B) + n + 1$.

2. Si $2 \leq fin.dim(f) = n < \infty$, entonces por definición $dpr({}_AX) \leq n$, por lo tanto ${}_AX$ tiene una resolución (A, B)-proyectiva de longitud n

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\ .$$

Consideremos ahora la resolución proyectiva estándar de ${}_AX$

$$... \longrightarrow C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\ ,$$

donde $C_0 = A \otimes_B X$ y $C_i = A \otimes_B ker\delta_{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Entonces podemos obtener la siguiente resolución (A, B)-proyectiva de ${}_AX$ de longitud n

$$0 \longrightarrow Im\ \delta_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0\ . \tag{4.1}$$

Por el Lema 1.6.23 observemos que

$$P_n \oplus C_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus ... \oplus D \simeq Im\ \delta_n \oplus P_{n-1} \oplus C_{n-2} \oplus ... \oplus D',$$

donde $D = P_0$ si n es par y $D = C_0$ si n es impar. Por lo tanto podemos afirmar que $Im\ \delta_n$ es un sumando de $P \in \mathscr{P}(A, B)$.

Probemos que los módulos C_i e $Im\ \delta_n$ tienen dimensión proyectiva finita para todo $0 \leq i \leq n-1$. Para ello consideremos la sucesión $0 \to ker\delta_0 \to C_0 \to X \to 0$ obtenida de 4.1. Dado que X y C_0 tienen dimensión proyectiva finita por hipótesis, se tiene que proj.dim $(ker\delta_0) < \infty$. Ahora procediendo de igual forma con $ker\delta_0$ en lugar de X podemos probar que C_1 y $ker\delta_1$ tienen dimensión proyectiva finita. Continuando este procedimiento probamos lo buscado.

Acotemos la dimensión proyectiva de X

$$\begin{aligned} dp({}_AX) &\leq máx\{dp(Im\ \delta_n), dp(C_i), i = 0, ..., n-1\} + n. \\ &\leq fin.dim\mathscr{P}(A, B) + n. \end{aligned}$$

□

Del teorema anterior se puede recuperar el Corolario 3.3.9. Basta observar que la demostración del mismo consiste en probar que para todo A-módulo X con dimensión proyectiva finita, ${}_AA \otimes_B X$ tiene dimensión proyectiva finita y $fin.dim\mathscr{P}(A, B) < \infty$, dando además por sabido que $2 \leq fin.dim(f) < \infty$. Esto implica que estamos en las hipótesis del Teorema 4.2.2 y por lo tanto $fin.dim(A) < \infty$.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, KR. Fuller *Rings and Categories of Modules.* Springer Science Business Media (2012).

[2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Rerpresentation Theory of Associative Algebra*. Cambridge University Press, (2006).

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[4] E. Green, C. Psaroudakis, *On Artin Algebras Arising from Morita Contexts.* Algebr. Represent. Theory 17, 1485–1525. (2014).

[5] S. Guo, *Finitistic dimension conjecture and extensions of algebras*, Comm. Algebra 47 (2018).

[6] P.J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag (1971).

[7] F. Huard, M. Lanzilotta, O. Mendoza, *An approach to the finitistic dimension conjecture.* J. of Algebra 319, 3916-3934. (2008)

[8] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York (1974).

[9] G. Hochschild, *Relative homological algebra*, Trans. American. Math. Soc. 82, 246-269.(1956).

[10] G. Hochschild, *Note on relative homological dimension*, Nagoya Math. J. 15, 89-94. (1958).

[11] K. Igusa, G. Todorov, *On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras*, Representation of algebras and related topics, 201-204, Field Inst Commun., 45, Ammer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[12] G. Mata, *Funciones de Igusa-Todorov.* Tesis de doctorado. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias - PEDECIBA, (2015).

[13] J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*, Springer, New York (2009).

[14] R.Schiffler, *Quiver Representations*, CMS Books in Mathematics. Springer International Publishing, (2014).

[15] J. Thévenaz, *Relative projective covers and almost split sequences*, Comm. Algebra 13 (7)(1985).

[16] J. Vivero, *Funciones de Igusa-Todorov Generalizadas. Aplicaciones a la Conjetura Finitista.* Tesis de Doctorado. Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias-PEDECIBA, (2022).

[17] C. X. Wang, C. C. Xi, *Finitistic dimension conjecture and radical-power extensions*, J. Pure Appl. Algebra 221, 832-846. (2017).

[18] C. C. Xi, *Erratum to "On the finitistic dimension conjecture, I: related to representation-finite algebras, J. Pure Appl. Algebra 193 (2004),287-305."* J. Pure Appl. Algebra 202, 325-328. (2005).

[19] C. C. Xi, *On the finitistic dimension conjecture, I: related to representation-finite algebras*, J. Pure Appl. Algebra 193,287-305. (2004).