Tesis de Maestría

Representaciones de extensiones afines de variedades abelianas

Leandro Bentancur Rodríguez

2024

Orientador:
Alvaro Rittatore
Centro de Matemática

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

El objetivo de la tesis es presentar las propiedades básicas de la teoría de representaciones para las extensiones afines de una variedad abeliana. Esta teoría se presenta como una generalización de la teoría de representaciones de los esquemas en grupos afines. Una extensión afín $\mathcal{S}$ de una variedad abeliana A por un esquema en grupos afín H es una sucesión exacta corta de esquemas en grupos $1 \to H \to G \to A \to 0$. Una representación de $\mathcal{S}$ es una acción de G sobre un fibrado vectorial homogéneo E sobre A tal que si $q(g) = a$, entonces la acción por g lleva la fibra sobre b a la fibra sobre $a+b$, de modo que el morfismo correspondiente es una transformación lineal. Presentamos la construcción de esta teoría de representaciones de S y la prueba de un teorema del tipo "dualidad de Tannaka" desarrollada recientemente por Rittatore, del Ángel y Ferrer. Estudiamos propiedades básicas de esta teoría como ser la caracterización de la semisimplicidad y del caso unipotente, obteniendo resultados que vinculan estos casos con la teoría de representaciones clásica para el caso afín.

Abstract

The focus of this thesis is to explore the fundamental properties of representation theory concerning affine extensions of abelian varieties. This theory is presented as a generalization of the representation theory of schemes in affine groups. An affine extension S of an abelian variety A by an affine group scheme H is a short exact sequence of group schemes 1 -¿ H -¿ G -¿ A -¿ 0. If we call q the morphism from G -¿ to A, a representation of S is an action of G on a homogeneous vector bundle E over A such that if $q(g) = a$, then the action by g takes the fiber over b to the fiber over $a + b$, so that the corresponding morphism is a linear transformation. We present the construction of this representation theory of $\mathcal{S}$ and the proof of a theorem of the "Tannaka duality" type recently developed by Rittatore, del Ángel, and Ferrer. We study basic properties of this theory, such as the characterization of semisimplicity and the unipotent case, obtaining results that link these cases with classical representation theory for the affine case.

Agradecimientos

A Alvaro por la dedicación y la paciencia tanto en la licenciatura como a lo largo de la maestría.

Le agradezco a Nacho y Walter por haber sido parte del tribunal, y por sus valiosas correcciones y preguntas.

A la Universidad de la República por haberme financiado mediante el programa de becas CAP para la realización de esta maestría.

A mis viejos por el apoyo constante, inculcarme la pasión por la búsqueda del conocimiento, y alentarme a siempre seguir mis deseos.

A Romi, Manu, Vitto, Agus y Avi por hacer de Vázquez un hogar donde transitar este camino.

A Ani por acompañarme en este trayecto y ser apoyo e impulso.

A mis compañeras y compañeros de matemática, investigadores, posgraduandas/os y estudiantes, por compartir charlas de matemática y otras yerbas y ser parte de este trayecto. Obviamente nombrar es omitir a muchos pero gracias a Favio, Mauro, Natalia, Fede, Matías, Ernesto, Vero, Alejo, Bellati, Radi, Joaquín Lejtreger, Joaquín Lema, Clara, Camilo, Pablo, Jimmy, Mel, Paula, Marcos, Elena, Sofía, Marcelo, Diego, Iván, Gonzalo, Rafael, Alejandro, Juan, entre otros.

Gracias a Lydia, Claudia, Analú y Natalia, porque sin su trabajo ninguno de los otros sería posible.

A quienes construyeron y construyen la Universidad de la República. Especialmente a mis compañeras y compañeros de la AUPP.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contenido de la tesis

De la misma forma que podemos definir los grupos topológicos al estudiar los espacios topológicos o los grupos de Lie haciendo lo mismo con las variedades diferenciales, en el estudio de los esquemas podemos definir los esquemas en grupos como esquemas equipados de operaciones de multiplicación, inverso y un elemento neutro, de forma que estas operaciones respeten la estructura de esquema. Si bien hay desarrollo en esta área ya en el siglo XIX vinculado a la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie, donde se destacan por ejemplo Lie, Study y Cartan, la teoría tuvo un desarrollo importante en los años 40 y 50 con los aportes destacados de Chevalley y Kolchin. Una exposición sistemática ya en el contexto de la teoría de esquemas se encuentra en el SGA 3 coordinado por Grothendieck y Demazure (ver [16]). Más adelante, Demazure y Gabriel (ver [11]) y Waterhouse (ver [36]) presentan exposiciones más sistemáticas de la teoría.

En cuanto al estudio de la teoría de representaciones, un resultado relevante es el desarrollar una dualidad de tipo Tannaka que relacione la categoría a estudiar con las categorías de representaciones de sus objetos, consistiendo en dos problemas centrales. El primero es el problema de reconstrucción, esto es si dada la categoría de representaciones de un objeto podemos reconstruirlo en cierto sentido, y en particular, si podemos distinguir objetos distintos a partir de sus categorías de representaciones. El segundo problema es el de reconocimiento, esto es si podemos describir intrínsecamente qué tipo de categorías son las categorías de representaciones de alguno de nuestros objetos. En [30], Saavedra presenta una prueba de estos resultados con algunos errores para el caso de esquemas en grupos afines. Estos fueron corregidos por Deligne y Milne [DM]. Otros aportes relevantes en esta área son la teoría sobre la estructura de grupos reductivos (ver [9]) y la construcción de métodos geométricos en la teoría de invariantes (ver [25]).

La extensión de la teoría de representaciones de esquemas en grupos afines al caso general de los esquemas en grupos presenta como principal obstrucción el hecho de que un esquema en grupos propio (ver Definición A.0.8) sólo puede actuar en un espacio vectorial de forma trivial. Esto se desprende de que una acción lineal de esquema en grupos G en un espacio vectorial V es equivalente a un morfismo de esquemas en grupos $G \to GL(V)$, que es un esquema afín, que resulta un morfismo constante por ser G propio. En [RdAF], Rittatore, del Angel y Ferrer presentan la construcción de una teoría de representaciones que generaliza la teoría clásica para el caso afín y obtienen resultados del tipo dualidad de Tannaka.

Un resultado clave para entender la estructura de un esquema en grupos de tipo afín es el Teorema de Estructura de Chevalley (ver [8]), que en la versión de Brion (ver [Bri17]) dice que todo esquema en grupos de tipo finito sobre un cuerpo perfecto $\Bbbk$ contiene un menor subesquema en grupos H tal que G/H es una variedad abeliana (un esquema en grupos liso, conexo y propio), además H es afín y conexo. Esto también puede ser interpretado como que todo $\Bbbk$-esquema en grupos de tipo finito G puede ser visto como el centro de una sucesión exacta corta $1 \to H \to G \to A \to 0$, donde H es un esquema en grupos de tipo finito afín y A es una variedad abeliana. Sumando a este teorema el resultado de aproximación de esquemas en grupos casi-compactos de Perrin (ver [27]), podemos ver a todo esquema en grupos casi-compacto como la extensión de una variedad abeliana por un esquema en grupos afín (ver [RdAF, Corolario 2.27]).

En [RdAF] se construye entonces una teoría de representaciones para extensiones afines de variedades abelianas, esto son sucesiones exactas cortas de esquemas en grupos $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \xrightarrow{q} 0$, donde H es un esquema en grupos afín casi-compacto, A es una variedad abeliana y q es un morfismo afín y fielmente plano. Una representación de $\mathcal{S}$ sobre un fibrado vectorial homogéneo $\pi : E \to A$ (ver definiciones 3.2.1 y 3.2.10) es una acción de G sobre un fibrado vectorial homogéneo E sobre A tal que si $q(g) = a$, entonces la acción por g lleva la fibra sobre b a la fibra sobre $a + b$, de modo que el morfismo correspondiente es una transformación lineal (ver 3.3.1 para una definición formal). Es en este contexto entonces donde Rittatore, del Ángel y Ferrer dan respuesta a los problemas de reconstrucción (ver Teorema 3.3.15) y de reconocimiento (ver Teorema 3.3.17).

En esta tesis se presentan los aspectos introductorios de la teoría de representaciones tanto del caso afín como para las extensiones afines de extensiones abelianas, incluyendo la prueba del problema de reconstrucción en ambos casos. Presentamos también una perspectiva para emular la prueba al problema de reconstrucción sin necesidad de utilizar la categoría de fibrados con morfismos graduados (ver Definición 3.2.12), y restringiéndonos solamente a la categoría usual de fibrados vectoriales homogéneos que es una categoría abeliana. Concluimos el trabajo con el estudio las representaciones semisimples, diagonalizables y unipotentes en el caso de las extensiones afines de tipo finito de variedades abelianas y conectando con las caracterizaciones ya conocidas en el caso afín. En particular, probamos que la categoría de representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \xrightarrow{q} 0$ va a ser semisimple, es decir, que todo objeto se descompone como suma directa de objetos simples (ver Definición 4.1.1), si y sólo si el grupo H es linealmente reductivo (lo que es equivalente a que la categoría de representaciones de H sea semisimple). Como corolario de este resultado obtenemos que en la descomposición en representaciones simples todas serán en representaciones sobre fibrados de dimensión 1 si y sólo si el grupo H es diagonalizable. Finalmente, para el caso de los grupos unipotentes resulta que las representaciones de $\mathcal{S}$ se filtraran por una serie de subfibrados $A = E_0 \subset ... \subset E_n = E$ estables por la acción de G tal que E_{k+1}/E_k es un fibrado trivial, si y sólo si el esquema en grupos H es unipotente.

Para esta conexión van ser claves los hechos de que dado una extensión afín de una variedad abeliana $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \xrightarrow{q} 0$, la categoría de representaciones de dimensión finita de H es equivalente a la categoría de representaciones de $\mathcal{S}$ que dejan fija la base (ver 3.3.7), y en particular, que dadas dos representaciones E y E' de $\mathcal{S}$, estas representaciones son isomorfas si y sólo si son isomorfas las representaciones inducidas de H en E_0 y E'_0, las fibras del neutro de A. Otro paso necesario es observar a qué corresponde la suma directa de representaciones para las extensiones afines de variedades abelianas, donde no resulta posible extender la suma de forma que cumpla la propiedad universal de la suma directa, pero sí podemos definir la suma de forma de dar una definición de semisimplicidad en este contexto.

Se asumirá del lector o lectora conocimientos estándar de un curso de geometría algebraica y algunas nociones básicas de esquemas y teoría de categorías. Para consultar sobre estos tópicos recomendamos dirigirse por ejemplo a [35] o [13] para la teoría de esquemas y [20] o [5] para la teoría de categorías. Recomendamos también [MilAG] para la teoría de esquemas en grupos afines y sus representaciones.

1.2. Convenciones y notaciones

En este trabajo a menos que haya una aclaración los esquemas serán siempre $\Bbbk$-esquemas sobre un cuerpo $\Bbbk$, así como los morfismos de esquemas y productos serán sobre $\mathrm{Spec}(\Bbbk)$. Notaremos $\overline{\Bbbk}$ a la clausura algebraica de $\Bbbk$ y $char(\Bbbk)$ a su característica. Dado un esquema X y un morfismo de $\Bbbk$-esquemas $x : S \to X$ diremos que x es un S-punto y notaremos $x \in X(S)$. En el caso de que S sea un esquema afín, es decir, $S = \mathrm{Spec}(A)$ para A una $\Bbbk$-álgebra conmutativa, diremos entonces que x es un A-punto y notaremos $x \in X(A)$. Notaremos $\mathcal{O}_X$ al haz de funciones regulares de X, y en ocasiones que no generen confusión nombraremos a $\mathcal{O}_X(X)$, la $\Bbbk$-álgebra de secciones globales de X, simplemente como $\mathcal{O}(X)$. Dados dos $\Bbbk$ esquemas X y T, notaremos al esquema $X \times_{Spec(\Bbbk)} T$ como X_T, y en el caso de que T sea $Spec(K)$ para K una extensión de álgebras $\Bbbk$, notaremos X_K al K-esquema $X \times_{\mathrm{Spec}(\Bbbk)} \mathrm{Spec}(K)$.

Decimos que un morfismo de esquemas $f : X \to S$ es separado si el morfismo diagonal $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ es una inmersión cerrada, donde $X \times_S X$ es el pull-back sobre el morfismo f. Un esquema es separado si su morfismo estructural lo es. En esta tesis trabajaremos sobre esquemas separados. Esta hipótesis se utilizará en el Lema A.0.13 que es necesario para varias de las construcciones básicas de esquemas en grupos.

Un espacio topológico es casi-compacto si todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito. Un morfismo de esquemas es casi-compacto si su morfismo subyacente a nivel de espacios topológicos lo es, es decir, si la preimagen de todo abierto casi-compacto también es casi-compacto. Un esquema es casi-compacto si su morfismo estructural lo es. En este trabajo todos los esquemas serán casi-compactos. En este contexto tenemos resultados de aproximación como el Teorema 2.3.8.

El cuerpo $\Bbbk$ siempre será perfecto, es decir, los polinomios minimales sobre $\Bbbk$ no tienen raíces múltiples. Ejemplos de cuerpos perfectos son los cuerpos de característica 0, los cuerpos finitos, los cuerpos algebraicamente cerrados y las extensiones algebraicas sobre cuerpos perfectos. En esta tesis los cuerpos serán siempre perfectos. Esta propiedad permite junto con el descenso por Galois (ver [MilAG, Sección A.J]) que algunas construcciones conmuten con extensiones de cuerpos.

1.3. Descripción por capítulo

En el segundo capítulo se presentarán definiciones y propiedades básicas de los esquemas en grupos, sus acciones y su estructura. Comenzaremos definiendo los esquemas en grupos, observándolos desde el punto de vista de esquemas, como functores de esquemas a grupos y como álgebras de Hopf (para el caso afín). También veremos algunos ejemplos de esquemas e introduciremos a las variedades abelianas. Continuaremos definiendo las acciones de esquemas en grupos sobre esquemas en general y describiendo cómo caracterizarlas como transformaciones naturales del esquema en grupos al functor de automorfismos del esquema donde estamos actuando. En la última sección veremos algunos resultados acerca de la estructura de los esquemas en grupos. Allí veremos la definición de una extensión afín de una variedad abeliana y enunciaremos el Teorema de Chevalley (en la versión dada en [Bri17]) que afirma que todo esquema en grupos de tipo finito tiene un menor subesquema normal, afín y conexo tal que el cociente es una variedad abeliana (recordar que estamos bajo la hipótesis que $\Bbbk$ es un cuerpo perfecto). Esto nos permite describir un esquema en grupos de tipo finito a partir de una parte afín y una variedad abeliana. Continuaremos presentando un resultado de Perrin ([27]) que permite aproximar esquemas en grupos casi-compactos por esquemas en grupos de tipo finito, lo que combinado con el Teorema de Chevalley nos permite tener un resultado de aproximación de extensiones afines sobre variedades abelianas por extensiones de tipo finito que será de utilidad para poder extender la teoría de representaciones clásicas a este contexto.

En el tercer capítulo de la monografía se introduce la teoría de representaciones para el caso de esquemas en grupos afines y su dualidad de Tannaka ([30], [DM]), y luego se repite el mismo formato para la teoría de representaciones de extensiones afines de variedades abelianas ([RdAF]). En la primera sección se definen las representaciones de esquemas en grupos afines, se observan algunas propiedades como por ejemplo que toda representación es racional, y se presenta el resultado y la solución al problema de reconstrucción. En la segunda sección del capítulo se presentan la categoría de fibrados vectoriales homogéneos sobre variedades abelianas y el functor de automorfismos para un objeto de esta categoría, incluyendo la prueba de su representabilidad como esquema en grupos. En la tercera sección se presenta la categoría de representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana y la solución al problema de reconstrucción. También presentamos la construcción del cubrimiento universal de una variedad abeliana y observamos que su categoría de representaciones es equivalente a la de los fibrados vectoriales homogéneos con morfismos graduados. Para terminar el capítulo, en la última sección, veremos que la construcción expuesta para dar respuesta al problema de reconstrucción podría presentarse sin utilizar directamente la categoría de fibrados vectoriales con morfismos graduados $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$ y restringiéndonos a $\mathrm{HVB}_0(A)$ que es una categoría abeliana.

En el cuarto capítulo de la tesis trabajaremos con extensiones afines de tipo finito y estudiaremos las representaciones semisimples, diagonalizables y unipotentes de extensiones afines de variedades abelianas. Presentaremos en cada caso las definiciones y principales resultados de la teoría clásica de representaciones de esquemas en grupos afines, para luego presentarlos en el contexto de las extensiones afines de variedades abelianas. En la primera sección se presentan además operaciones en los morfismos graduados de fibrados homogéneos e inconvenientes para la universalidad de la suma directa.

Finalmente, en el apéndice se presentan algunas definiciones y propiedades básicas de la teoría de esquemas que son utilizadas a lo largo de la monografía.

Capítulo 2

Esquemas en Grupos

En esta sección comenzaremos viendo algunos aspectos básicos de la teoría de esquemas en grupos, centrándonos algunas primeras definiciones y propiedades. Para esto nos basamos principalmente en [Bri17]. Para ampliar la lectura sugerimos dirigirse a [MilAG], que da un tratamiento completo del caso afín, o a [14] para el caso de grupos algebraicos, esto es, variedades algebraicas con estructura de grupo compatible. En la última sección nos centramos en las extensiones afines de variedades abelianas, definiendo la categoría y presentando un resultado de aproximación que prueba que estas son pro-algebraicas. Aquí seguimos el artículo [RdAF], utilizando también los trabajos de Brion y Perrin (ver [Bri17] y [27]).

2.1. Definición de un esquema en grupos

Definición 2.1.1. Sea G un esquema sobre un cuerpo $\Bbbk$ y sean $m : G\times G \to G$, $i : G \to G$ y $e : Spec(\Bbbk) \to G$ morfismos de esquemas. Decimos que (G, m, e) es un esquema en grupos si se verifican los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m\times id_G"] \arrow[d, "id_G\times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

que representa la asociatividad,

$$\begin{tikzcd}
Spec(\Bbbk) \times G \arrow[r, "e\times id_G"] \arrow[dr, "p_2"'] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \times Spec(\Bbbk) \arrow[l, "id_G\times e"'] \arrow[dl, "p_1"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

que representa que e es el neutro, y

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "id_G \times i"] \arrow[dr, "c_e"'] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "i \times id_G"'] \arrow[dl, "c_e"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

que representa que i es el mapa inverso, donde c_e es el morfismo constante e, definido como $c_e = e \circ \mathrm{st}_G$, considerando $\mathrm{st}_G : G \to Spec(\Bbbk)$ el morfismo estructural. Usualmente omitiremos la mención al cuerpo $\Bbbk$ y diremos simplemente que G es un esquema en grupos.

Observación 2.1.2. Otra forma de ver un $\Bbbk$-esquema en grupos es en términos del functor de puntos y utilizaremos ambas formas permanentemente. Dado un esquema X, el functor de puntos h_X es el functor de la categoría de esquemas opuesta, a la que denominaremos Sch^{op}, a la categoría de conjuntos, $Sets$, definido de la siguiente forma:

- A cada esquema S le corresponde el conjunto de morfismos de S a X, que notamos $X(S)$.
- A cada morfismo de esquemas $f : S \to T$ le corresponde el mapa $h_X(T) \to h_X(S)$ que manda $g \in h_X(T) = X(T)$ a $g \circ f \in h_X(S) = X(S)$.

Decimos que un functor de Sch^{op} a $Sets$ es representable si es de la forma h_X para algún esquema X. Esta construcción nos asigna a cada esquema un functor de Sch^{op} a $Sets$ y el Lema de Yoneda prueba que cada esquema queda determinado a menos de un isomorfismo por su functor de puntos (ver [13, VI-2]). Esta construcción nos da una correspondencia entre los esquemas en grupos y los functores en grupos representables, es decir, los functores de Sch^{op} a $Groups$, donde $G(S)$ será entonces un grupo abstracto y $G(f) : G(T) \to G(S)$ un morfismo de grupos.

Si X es un esquema y $S = \mathrm{Spec}(R)$ es un esquema afín para R una $\Bbbk$-álgebra, al grupo $X(S)$ lo llamaremos $X(R)$ y a sus elementos les diremos que son R-puntos de X. Si X es $Spec(A)$, $X(R)$ se identifica con $Hom_{\Bbbk}(A, R)$.

Ejemplo 1. 1. El grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ es el esquema en grupos formado por la recta afín $\mathbb{A}^1$ equipada con la suma. Tenemos $m : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ definida por $m(x, y) = x + y$ y $m^{\#}(f)(x, y) = f(x+y)$, $i : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ definida por $i(x) = -x$ y $i^{\#}(f)(x) = f(-x)$, y $e : Spec(\Bbbk) \to \mathbb{G}_a$ definida por $e = 0$.

Por otro lado, el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ es el esquema en grupos $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ equipado con la multiplicación. En este caso los morfismos del esquema en grupo están definidos por $m(x, y) = xy$ y $m^{\#}(f)(x, y) = f(xy)$, $i(x) = x^{-1}$ y $i^{\#}(f)(x) = f(1/x)$, y $e = 1$ (recordar que $\Bbbk[G_m] = \Bbbk[x, x^{-1}]$).

2. Si V es un espacio $\Bbbk$–espacio vectorial, podemos verlo como un esquema en grupos tomándolo como un functor $Sch^{op} \to Groups$ (ver Observación 2.1.2). V está definido como $V\big(Spec(R)\big) = V \otimes_{\Bbbk} R$, visto como grupo abeliano respecto a la suma, y si $f : R \to R'$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras, entonces $V(f) = id_V \otimes f : V \otimes_{\Bbbk} R \to V \otimes_{\Bbbk} R'$. Observemos que si $\dim V = n$, entonces $\Bbbk[V] \cong S(V^{\vee}) \cong \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.Si V es de dimensión infinita y $B = \{e_i :\in I\}$ es una base, entonces $\Bbbk[V] \cong \Bbbk[B^{\vee}]$, donde $B^{\vee} = \{\delta_i : i \in I\} \subset V^{\vee}$ está dada por $\delta_i(e_j) = \delta_{ij}$. Para ver esto último, podemos observar que un morfismo de $\Bbbk$–álgebras $\Bbbk[B^{\vee}] \to R$ está determinado por sus valores en $\Bbbk[X]$ para todo subconjunto $X \subset B^{\vee}$.

3. Dado un espacio vectorial V, el esquema en grupos $GL(V)$ es el functor de grupos que le asigna a cada esquema S el grupo de automorfismos del haz de $\mathcal{O}_S$-módulos $\mathcal{O}_S \underset{\Bbbk}{\otimes} V$. Cuando V es un espacio vectorial de dimensión finita n, al elegir una base tenemos una identificación de V con $\Bbbk^n$ y de $GL(V)(S)$ con $GL_n(\mathcal{O}_S(S))$, que es el grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en $\mathcal{O}_S(S)$. Por lo tanto podemos representar a $GL(V)$ con el abierto afín del esquema $\mathbb{A}^{n^2}$ que es el complemento del esquema que es el cero del determinante. Este esquema en grupos GL_n es liso, conexo, afín y de tipo finito.

4. Consideremos el functor μ_3 que a una $\Bbbk$-álgebra R le asigna el conjunto $\{a \in R / a^3 = 1\}$ que es representado por Spec $\left(\frac{\Bbbk[T]}{(T^3-1)}\right)$. Este esquema tiene una estructura de grupo natural que hereda a partir del producto en $\Bbbk$ como en la parte 1. Discutamos según $\Bbbk$ a qué corresponde este esquema en grupos:

   - Supongamos que $\Bbbk$ contiene a las raíces terceras de la unidad (por ejemplo cuando es algebraicamente cerrado) y su característica no es 3. Entonces
   $$\frac{\Bbbk[T]}{(T^3-1)} \cong \frac{\Bbbk[T]}{(T-1)} \times \frac{\Bbbk[T]}{(T-\zeta)} \times \frac{\Bbbk[T]}{(T-\zeta^2)}$$
   donde 1, ζ y ζ^2 son raíces cúbicas de 1 en $\Bbbk$. Entonces μ_3 es la unión disjunta de tres copias de Spec($\Bbbk$).

   - Supongamos que $\Bbbk$ no contiene a las raices terceras de la unidad y su característica no es 3. Luego
   $$\frac{\Bbbk[T]}{(T^3-1)} \cong \frac{\Bbbk[T]}{(T-1)} \times \frac{\Bbbk[T]}{(T^2+T+1)}$$
   Entonces μ_3 es la unión disjunta de Spec($\Bbbk$) y Spec $\left(\frac{\Bbbk[T]}{(T^2+T+1)}\right)$.

   - Supongamos que la característica de $\Bbbk$ es 3. Entonces tenemos que $T^3 - 1 = (T-1)^3$, por lo que nuestro esquema no es reducido. Tenemos que $\mu_3(K) = \{1\}$

para toda extensión K de $\Bbbk$, es decir, el esquema tiene sólo un K-punto para todo K, pero sin embargo no es el esquema trivial.

Definición 2.1.3.

- Dados (G, m) y (G', m') dos esquemas en grupos, un morfismo de esquemas $\varphi : G \to G'$ es un morfismo de esquemas en grupos si los productos conmutan con φ, es decir, si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ G' \times G' \arrow[r, "m'"'] & G \end{tikzcd}$$

- Sea G un esquema en grupos. Un subesquema en grupos de G es un subesquema H localmente cerrado tal que $H(S)$ es un subgrupo de $G(S)$ para cualquier esquema S.

- Si G es un esquema en grupos y H es un subesquema en grupos de G, diremos que H es normal en G si $H(S)$ es un subgrupo normal de $G(S)$ para todo esquema S.

- Dado $\varphi : G \to G'$, definimos el núcleo de φ como el functor en grupos $Ker(f)$ tal que $Ker(f)(S) = Ker\big(f(S) : G(S) \to G'(S)\big)$. Es representado por el subesquema en grupos cerrado y normal de G que es la fibra de $e_{G'}$.

Observación 2.1.4. Consideremos el functor contravariante de Sch a la categoría de $\Bbbk$-álgebras dado por tomar las funciones globales. Sea (G, m, i, e) un $\Bbbk$-esquema en grupos de tipo finito. Mediante el functor nombrado obtenemos los morfismos $\Delta := \phi \circ m^{\#} : \mathcal{O}_G(G) \to \mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_G(G)$, donde $\phi : \mathcal{O}_{G\times G}(G \times G) \to \mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_G(G)$ es el isomorfismo canónico (ver A.0.13), $i^{\#} : \mathcal{O}_G(G) \to \mathcal{O}_G(G)$ y $e^{\#} : \mathcal{O}_G(G) \to \Bbbk$, que verifican diagramas similares a los de la Definición 2.1.1 pero con las flechas invertidas. Esto significa que $(\mathcal{O}_G(G), \Delta, i^{\#}, e^{\#})$ es una $\Bbbk$-álgebra de Hopf.

A partir de esto, se puede probar que el functor Spec es una equivalencia entre la categoría de $\Bbbk$ álgebras de Hopf conmutativas finitamente generadas y la categoría de esquemas en grupos algebraicos afines de tipo finito, con cuasi-inversa el functor dado por tomar funciones globales ([MilAG, Cor. 3.7]).

Dentro de los esquemas en grupos hay dos clases de particular importancia que son los esquemas en grupos afines y las variedades abelianas. A continuación introduciremos a las variedades abelianas y los esquemas en grupos afines los trataremos en la Sección 3.1.

Las variedades abelianas son una clase de esquemas en grupos que son de importancia tanto en la geometría algebraica como en la teoría de números. A continuación daremos su definición, daremos algunos ejemplos y comentaremos algunas de sus propiedades más generales. Para una lectura más profunda acerca de variedades abelianas recomendamos dirigirse a [23], texto en el que se basan los contenidos a continuación.

Definición 2.1.5. Una variedad abeliana se define como un esquema en grupos, liso, conexo y propio (ver Definición A.0.8).

Ejemplo 2.

1. Una curva elíptica es una curva algebraica lisa, proyectiva y de género 1, con un $\Bbbk$-punto distinguido. Las curvas elípticas son variedades abelianas (ver [31, Teorema 4.5.3]).

2. Sea C una curva proyectiva no singular. Definimos el functor P_C^0 de forma que dado un esquema T entonces $P_C^0(T) = Pic^0(C \times T)/q^* Pic^0(T)$. Si $C(\Bbbk) \neq 0$, entonces P_C^0 es representable por una variedad abeliana a la que llamamos variedad jacobiana de C y notamos $Jac(C)$ ([23, Teorema III.1.2]). Se puede pensar a $Jac(C)$ como el grupo de familias de haces invertibles en C de grado 0 parametrizadas por T, módulo las familias triviales. Se prueba que la dimensión de $Jac(C)$ es igual al género de C.

Las variedades abelianas presentan varias propiedades útiles, algunas de las cuales se relacionan con su rigidez. Enunciaremos un resultado de este tipo para esquemas propios (ver Definición A.0.8) y nombraremos algunas de sus consecuencias inmediatas para las variedades abelianas. Para estos resultados seguiremos como referencia [23, Capitulo I].

Teorema 2.1.6. *Sean U, V y W esquemas tal que V es propio y $V \times W$ es geométricamente irreducible. Sea $\varphi : V \times W \to U$ un morfismo de esquemas suave. Supongamos que existen $u_0 \in U(\Bbbk), v_0 \in V(\Bbbk), w_0 \in W(\Bbbk)$ tal que $\varphi(V \times w_0) = \{u_0\} = \varphi(v_0 \times W_0)$. Entonces $\varphi(V \times W) = \{u_0\}$.*

Demostración. Sea U_0 un abierto afín de U que contenga a u_0. Consideremos $Z = p_2(\varphi^{-1}(U_0^c)) \subset W$. Podemos caracterizar a los elementos de Z como aquellos $w \in W$ tal que $\varphi(V \times w) \subset U_0^c$. Como V es completo, $p_2 : V \times W \to W$ es cerrado, y por lo tanto Z es un cerrado de W. Además como $\varphi(V \times w_0) = \{u_0\} \in U_0$, sabemos que $w_0 \in Z^c$, por lo tanto Z^c es un abierto no vacío de W y $V \times Z^c$ es un abierto denso de $V \times W$ (recordemos que $V \times W$ es geométricamente irreducible).

Veamos ahora que $\varphi|_{V \times Z^c}$ es constante, lo que implicaría que el morfismo φ es constante. Si $w \in Z^c$, tenemos que $\varphi(V \times w) \subset U_0$ que es un abierto afín, y como $V \times w \cong V$ es completo, $\varphi(V \times w)$ debe consistir de un punto (ver [35, 10.3.7]). Luego como $\varphi(v_0, w) = u_0$, resulta que $\varphi(V \times w) = \{u_0\}$, por lo que llegamos al resultado buscado. □

Corolario 2.1.7. *Todo morfismo suave entre dos variedades abelianas es la composición de un morfismo de esquemas de grupos seguido de una traslación.*

Demostración. Sea $\phi : A \to B$ un morfismo suave entre dos variedades abelianas. Consideremos $b = \phi(e)$ y el morfismo $t_{b^{-1}} : B \to B$ dado por multiplicar a derecha por b^{-1}. Veamos que el morfismo $\varphi = \phi t_{b^{-1}} : A \to B$ es un morfismo de esquemas en grupos. Para esto definimos $f : A \times A \to B$ como $f(a, a') = \varphi(aa')\varphi(a)^{-1}\varphi(a')^{-1}$. Este morfismo verifica que $f(A \times e) = f(e \times A) = e$, por lo que por el Teorema 2.1.6 tenemos que f es el morfismo trivial, lo que implica que φ verifica la ley de grupo y queda probado el resultado. $\square$

Corolario 2.1.8. *Toda variedad abeliana es conmutativa.*

Demostración. Dada una variedad abeliana A, consideremos el morfismo $f : A \times A \to A$ dado por $f(a, a') = a^{-1}a'^{-1}aa'$, es decir, que envía a (a, a') a su conmutador. De nuevo por el Teorema 2.1.6 se verifica que este morfismo es trivial, y por lo tanto la variedad abeliana A es conmutativa. $\square$

Observación 2.1.9. Se puede encontrar una generalización de estos resultados para el caso de esquemas antiafines en [Bri17, Sección 3.3].

2.2. Acciones de esquemas en grupos

En esta sección definiremos qué es una acción de un esquema en grupos y observaremos la construcción del functor de automorfismos de un esquema.

Definición 2.2.1. Una acción de un esquema en grupos G en un esquema X es un morfismo de esquemas $a : G \times X \to G$ tal que el mapa $a(S)$ nos da una acción del grupo $G(S)$ en el conjunto $X(S)$ para cualquier esquema S. En este caso decimos que X es un G-esquema.

Esta condición es equivalente a que los siguientes diagramas de morfismos de esquemas sean conmutativos:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "m \times id_X"] \arrow[d, "id_G \times a"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\ G \times X \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Spec(\Bbbk) \times X \arrow[r, "e\times id_X"] \arrow[dr, "p_2"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Definición 2.2.2. Dados dos G-esquemas X e Y y un morfismo de esquemas $f : X \to Y$, decimos que f es G-equivariante si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "id_G\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G \times Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son las acciones respectivas de G.

Una vez tenemos la definición de acción de un esquema en grupos podemos definir sus representaciones lineales de la forma esperada. Desarrollaremos esto en la sección 3.1.

En la teoría de grupos se observa que dar una acción $a : G \times X \to X$ de un grupo abstracto G en un conjunto X equivale a dar un morfismo de grupos $G \to \mathrm{Biy}(X)$ tal que a un elemento g le hace corresponder el morfismo morfismo $a_g = a(g, \cdot) : X \to X$. En orden de extender esta idea a las acciones de esquemas en grupos es necesario primero definir el functor de automorfismos de un esquema X.

Definición 2.2.3. Dado un esquema X, definimos el functor $\mathrm{Aut}_X : \mathrm{Sch}\,\Bbbk^{op} \to \mathrm{Groups}$, al que llamamos functor de automorfismos de X, de forma que a un esquema S le asigna el grupo de S-automorfismos del S-esquema $X \times S$ con morfismo estructural $p_2 : X \times S \to S$.

Observación 2.2.4. Los S-puntos de Aut_X son entonces los isomorfismos $(f, Id_S) : X \times S \to X \times S$, donde $f : X \times S \to X$ es un morfismo de esquemas. Estos pueden ser vistos entonces como una familia de automorfismos de X parametrizada por S.

Lema 2.2.5. *Dar una acción de un esquema en grupos G en un esquema X es equivalente a dar una transformación natural entre los functores G y Aut_X.*

Demostración. La correspondencia entre las acciones de G en X y las transformaciones naturales entre los functores G y Aut_X está dada de la siguiente forma:

- Dada una acción a de G en X, definimos $\rho : G \to Aut_X$ de forma que si $g : S \to G$ es un S-punto, entonces $\rho(S)(g) : X \times S \to X \times S$ está dada por $\rho(S)(g)(T)(x, s) = \big(a(T)(g \circ s, x), s\big) \in (X \times S)(T)$, donde $(x, s) \in (X \times S)(T)$. Esto nos da un functor en grupos porque dados g y h dos S-puntos tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(S)(gh)(T)(x,s) &= \big(a(T)(gh\circ s, x), s\big)\\ &= \big(a(T)\big(g\circ s, a(T)(h\circ s, x)\big), s\big)\\ &= \rho(S)(g)(T)\big(a(T)(h\circ s, x), s\big)\\ &= \rho(S)(g)(T)\rho(S)(h)(T)\big(x,s\big).\end{aligned}$$

- Por otro lado, dada ρ transformación natural entre los functores G y Aut_X, podemos definir $a : G\times X\to X$ por $a(S)(g,x) = p_1\circ\rho(S)(g)(x, Id_S) : S\to X$.

Podemos observar ahora que los axiomas de axiomas de acción se corresponden a los de morfismos de grupo a partir de hacerlo para S-puntos y con esto queda probado el lema. $\square$

2.3. Extensiones afines de variedades abelianas

Los teoremas de estructura de Chevalley (ver Teorema 2.3.6) y Rosenlitch (ver [Bri17, Teorema 1]) nos dan una clave para poder estudiar a los esquemas en grupos en general a partir de las teorías de esquemas en grupos afines y la de variedades abelianas. En esta sección presentaremos la categoría de extensiones afines de variedades abelianas (ver Definición 2.3.5) con el objetivo de extender la teoría de representaciones de esquemas en grupos en el caso afín hacia los esquemas en grupos casi-compactos en general.

Definición 2.3.1. Sean $j : N\to G$ y $q : G\to Q$ dos morfismos de esquemas en grupos casi-compactos. Decimos que tenemos una sucesión exacta

$$1\longrightarrow N\xrightarrow{j} G\xrightarrow{q} Q\longrightarrow 1$$

si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $Ker(J)$ es trivial y j induce un isomorfismo entre N y $Ker(q)$.

2. q es fielmente plano y casi-compacto.

En este caso decimos que G es una extensión de Q por N.

Observación 2.3.2. 1. La primera condición es equivalente a que para todo esquema S la siguiente sucesión de grupos sea exacta:

$$1\longrightarrow N(S)\xrightarrow{j(S)} G(S)\xrightarrow{q(S)} Q(S).$$

2. La segunda condición de la definición se puede escribir de forma más general como: para cualquier esquema S e $y \in Q(S)$ existe un morfismo fielmente plano $\varphi : S' \to S$ casi-compacto y $x \in G(S')$ tal que $q \circ x = y \circ \varphi$. Esta se cumple en el caso de que q sea fielmente plano y casi-compacto porque dado un esquema S y un punto $y \in Q(S)$, podemos ver a y como un morfismo $S \to Y$, tomar $S' = G \times_Q S$, y tenemos $\varphi = p_2$ y $x = p_1$.

$$\begin{tikzcd} S' = G \times_Q S \arrow[r, "\varphi = p_2"] \arrow[d, "x = p_1"'] & S \arrow[d, "y"] \\ G \arrow[r, "q"'] & Q \end{tikzcd}$$

3. Consideremos ahora G un esquema en grupos casi-compacto y N un subesquema en grupos normal. El esquema cociente G/N (ver [16, VI A.3.2]) verifica la siguiente sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\mathrm{j}} G \xrightarrow{\mathrm{q}} G/N \longrightarrow 1$$

Recíprocamente, si tenemos una sucesión exacta de esquemas en grupos de tipo finito como la de la definición, j es una inmersión cerrada y q factoriza a través de una inmersión cerrada $i : G/N \to Q$ por [Bri17, Proposición 2.7.4]. Luego podemos deducir que i es un isomorfismo.

Definición 2.3.3. Sea A una variedad abeliana. Una extensión afín de A es una sucesión exacta corta $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ tal que q es fielmente plano y afín.

Observación 2.3.4. 1. En la definición anterior q es casi-compacto y separado. Lo primero es porque dado un abierto casi-compacto $U \subset Q$ este es unión finita de abiertos afines, y por lo tanto su pre-imagen es una unión finita de abiertos afines. La segunda propiedad se puede observar localmente (ver [33, Lemma 26.21.7]).

2. Por definición, si G es el centro de una extensión afín, entonces es un esquema casi-compacto. Veremos un recíproco parcial en el Teorema 2.3.9.

3. Si $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ es una extensión afín, entonces H es de tipo finito si y solamente G lo es (ver [Bri17, Proposición 2.6.5]). En ese caso diremos que $\mathcal{S}$ es una extensión afín de tipo finito.

Definición 2.3.5. Sea A una variedad abeliana. Definimos la categoría de extensiones afines de A de la siguiente forma:

- Los objetos son las extensiones afines sobre A (Definición 2.3.3).

- Dadas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ dos extensiones afines sobre A, $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ y $\mathcal{S}' : 1 \to H' \to G' \xrightarrow{q'} A \to 0$, un morfismo $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ está dado por morfismos de esquemas en grupos $f : G \to G'$ y $f_H : H \to H'$ tal que siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} : \arrow[d, "\phi"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "f_H"] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{S}' : & 1 \arrow[r] & H' \arrow[r] & G' \arrow[r, "q'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

  Diremos que $\phi : \mathcal{S} \to S'$ cumple una propiedad P (afín, casi-compacto, etc) si f lo hace.

El siguiente teorema fue anunciado por Chevalley a principio de los 50' pero publicó su prueba en 1960 (ver [8]). Otras pruebas de este teorema fueron publicadas por Barsotti y Rosenlicht (ver [2] y [29]). La versión presentada aquí es extraída de un trabajo de Brion (ver [Bri17]) quien la presenta basándose en un resultado de Raynaud (ver [28]).

Teorema 2.3.6. *Todo $\Bbbk$-esquema en grupos de tipo finito tiene un menor subesquema en grupos normal N tal que G/N es propio. Además, N es afín y conexo. Si $\Bbbk$ es perfecto y G es liso, entonces N es liso también y su formación conmuta con extensiones de cuerpos.*

En particular, todo esquema en grupos de tipo finito y conexo sobre un cuerpo perfecto es la extensión de una variedad abeliana por un grupo afín.

El siguiente resultado de aproximación debido a Perrin ([27, Teorema V 3.3.1]) resulta clave para poder extender la teoría del caso de esquemas en grupos de tipo finito al contexto de los esquemas en grupos casi-compactos. Para esto primero recordaremos la definición de límite inverso.

Definición 2.3.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que una familia $(A_i, f_{i,j})_{i\leq j\in I}$ es una sistema filtrado inverso si I es un sistema dirigido y $f_{i,j} \in Hom_{\mathcal{C}}(A_j, A_i)$ que verifican las siguientes propiedades:

- $f_{i,i}$ es la identidad en A_i.
- $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$, para todos $i \leq j \leq k$.

Decimos que $(A, \pi_i)_{i\in I}$, con $\pi_i \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A_i)$, es el límite inverso del sistema filtrado inverso $(A_\alpha, f_{\alpha,\beta})_{\alpha\leq\beta\in I}$ si se verifica que:

- $\pi_i = f_{i,j} \circ \pi_j$ para todos $i \leq j$.
- El par $(A, \pi_i)_{i\in I}$ es universal, es decir, si $(B, \phi_i)_{i\in I}$ verifica la propiedad anterior, entonces existe un único morfismo $u : A \to B$ tal que los siguientes diagramas

conmutan:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\phi_j"'] \arrow[ddr, "\phi_i"] & \\ & A \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\ A_j \arrow[rr, "f_{i,j}"'] & & A_i \end{tikzcd}$$

Notamos que A es el límite inverso de $(A_i, f_{i,j})_{i\leq j\in I}$ como $\varprojlim A_\alpha = A$.

Teorema 2.3.8. *Sea G un esquema en grupos casi compacto. Entonces existe un sistema filtrado afín y fielmente plano de esquemas en grupos de tipo finito $(G_\alpha, f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ tal que $G \cong lim_\alpha G_\alpha$. En particular se tiene que los morfismos $f_\alpha : G \to G_\alpha$ son fielmente planos y su núcleo es un subesquema en grupos afín.*

Demostración. Veamos la estructura de la demostración. Consideremos K el espacio de funciones racionales de G y dado α un subconjunto de éstas, notemos H_α al estabilizador a izquierda y derecha por la acción por multiplicación de G en K, que es un subesquema en grupos de G. Veamos que existe un subconjunto finito $\alpha = \{f_1, ..., f_n\} \subset K$ tal que H_α es afín. Sea $H = \cap H_\alpha$ con $\alpha \subset K$ finito. Como H estabiliza a todas las funciones racionales, H es el subesquema trivial [27, IV 1.3]. Sea U un abierto afín de G que contenga al neutro. Como $\cap H_\alpha \subset U$, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tal que $\cap_{i=1}^n H_{\alpha_i} \subset U$. Entonces encontramos $\alpha = \{f_1, ..., f_r\}$ finito tal que H_α es afín y si $\alpha \subset \beta$ entonces H_β también es afín. □

Este resultado de Perrin permite presentar un teorema de aproximación en la categoría de extensiones afines. Este resultado y su demostración se encuentran en [RdAF, Teorema 2.55].

Teorema 2.3.9. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín sobre una variedad abeliana A. Entonces existe un sistema filtrado afín y fielmente plano de extensiones afines de tipo finito $(\mathcal{S}_\alpha, f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in I}$ tal que $\mathcal{S} \cong lim_\alpha \mathcal{S}_\alpha$. Decimos que una extensión de este tipo es pro-algebraica.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.6, sabemos que existe un sistema filtrado afín $\{H_\alpha, p_{\alpha,\beta}/\alpha, \beta \in I\}$ de subesquemas en grupos cerrados de H tal que $\lim_\alpha H_\alpha = H$, y notemos $p_\alpha : H \to H_\alpha$. Buscaremos subesquemas en grupos G_α de G y morfismos

$s_\alpha : G \to G_\alpha$ tal que $\mathcal{S}$ sea el límite de $\mathcal{S}_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}: \arrow[d, "\sigma_\alpha"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "p_\alpha"] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "s_\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{S}_\alpha: & 1 \arrow[r] & H_\alpha \arrow[r] & G_\alpha \arrow[r, "q_\alpha"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la descomposición de Rosenlicht (ver [RdAF, Teorema 2.42]), sabemos que $G = G_{\text{ant}}H = G_{\text{ant}} \times^{G_{\text{ant}} \cap H} H$. Además $G_{\text{ant}} \cap H$ es central en H y su imagen por p_α es central en H_α. Luego tomando $f_\alpha : G_{\text{ant}} \to G_{\text{ant}} \cap^{G_{\text{ant}} \cap H_\alpha} H_\alpha$ tal que $f_\alpha(z) = [z, 1]$, tenemos el siguiente morfismo de extensiones afines:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{\text{ant}}: \arrow[d, "\phi_\alpha"] & 1 \arrow[r] & G_{\text{ant}} \cap H \arrow[r] \arrow[d, "p_\alpha"] & G_{\text{ant}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f_\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{S}_\alpha: & 1 \arrow[r] & H_\alpha \arrow[r] & G_{\text{ant}} \cap^{G_{\text{ant}} \cap H_\alpha} H_\alpha \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego este morfismo se extiende a un morfismo $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_\alpha$ a partir del producto en G.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}: \arrow[d, "\lambda_\alpha"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "p_\alpha"] & G = G_{\text{ant}}H \arrow[r, "q"] \arrow[d, "l_\alpha"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{S}_\alpha: & 1 \arrow[r] & H_\alpha \arrow[r] & G_{\text{ant}} \cap^{G_{\text{ant}} \cap H_\alpha} H_\alpha \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde l_α es el morfismo inducido por $(Id_{G_{\text{ant}}} \times p_\alpha) : G_{\text{ant}} \times H \to G_{\text{ant}} \times H_\alpha$.

Finalmente, los morfismos $(Id_{G_{\text{ant}}} \times p_{\alpha,\beta})$ inducen morfismos de esquemas en grupo $l_{\alpha,\beta} : G_{\text{ant}} \cap^{G_{\text{ant}} \cap H_\alpha} H_\alpha \to G_{\text{ant}} \cap^{G_{\text{ant}} \cap H_\beta} H_\beta$ que son afines y fielmente planos. Tenemos entonces $\{S_\alpha\}$ un sistema filtrado fielmente plano y afín de extensiones afines de tipo finito, llamemos $\mathcal{G}$ a su límite y veamos que es isomorfo a $\mathcal{S}$.

Los morfismos λ_α inducen un morfismo $\lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}: \arrow[d, "\lambda_\alpha"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "l|_{\hat{H}}"] & G = G_{\text{ant}}H \arrow[r, "q"] \arrow[d, "l"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{G}: & 1 \arrow[r] & \hat{H} \arrow[r] & \hat{G} \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la construcción realizada, $\hat{H}$ y H coinciden por ser el límite de $\{H_\alpha\}$, y $l|_{\hat{H}}$ es la identidad. Esto implica que $\mathcal{S} \cong \mathcal{G}$. $\square$

Capítulo 3

Representaciones de extensiones afines de variedades abelianas

En este capítulo introducimos la teoría de representaciones para el caso de esquemas en grupos afines y su dualidad de Tannaka ([30], [DM]), y luego se repite el mismo esquema para la teoría de representaciones de extensiones afines de variedades abelianas ([RdAF]). Añadimos sobre el final una perspectiva para emular la prueba al problema de reconstrucción sin necesidad de utilizar la categoría de fibrados con morfismos graduados (ver Definición 3.2.12).

3.1. Representaciones lineales de esquemas en grupos afines

En esta sección comenzamos definiendo las representaciones de esquemas en grupos afines y se observan algunas propiedades como la racionalidad de las representaciones. Aquí juega un rol importante la perspectiva de los esquemas en grupos afines como espectros de álgebras de Hopf (ver Observación 2.1.4). Luego continuamos presentando el resultado que da solución al problema de reconstrucción. Para esto seguiremos como referencia a [MilAG] y [DM].

En esta sección $G = \operatorname{Spec} A$ será un esquema en grupos afín, con A una $\Bbbk$-álgebra de Hopf.

Definición 3.1.1. Sea G un esquema en grupos. Una representación lineal de G es un par (V, r), donde V es espacio vectorial sobre $\Bbbk$ y $r : G \to GL(V)$ es homomorfismo de esquemas en grupos. Dar una representación de G es equivalente a dar una acción lineal $a : G \times V \to V$ de G en el espacio vectorial V visto como $\Bbbk$-esquema. Llamaremos al par (G, r) un G-módulo.

Dada una representación (V, r) y $W \subset V$ un subespacio, decimos que W es una subrepresentación o un G-submódulo de (V, r) si W es estable por acción de G. Decimos que (V, r) es un G-módulo racional si es unión de G-submódulos de dimensión finita. Decimos que la representación (V, r) es fiel si $r(R) : G(R) \to GL(V)(R)$ es inyectiva para toda $\Bbbk$-álgebra R.

Ejemplo 3.

1. Si $H \subset GL(V)$ es un subesquema en grupos, el par (V, i) es una representación fiel de H, donde i es el morfismo inclusión.

2. El morfismo de esquemas en grupos $r : \mathbb{G}_a \to GL_2$ dado por $a \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ es una representación fiel de G_a.

Observación 3.1.2. Hay una equivalencia entre la categoría de G-módulos opuesta y la categoría de $\mathcal{O}_G(G)$-comódulos dada de la siguiente forma:

- Sea (V, r) es un G-módulo. Los A-puntos de G son morfismos $\mathrm{Spec}(A) \to G = Spec(A)$, en particular, podemos considerar $Id_G \in G(A)$. Luego $r(Id_G) \in GL(V)(A)$ es un isomorfismo A-lineal $V \otimes A \to V \otimes A$, que queda determinado por sus valores en $V \otimes \Bbbk \cong V$, y esto define una estructura de A-comódulo $\rho : V \to V \otimes A$.

- Sea (V, ρ) un A-comódulo y g un R-punto para R una $\Bbbk$-álgebra. A g le corresponde $g^{\#} \in Hom_{\Bbbk}(A, R)$. Luego tenemos $(Id_{V_R} \otimes g^{\#}) \circ \rho_R : V \otimes R \to V \otimes R \otimes A \to V \otimes R$. Esto define una representación de G (ver [36, Sección 3.2]).

Ejemplo 4. Sea $H = GL_n$ y r la representación estándar en $V = \Bbbk^n$ por multiplicación a izquierda. Tenemos que $\mathcal{O}_H(H) = \Bbbk[T_{11}, T_{12}, ..., T_{nn}]_{det}$ y el mapa $r : H(R) \to GL(V)(R)$ es la identidad, y consideremos $(e_i)_i$ la base canónica de V. La co-acción $\rho : V \to V \times H$ en la base de V resulta

$$e_j \to \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes T_{ij}$$

Luego observando que las operaciones en el álgebra de Hopf $\mathcal{O}_H(H)$ están dadas por $\Delta(T_{ik}) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} \otimes T_{jk}$, con $\Delta(det) = det \otimes det$, $\Delta(\frac{1}{det}) = \frac{1}{det} \otimes \frac{1}{det}$, y $\epsilon(T_{i_j}) = \delta_{ij}$, ρ define una estructura de $\mathcal{O}_H(H)$-comódulo.

Observación 3.1.3. A la estructura de $\mathcal{O}_G(G)$ como $\mathcal{O}_G(G)$-comódulo dada por el morfismo Δ, le corresponde una acción de G en $\mathcal{O}_G(G)$ a la que llamaremos acción regular.

Esta acción es la que se obtiene mediante la acción por multiplicación del inverso en la variable, es decir, $g \cdot f(h) = f(g^{-1}h)$. Es fácil ver que esta es una representación fiel.

Proposición 3.1.4. *Todo $\mathcal{O}_G(G)$-comódulo es unión de sus $\mathcal{O}_G(G)$-subcomódulos de dimensión finita.*

Demostración. Este resultado vale en general para álgebras de Hopf. Para la demostración seguiremos la idea de la prueba que se encuentra en [MilAG, Prop. 4.7]. Sea (V, ρ) un $\mathcal{O}_G(G)$-comódulo. Para probar que V es unión de sus subcomódulos de dimensión finita basta probar que todo $v \in V$ está contenido en algún subcomódulo de dimensión finita. Consideremos $(f_i)_{i\in I}$ una base de $\mathcal{O}_G(G)$ como $\Bbbk$-espacio vectorial. Tenemos entonces $\rho(v) = \sum_{i\in i} v_i \otimes f_i$, con $(v_i)_{i\in I} \subset V$ no nulos sólo para finitos $i \in I$, donde los tensores son sobre $\Bbbk$. Si escribimos $\Delta(f_i) = \sum_{j,k\in I} r_{ijk} f_j \otimes f_k$ y utilizamos que $(\rho \otimes Id_{\mathcal{O}_G(G)}) \circ \rho = (Id_V \otimes \Delta) \circ \rho$, obtenemos

$$(\rho \otimes Id_{\mathcal{O}_G(G)})(\sum_{k\in I} v_k \otimes f_k) = (Id_V \otimes \Delta)(\sum_{i\in I} v_i \otimes f_i)$$

$$\sum_{k\in I} \rho(v_k) \otimes f_k = \sum_{i\in I} v_i \otimes (\sum_{j,k\in I} r_{ijk} f_j \otimes f_k)$$

$$\sum_{k\in I} \rho(v_k) \otimes f_k = \sum_{i,j,k\in I} r_{ijk} v_i \otimes f_j \otimes f_k$$

Por lo tanto resulta que $\rho(v_k) = \sum_{i,j\in I} r_{ijk} v_i \otimes f_j$, es decir, $v_k \in \langle v_i \rangle_{i\in I}$ con finitos de ellos no nulos, por lo que el subespacio generado por $(v_i)_{i\in I}$ es un subcomódulo de dimensión finita que contiene a v. $\square$

Corolario 3.1.5. *Toda representación lineal de un esquema en grupos afín es racional.*

Demostración. Sea G un esquema en grupos casi-compacto afín y $r : G \to GL_V$ una representación lineal. Tenemos una correspondencia entre G-módulos y $\mathcal{O}_G(G)$-comódulos (ver Observación 3.1.2), por la cual tenemos un $\mathcal{O}_G(G)$-comódulo correspondiente (V, ρ), la cual hace corresponder los G-submódulos de (V, r) con los $\mathcal{O}_G(G)$-subcomódulos de (V, ρ). $\square$

En el Teorema 2.3.8 vimos que todo esquema en grupos casi-compacto puede ser aproximado por esquemas en grupos de tipo finito. En el caso afín se puede ser un poco más preciso como veremos en la siguiente proposición. Este resultado es previo al resultado de Perrin ya mencionado. Recordar la definición de límite inverso dada en Definición 2.3.7.

Proposición 3.1.6. *Todo esquema en grupos afín es un límite inverso de esquemas en grupos afines de tipo finito $\varprojlim G_i$, cuyos mapas de transición $G_i \leftarrow G_j$, $i \leq j$, son fielmente planos.*

Demostración. Sea $G = \operatorname{Spec} A$ un esquema en grupos afín y $A = \bigcup A_i$ una unión creciente de sub-álgebras de Hopf de dimensión finita ([36, Proposición 3.1.4]). La correspondencia entre categorías de álgebras de Hopf conmutativas y esquemas en grupos afines nos hace corresponder el límite directo $A = \varinjlim A_i$ con un límite inverso $G = \varprojlim G_i$. Los mapas de transición son fielmente planos porque A_j es un álgebra fielmente plana sobre sus sub-álgebras A_i. $\square$

Teorema 3.1.7. *Todo esquema en grupos afín de tipo finito G es isomorfo a un subesquema en grupos de $GL(V)$ para algún espacio vectorial V de dimensión finita.*

Demostración. Sea (V, r) la representación regular de G, definida en la Observación 3.1.3. Por el Corolario 3.1.5 sabemos que (V, r) es racional, por lo que tenemos que $V = \cup_i V_i$ con $(V_i, r_i)_{i \in I}$ G-módulos de dimensión finita. Luego $\cap_i(Ker(r_i)) = Ker(r) = \{e\}$ porque la representación regular es fiel, y $Ker(r_i) = \{e\}$ para algún $i \in I$ porque el espacio topológico subyacente a G es Noetheriano. $\square$

Definición 3.1.8. Dado un esquema en grupos afín G definimos su categoría de representaciones de dimensión finita, a la que notaremos $\mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(G)$, de la siguiente forma:

- Sus objetos son los G-módulos (V, r) tal que V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita.
- Dados $(V.r)$ y (W, s) dos G-módulos, un elemento $\varphi \in Hom_{\mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(G)}(V, W)$ es una $\Bbbk$- transformación lineal de W a V que conmuta con las acciones de G.

Definición 3.1.9. Podemos definir ω^G el functor olvido de $\mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(G)$ a $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$, que para cada representación se queda con el espacio vectorial y desecha la acción de G, y para cada morfismo entre representaciones se queda solamente con el morfismo entre los espacios vectoriales. Luego podemos definir el functor $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$ de la categoría de $\Bbbk$-álgebras a la categoría de grupos, que a cada $\Bbbk$-álgebra R le asigna la familia (λ_X) tal que X es una representación de dimensión finita de G y los λ_X son R-automorfismos de $X \otimes R$ que cumplen las siguientes propiedades:

- $\lambda_{\mathbb{1}}$ es la identidad en R.
- Dados $X, Y \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(G)$, $\lambda_{X \otimes Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$.
- Dado cualquier mapa G-equivariante $\alpha : X \to Y$, se cumple que $\lambda_Y \circ (\alpha \otimes 1) = (\alpha \otimes 1) \circ \lambda_X$.

Podemos observar que un elemento $g \in G(R)$ define un elemento de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$, y de hecho resulta en un isomorfismo entre los functores G y $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$.

Proposición 3.1.10. *Sea G un esquema en grupos afín. El mapa natural de G en $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$ es un isomorfismo de functores de $\Bbbk$-álgebras. En particular, $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$ es un functor representable y es isomorfo a G como esquema en grupos. Por lo tanto, dos esquemas en grupos afines son isomorfos si y solamente si existe una equivalencia monoidal entre sus categorías de representaciones de dimensión finita que conmute con el functor olvido.*

Demostración. La siguiente prueba es la que se encuentra en [DM, Prop. 2.8].

Sea $C_{(X,\rho)}$ la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_{fin}(G)$ generada a partir de un G-módulo (X,ρ) tomando submódulos, tensores, sumas directas y cocientes. El functor $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$ induce un mapa que a un elemento $(\lambda_{(V,r)})$ de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)(R)$ le asigna $\lambda_{(X,\rho)}$. Usando este mapa identificamos a $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G \restriction_{C_{(X,\rho)}})$ con su imagen, es decir, los automorfismos que conmutan con la acción de G a través de ρ.

Consideremos ahora $G_{(X,\rho)}$, la imagen de G en $GL(X \otimes R)$ por el mapa ρ. Tenemos entonces que

$$G_{(X,\rho)} \subset \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega^G \restriction_{C_{(X,\rho)}}\right) \subset GL(X \otimes R)$$

y vamos a ver que los dos primeros son iguales.

Supongamos que es cierta la afirmación de que siempre que $L \subset V$ sea una recta $G_{(X,\rho)}$-estable en un G-módulo V, se cumple que $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G \restriction_{C_{(X,\rho)}})$ también estabiliza L. Sabemos que existe un G-módulo V tal que $G_{(X,\rho)}$ es el estabilizador de una recta (ver [11, Corolario II.2.3.5]) y entonces queda probada la igualdad.

Veamos ahora que la afirmación es cierta. Sea $(V,r) \in \mathrm{Ob}(C_{(X,\rho)})$ y L un subespacio de dimensión 1 invariante y $t \in L(R)$, con R una $\Bbbk$-álgebra. Sea $\lambda_L : L \otimes R \to L \otimes R$ el R-automorfismo inducido por la restricción de la acción en L. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
L \otimes R \arrow[r, "\lambda_L"] \arrow[d, "i\otimes 1"'] & L \otimes R \arrow[d, "i\otimes 1"] \\
V \otimes R \arrow[r, "\lambda_V"'] & V \otimes R
\end{tikzcd}$$

donde $i : L \to V$ es la inclusión, que dado que es $G_{(X,\rho)}$-equivariante, también es un morfismo G-equivariante. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lambda_V(t \otimes 1) &= \lambda_V \circ (i \otimes 1)(t \otimes 1) \\
&= (i \otimes 1) \circ \lambda_L(t \otimes 1)
\end{aligned}$$

Por lo que $\lambda_V(L \otimes R) \subset L \otimes R$, y $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G \restriction_{C_{(X,\rho)}})$ también estabiliza L. $\square$

Teorema 3.1.11. *Dos $\Bbbk$-esquemas en grupos afines G y G' son isomorfos si y solamente si existe una equivalencia monoidal $F : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(G')$ tal que $\omega^G \circ F = \omega^{G'}$. Además, en este caso existe un único homomorfismo $f : G \to G'$ tal que $F = \omega^f$.*

Demostración. Un functor monoidal F con esa propiedad define un functor

$$F^* : \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G) \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^{G'})$$

tal que $F^*(\lambda)_X = \lambda_{F(X)}$. Como por la Proposición 3.1.10 sabemos que $G \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^G)$ y $G' \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^{G'})$, el Lema de Yoneda nos produce una identificación de F^* con un morfismo de esquemas en grupos $f : G \to G'$ (recordar Observación 2.1.2). Resulta además que $F \to F^*$ y $f \to \omega^f$ son mapas inversos. $\square$

A continuación presentamos sin demostración el teorema de reconocimiento para la teoría de representaciones de esquemas en grupos afines. Para leer una prueba de este resultado sugerimos dirigirse a [DM, Sección 2.2].

Teorema 3.1.12. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes)$ una categoría tensorial abeliana y rígida con $\Bbbk = End(\mathbb{1})$. Sea $\omega : \mathcal{C} \to Vec_{\Bbbk}$ un functor tensorial, $\Bbbk$-lineal, fiel y exacto. Entonces se cumple que:*

1. *El functor $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ es representable por un esquema en grupos afín G.*

2. *El functor $\mathcal{C} \to \mathrm{Rep}(G)$ es una equivalencia de categorías.*

Definición 3.1.13. Dada $(X, r) \in \mathrm{Rep}(G)$, llamamos $\langle X \rangle$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}(G)$ generada por los objetos X^n y sus cocientes.

Proposición 3.1.14. *Sea G un esquema en grupos afín.*

1. *G es finito si y solamente si todo objeto de $\mathrm{Rep}(G)$ es isomorfo a un objeto de $\langle X \rangle$ para X una representación de G.*

2. *G es de tipo finito si y solamente si $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Rep}(G)_X$ para algún $X \in \mathrm{Rep}_{fin}(G)$, donde $\mathrm{Rep}(G)_X$ es la menor subcategoría completa de $\mathrm{Rep}(G)$ que contiene a X, a 1 y es cerrada por tensores, cocientes y duales.*

Demostración.

1. Si G es finito, existe $X \in \mathrm{Rep}(G)$ una representación fiel de dimensión finita y cumple esta propiedad. El recíproco sigue la demostración del teorema de reconocimiento por lo que referimos al lector a [DM, Prop. 2.21].

2. Si G es de tipo finito, entonces tiene una representación fiel $(X, r) \in \mathrm{Rep}(G)$. El morfismo inducido por la representación $\rho : G \to GL(X)$ produce un isomorfismo

entre G y $G_X := \rho(G)$. Luego si tenemos otra representación cualquiera (Y, s), esta es isomorfa vía ρ a una representación en $\mathrm{Rep}(G)_X$.

En sentido contrario, supongamos que existe una representación $X \in \mathrm{Rep}_{fin}(G)$ tal que $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Rep}(G)_X$. De la demostración de la Proposición 3.1.10 deducimos que $G_X \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega^G\big|_{\mathrm{Rep}(G)_X}\right) \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega^G\right) \cong G$, por lo que G es de tipo finito.

$\square$

3.2. Fibrados vectoriales homogéneos sobre variedades abelianas

En esta segunda sección del capítulo presentamos la categoría de fibrados vectoriales homogéneos sobre variedades abelianas, tanto con la construcción clásica como la categoría extendida por morfismos de fibrados vectoriales que en la base son de la forma multiplicar a izquierda por un elemento y al nivel de las fibras son lineales (ver formalmente en la Definición 3.2.11). Esta construcción fue desarrollada en [RdAF] y seguimos este artículo como referencia. Presentamos también la construcción del functor de automorfismos para un objeto de esta categoría, incluyendo la prueba de su representabilidad como esquema en grupos y su descomposición como una extensión afín de una variedad abeliana. Para esta prueba seguimos como referencia a [BS13].

A continuación daremos una definición de fibrado vectorial en el contexto de esquemas.

Definición 3.2.1. Sea T un $\Bbbk$-esquema. Un fibrado vectorial con base T es un par (E, π), donde E es un esquema de tipo finito y $\pi : E \to T$ un morfismo de esquemas localmente trivial en la topología de Zariski. Esto último es que exista un cubrimiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos afines de T e isomorfismos $\varphi_i : \mathbb{A}^n_{U_i} \to \pi^{-1}(U_i)$, usualmente llamados trivializaciones del fibrado, tal que para todo abierto afín $V = \mathrm{Spec}(R) = U_i \cap U_j$, el morfismo $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\big|_{\mathbb{A}^n_V}$ es un automorfismo lineal en $R[x_1, ..., x_n]$. Dado $t \in T$, llamamos fibra de E en t al $\kappa(t)$-espacio vectorial $\pi^{-1}(t) = E \times_T \mathrm{Spec}(\kappa(t))$.

Luego dado un esquema T podemos definir la categoría de fibrados vectoriales sobre T de la siguiente forma:

Definición 3.2.2. Dado T un esquema, notamos $\mathrm{VB}_0(T)$ a la categoría de fibrados vectoriales sobre esquemas dada por:

- Los objetos son los fibrados vectoriales sobre T.
- Dados dos fibrados vectoriales sobre T, (E, π) y (E', π'), un morfismo de fibrados vectoriales es un morfismo de T-esquemas $f : E \to E'$ lineal en las fibras. Esto es

que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ T \arrow[r, "Id_T"'] & T \end{tikzcd}$$

y dadas $\varphi : \mathbb{A}^n_U \to \pi^{-1}(U)$ y $\varphi' : \mathbb{A}^m_{U'} \to \pi'^{-1}(U')$ dos trivializaciones y un abierto $V = \mathrm{Spec}(R) = U \cap U'$, el morfismo $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi\big|_{\mathbb{A}^n_V} : \mathbb{A}^n_V \to \mathbb{A}^m_V$ está dado por una morfismo R-lineal entre $R[x_1, ..., x_n]$ y $R[y_1, ..., y_m]$.

Definición 3.2.3. Dado un fibrado vectorial $\pi : E \to T$, podemos definir un morfismo de esquemas $\sigma_E : T \to E$, al que llamaremos sección cero, tal que dado $t \in T$ tenemos que $\sigma_E(t) = 0 \in E_t$. Este morfismo verifica que $\pi \circ \sigma = Id_T$ y si tenemos $f \in \mathrm{Hom}_0(E, E')$, un morfismo entre (E, π) y (E', π') dos fibrados vectoriales sobre T, entonces $f \circ \sigma_E = \sigma_{E'}$.

Observación 3.2.4. Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal si está equipada con un bifunctor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ llamado producto tensorial, un objeto unidad I y tres isomorfismos naturales que corresponden al hecho de que el functor $\otimes$ sea asociativo y que I es una identidad tanto por izquierda como por derecha, y además se cumplen ciertos diagramas de coherencia entre estos isomorfismos. A su vez, decimos que $\mathcal{C}$ es además rígida si todo objeto de la categoría es rígido, esto es que tenga un dual tanto a izquierda como a derecha. Para leer estas definiciones y algunas de sus propiedades con mayor detalle sugerimos dirigirse a [12, Capítulo 2].

Se puede observar que $VB_0(T)$ es una categoría monoidal y rígida, con objeto unidad el fibrado lineal trivial $(\mathbb{A}^1_{\Bbbk} \times T, p_2)$, objeto final el fibrado trivial $(\mathrm{Spec}(\Bbbk) \times T, p_2)$, y el producto tensorial entre dos fibrados (E, π) y (E', π') se construye a partir de tomar el producto tensorial localmente en las trivializaciones.

Observación 3.2.5. Dada una variedad abeliana A y $a \in A(T)$ para algún esquema T, llamaremos t_a a la traslación por a en A, esto es el morfismo de T-esquemas $t_a : A \times T \to A \times T$ definido por $(b, t) \to (b + a(t), t)$.

Definición 3.2.6. Dada una variedad abeliana A y un fibrado vectorial $\pi : E \to A$, definimos el functor $Aut_{gr}(E) : \mathrm{Sch}\,\Bbbk^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ de la categoría de esquemas opuesta a la categoría de grupos como:

- A nivel de objetos, el functor Aut_{gr} envía $T \in \mathrm{Sch}\,\Bbbk^{op}$ al grupo de pares (f, a) con $f : E_T \to E_T$ un T-automorfismo y $a \in A(T)$, tal que f es una traslación por a en la base y que el pull-back de f por la traslación por a es un isomorfismo de

A_T-fibrados vectoriales. Más formalmente, el par (f,a) debe verificar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E_T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_T"'] & E_T \arrow[d, "\pi_T"] \\
A_T \arrow[r, "t_a"'] & A_T
\end{tikzcd}$$

y el morfismo $\hat{f} : E_T \to t_a^*(E_T)$, definido por el siguiente diagrama, es un isomorfismo de A_T-fibrados vectoriales.

$$\begin{tikzcd}
E_T \arrow[dr, dashed, "\hat{f}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_T"'] & & \\
& t_a^*(E_T) \arrow[r] \arrow[d] & E_T \arrow[d, "\pi_T"] \\
& A_T \arrow[r, "t_a"'] & A_T
\end{tikzcd}$$

- A nivel de flechas, dado un morfismo de esquemas $g : T \to T'$, el mapa $Aut_{gr}(E)(g) : Aut_{gr}(E)(T') \to Aut_{gr}(E)(T)$ está definido por

$$Aut_{gr}(E)(g)(f,a) = \big(p_1 \circ (f \circ (Id_E, g), p_2), a \circ g\big)$$

.

De la misma forma que en la teoría de representaciones de esquemas en grupos afines consideramos la acción de un esquema en grupos H sobre un espacio vectorial V como un morfismo de esquemas en grupos de H en $GL(V)$, quisiéramos considerar la acción de un esquema en grupos arbitrario sobre un fibrado vectorial como un morfismo del esquema en grupos a algún espacio de automorfismos del fibrado vectorial. Así como $GL(V)$ es un esquema en grupos afín y nos permite construir la teoría dentro de la categoría de esquemas en grupos afines, en este caso veremos que el functor Aut_{gr} es representable y que cabe en una extensión afín $Aut_{gr} : 1 \to \mathrm{Aut}_0(E) \to \mathrm{Aut}_{gr}(E) \xrightarrow{d} A \to 0$. Los lemas y las pruebas que siguen para llegar a este resultado siguen [BS13, Capítulo 6].

Lema 3.2.7. *Sea $\pi : X \to A$ un GL_n-torsor sobre una variedad abeliana A y $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ el functor de automorfismos de X equivariantes por la acción de GL_n. Entonces $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ es representable por un esquema en grupos de tipo finito. Además, el subfunctor $\mathrm{Aut}^{GL_n}_A(X)$, compuesto por aquellos automorfismos $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ que fijan A, es representable por un esquema en grupos afín de tipo finito.*

Demostración. La idea de la prueba es construir una compactificación $\overline{X}$ de X, siendo esto compatible con una extensión de la acción de GL_n y de forma que los GL_n-automorfismos de X también se extiendan a la compactificación, resultando $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ un subesquema de $\mathrm{Aut}^{GL_n}(\overline{X})$ que es representable y localmente de tipo finito por ser $\overline{X}$ propio (ver [22, Teorema 3.7]).

Consideramos $\mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk)$ la proyectivización de GL_n vía la inclusión de GL_n en $\mathbb{M}_n$, que es un GL_n-módulo con la extensión de la acción por multiplicación a izquierda de GL_n. Tenemos entonces $\overline{\pi} : X \times^{GL_n} \mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk) \to A$ un $\mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk)$-fibrado con el siguiente diagrama conmutativo GL_n-equivariante:

$$\begin{tikzcd}
X \cong X \times^{GL_n} GL_n \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \times^{GL_n} \mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk) \arrow[dl, "\overline{\pi}"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\overline{\pi}$ es proyectivo y por lo tanto $X \times^{\mathbb{G}L_n} \mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk)$ es propio. Tenemos entonces que X es abierto y denso en $\overline{X} := X \times^{GL_n} \mathbb{P}(\mathbb{M}_n \oplus \Bbbk)$ y que podemos extender la acción de GL_n a $\overline{X}$. Dado X un esquema, notemos $\underline{\mathrm{Aut}}^{GL_n}(X)$ el grupo de automorfismos de X como $\Bbbk$-esquema. Se puede observar que cada GL_n-automorfismo de X se puede extender de forma única a un GL_n-automorfismo de $\overline{X}$, por lo que tenemos un isomorfismo de grupos $\rho : \underline{\mathrm{Aut}}^{GL_n}(X) \to \underline{\mathrm{Aut}}^{GL_n}(\overline{X}, \partial\overline{X})$, donde $\underline{\mathrm{Aut}}^{GL_n}(\overline{X}, \partial\overline{X})$ son los GL_n-automorfismos de $\overline{X}$ que estabilizan X, y cuya inversa es la restricción. Este mismo argumento se puede extender a los functores en grupo $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)(S) := \mathrm{Aut}_S^{GL_n}(X \times S)$, con GL_n actuando de forma trivial en S. Obtenemos entonces que $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ es un subfunctor cerrado de $\mathrm{Aut}(\overline{X})$, que es representado por un esquema en grupos de tipo finito, por ser $\overline{X}$ un esquema propio.

Consideremos ahora $\mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)$ el subfunctor de $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ que deja fijo A. Tenemos las siguiente sucesión exacta de functores en grupos:

$$1 \to \mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X) \to \mathrm{Aut}^{GL_n}(X) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Aut}(A) \tag{3.1}$$

donde el morfismo π_* está dado por $\pi : X \to A$. Para probar que $\mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)$ es representable por un esquema en grupos afín de tipo finito veremos que es isomorfo a $\mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n)$ y consideraremos a este dentro del espacio de secciones globales de un fibrado vectorial sobre A.

El functor $\mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n)$ le asigna a un esquema S el conjunto $\mathrm{Hom}_S^{GL_n}(X \times S, GL_n \times S)$, donde las estructuras de S-esquema están dadas por la proyección en la segunda coordenada. Definimos la transformación natural $\theta : \mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n) \to \mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)$ de forma que dado S un esquema y $f \in \mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n)(S)$, le asigna

$\phi \in \mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)(S)$ dado por $(x,s) \to f(x,s)\cdot x$. Se verifica que θ es un isomorfismo (ver [BS13, Lema 6.1.4]). Luego consideremos $\mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n)$ dentro de $\mathrm{Hom}^{GL_n}(X, \mathbb{M}_n)$, donde la acción de GL_n se extiende de forma natural a $\mathbb{M}_n$. Este espacio se puede identificar con el espacio vectorial de las secciones globales del fibrado vectorial $X \times^{GL_n} \mathbb{M}_n \to A$, que es un esquema afín y es de dimensión finita porque A es un esquema propio. □

Consideremos ahora la correspondencia uno a uno entre GL_n-torsores sobre A y fibrados vectoriales vectoriales sobre A de rango n dada por corresponderle a un GL_n-torsor X el fibrado vectorial $E := X \times^{GL_n} \mathbb{k}^n$. Dado un fibrado vectorial E sobre A con la acción de $\mathbb{G}_m$ por multiplicación en las fibras, obtenemos las secuencia:

$$1 \to \mathrm{Aut}_A^{\mathbb{G}_m}(E) \to \mathrm{Aut}^{\mathbb{G}_m}(E) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Aut}(A) \tag{3.2}$$

La correspondencia mencionada anteriormente induce un homomorfismo

$$\gamma : \mathrm{Aut}^{GL_n}(X) \to \mathrm{Aut}^{\mathbb{G}_m}(E), \tag{3.3}$$

de forma que a un elemento ϕ de $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ le asigna el automorfismo inducido en E por el morfismo $\phi \times Id : X \times \mathbb{k}^n \to X \times \mathbb{k}^n$. Llamemos $\hat{\gamma}$ a la restricción de γ al subgrupo de automorfismos $\mathrm{Aut}_A^{GL_n}$. Este se mapea a los automorfismos $\mathrm{Aut}_A^{\mathbb{G}_m}$, que consisten en el grupo de automorfismos de fibrados vectoriales.

Lema 3.2.8. $\mathrm{Aut}_A^{\mathbb{G}_m}(E)$ *consiste en los automorfismos de fibrados vectoriales. Además, la imagen de* $\mathrm{Aut}^{\mathbb{G}_m}(E)$ *por el morfismo* p_* *consiste en aquellos* $\eta \in \mathrm{Aut}(A)$ *tal que* $\eta^*(E) \cong E$ *como fibrados vectoriales sobre* A.

Demostración. Consideremos $\varphi \in \mathrm{Aut}_Y^{\mathbb{G}_m}$ y $U \subset A$ un abierto afín donde el fibrado se trivializa, es decir, tal que $V \times \mathbb{k}^n \cong \pi^{-1}(U) \subset E$. Cuando restringimos φ a $\pi^{-1}(U)$ tenemos que es de la forma $(a,v) \to (a, \Psi(a,v)) \in A \times \mathbb{k}^n$, donde $\psi : V \times \mathbb{k}^n$ es $\mathbb{G}_m$-equivariante. Observemos ahora que como $\mathcal{O}(U \times \mathbb{k}^n)$ es isomorfo a $\mathcal{O}(U) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{k}^n) \cong O(U)[x_1, ..., x_n]$, entonces para una base $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{k}^n$ tenemos que:

$$\Psi(a,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a_1,\dots,a_n} \psi_{a_1,\dots,a_n,i}(a) v_1^{a_1} ... v_n^{a_n} e_i,$$

con $\psi_{a_1,\dots,a_n,i} \in \mathcal{O}(U)$. Como Ψ es $\mathbb{G}_m$-equivariante, tenemos que $\forall t \in \mathbb{k}^*$ se cumple que $\Psi(a,tv) = t\Psi(a,v)$, y por lo tanto los polinomios $\psi_{a_1,\dots,a_n}$ tienen que ser nulos a menos que $a_1 + ... + a_n = 1$. Obtenemos entonces que Ψ es lineal en V y que φ es un automorfismo de fibrados vectoriales.

Veamos ahora que cuál es la imagen de p_*. Sea $\eta = p_*(\varphi)$ para alguna $\varphi \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{G}_m}(E)$. Observemos que $\varphi : E \to E$ se factoriza como un isomorfismo $\gamma : E \to \eta^*(E)$ de esquemas sobre A, seguido de un isomorfismo $\eta^* : \eta^*(E) \to E$ inducido por η. Como γ es $\mathbb{G}_m$-equivariante, γ es un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre A. Recíprocamente, si $\eta \in \mathrm{Aut}(A)$ es tal que $\eta^*(E) \cong E$ como fibrados vectoriales sobre A, entonces su levantado pertenece a $\mathrm{Aut}_A^{\mathbb{G}_m}(E)$. $\square$

A continuación veremos que el homomorfismo γ (Ec. 3.3) es un isomorfismo, y como ya vimos en el Lema 3.2.7 que $\mathrm{Aut}^{GL_n}(X)$ es representable, entonces $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$ también lo será.

Tenemos el siguiente diagrama entre las sucesiones exactas de las ecuaciones 3.1 y 3.2.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\gamma}"] & \mathrm{Aut}^{GL_n}(X) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Aut}(A) \arrow[d, equal] \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}_A^{\mathbb{G}_m}(E) \arrow[r] & \mathrm{Aut}^{\mathbb{G}_m}(E) \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Aut}(A) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Viendo nuevamente a $\mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)$ como los mapas GL_n-equivariantes de X a GL_n como en la demostración del Lema 3.2.7, y utilizando la identificación de $\mathrm{End}_0(E)$ con el fibrado $X \times^{GL_n} \mathbb{M}_n$, tenemos

$$\mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X) \cong \mathrm{Hom}^{GL_n}(X, GL_n) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}^{GL_n}(A, \mathbb{M}_n) \cong H^0(A, \mathrm{End}_0(E))$$

En particular, allí $\mathrm{Aut}_A^{GL_n}(X)$ se corresponde de forma isomorfa a $H^0(A, \mathrm{Aut}_0(E))$.

Por otro lado, dado $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, tenemos que $\varphi^*(E) \cong E$ como fibrados vectoriales si y sólo si $\varphi^*(X) \cong (X)$ como GL_n-torsores, por lo tanto π_* y p_* tienen la misma imagen. Por el Lema de los cinco ([21, VII 7.1]), tenemos entonces que γ es un isomorfismo.

Finalmente, podemos ver a $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$ como el pull-back de A por p_*, viendo a A como subgrupo de $\mathrm{Aut}(A)$ vía la acción por multiplicación a izquierda en A. Tenemos entonces el resultado buscado.

Teorema 3.2.9. *Sea A una variedad abeliana. El functor $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$ es representable por un esquema en grupos de tipo finito, y la proyección $d : \mathrm{Aut}_{gr}(E) \to A$ dada por $d(T)(f, a) = a$ es un morfismo de esquemas en grupos. además, el núcleo de d, $\mathrm{Aut}_0(A)$, es un esquema en grupos de tipo finito, afín, liso y conexo.* $\square$

Definición 3.2.10. Sean A una variedad abeliana y (E, π) un fibrado vectorial sobre A, decimos que este fibrado es homogéneo si el morfismo de esquemas en grupos inducido $d : Aut_{gr}(E) \to A$ es fielmente plano.

Notaremos $HVB_0(A)$ a la subcategoría completa de $VB_0(A)$ cuyos objetos son los fibrados vectoriales homogéneos.

Definición 3.2.11. Sean (E, π) y (E', π') dos fibrados homogéneos sobre una variedad abeliana A. Podemos definir el functor de homomorfismos graduados $Hom_{gr}(E, E') : Sch^{op} \to Sets$ definido como sigue:

- Si T es un $\mathbb{k}$-esquema, $Hom_{gr}(E, E')(T)$ es el conjunto de pares (f, a) con $f : E_T \to E'_T$ un morfismo de T-esquemas y a un T-punto de A, de forma que se verifican las siguientes dos propiedades:

  1. El siguiente diagrama conmuta:

  $$\begin{tikzcd} E_T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_T"'] & E'_T \arrow[d, "\pi'_T"] \\ A_T \arrow[r, "t_a"'] & A_T \end{tikzcd}$$

  2. El morfismo $\hat{f}$ de A_T-esquemas inducido por el siguiente diagrama es un morfismo de fibrados vectoriales sobre A_T:

  $$\begin{tikzcd} E_T \arrow[dr, dashed, "\hat{f}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_T"'] & & \\ & t_a^*(E'_T) \arrow[r] \arrow[d] & E'_T \arrow[d, "\pi'_T"] \\ & A_T \arrow[r, "t_a"'] & A_T \end{tikzcd}$$

- Si $g : T' \to T$ es un morfismo de $\mathbb{k}$-esquemas y (f, a) es un elemento de $Hom_{gr}(E, E')(T)$, con $f = (\tilde{f}, p_2) : E \times T \to E \times T)$, entonces

  $$Hom_{gr}(E, E')(g)(f, a) = \big((\tilde{f} \circ (Id_E \times g), p_2), a \circ g\big)$$

  que verifica el siguiente diagrama conmutativo

  $$\begin{tikzcd} E \times T' \arrow[r, "(Id_E \times g, p_2)"] \arrow[d, "(\pi, p_2)"'] & E_T \times T' \arrow[r, "(f, p_2)"] \arrow[d, "(\pi_T, p_2)"'] & E'_T \times T' \cong E' \times T' \arrow[d, "(\pi'_T, p_2)"] \\ A \times T' \arrow[r, "(Id_A \times g, p_2)"'] & A_T \times T' \arrow[r, "(t_a, p_2)"'] & A_T \times T' \cong A \times T' \end{tikzcd}$$

Dada una variedad abeliana A, podemos definir ahora la categoría de fibrados vectoriales homogéneos a partir de $\mathrm{VB}_0(A)$, restringiéndonos a los fibrados vectoriales homogéneos y agregando los morfismos de fibrados vectoriales con traslación en la base. Si notamos

$\mathcal{V}$ a la categoría Func $\big((Sch|\Bbbk)^{op}, \mathrm{Sets}\big)$, podemos equiparla con el producto inducido por el producto cartesiano en Sets. Equiparemos a nuestra categoría de fibrados vectoriales homogéneos con esta estructura adicional.

Definición 3.2.12. Sea A una variedad abeliana.

1. Definimos la $\mathcal{V}$-categoría $\mathrm{VB}_{gr}(A)$, enriquecida sobre $\mathcal{V}$ (ver [5, Sección 6.2]), cuyos objetos son los de $\mathrm{VB}_0(A)$ y dados dos fibrados vectoriales (E, π) en (E', π') sobre A, $Hom_{gr}(E, E')$ es el functor de homomorfismos graduados de fibrados vectoriales.
2. La $\mathcal{V}$-categoría $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$ es la $\mathcal{V}$-subcategoría plena de $\mathrm{VB}_{gr}(A)$ cuyos objetos son los fibrados vectoriales homogéneos.

Observación 3.2.13. Podemos observar las siguientes relaciones entre las categorías de fibrados vectoriales homogéneos y no homogéneos:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HVB}_0(A) & \subset & \mathrm{HVB}_{gr}(A) \\ \cap & & \cap \\ \mathrm{VB}_0(A) & \subset & \mathrm{VB}_{gr}(A) \end{array}$$

Las inclusiones horizontales corresponden a subcategorías plenas y las inclusiones verticales a subcategorías amplias.

3.3. Representaciones de extensiones afines de variedades abelianas

En esta sección presentamos la construcción de la categoría de representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana y la prueba de la solución al problema de reconstrucción. Tanto en la presentación como en el contenido seguimos como referencia a [RdAF].

Definición 3.3.1. Dada $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana A, una representación de $\mathcal{S}$ es (E, π) un fibrado vectorial homogéneo sobre A junto con ϱ un morfismo de extensiones afines de $\mathcal{S}$ en $Aut_{gr}(E)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}: \arrow[d, "\varrho"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{Aut}_{gr}(E): & 1 \arrow[r] & Aut_0(E) \arrow[r] & Aut_{gr}(E) \arrow[r, "d"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observación 3.3.2. Dar una representación ϱ de una extensión afín $\mathcal{S}$ sobre un fibrado vectorial homogéneo (E, π) es equivalente a dar una acción a de G en E que sea lineal en las fibras y que a nivel de la base la acción sea la de la suma en A, esto es que verifique el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "(q,\pi)"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ A \times A \arrow[r, "s"'] & A \end{tikzcd}$$

Ejemplo 5. 1. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana A y $(\Bbbk \times A, p_2)$ el fibrado trivial $\Bbbk \times A$. En este caso tenemos que $Aut_{gr}(E)$: $1 \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{(Id_{\mathbb{G}_m}, 0_A \circ St_{\mathbb{G}_m})} \mathbb{G}_m \times A \xrightarrow{p_2} A \to 0$, donde $St_{\mathbb{G}_m}$ es el morfismo estructural de $\mathbb{G}_m$. Por lo tanto, dado un caracter $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ le podemos corresponder la representación dada por $\rho = (\chi, q) : G \to \mathbb{G}_m \times A$, y la inversa a esta correspondencia está dada por $\rho \to p_1 \circ \rho$, obteniendo así una correspondencia biyectiva entre los caracteres de G y las representaciones de $\mathcal{S}$ en E.

2. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana A, V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $(V \times A, p_2)$ el fibrado trivial $V \times A$. Luego si ϱ es una representación de $\mathcal{S}$ en E tenemos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} : \arrow[d, "\varrho"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \mathrm{Aut}_{gr}(V \times A) : & 1 \arrow[r] & GL(V) \arrow[r] & GL(V) \times A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De la misma forma que en el anterior ejemplo obtenemos una correspondencia biyectiva entre las representaciones de $\mathcal{S}$ en $V \times A$ y las representaciones de G en V.

Dados $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana y V un H-módulo, podemos construir una representación de $\mathcal{S}$ en el espacio inducido $E_V = G \times^H V \to A$ de la siguiente forma.

Proposición 3.3.3. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana y $V \in \mathrm{Rep}_{fin}(H)$. Consideremos la acción diagonal $a_{G\times V} = \big(m \circ (p_2, i \circ p_1), a_V \circ p_{13}\big) : H \times (G \times V) \to G \times V$, con $p_{1,3}$ la proyección en las primera y tercera coordenadas y a_V la acción de H en V. Tenemos entonces que $\pi_V : E_V := G \times^H V = (G \times V)/H \to A$ es una representación de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Para la prueba de este resultado nos basamos en [RdAF, Teorema 2.61] con una ligera variante en la demostración siguiendo a [25, Proposición 7.1].

Consideremos el morfismo $p_1 : G \times V \to G$ que es H-equivariante y el morfismo $q : G \to A$ que es un H-torsor. En este contexto, [25, Proposición 7.1] nos dice que podemos completar el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} G \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_1"'] & G \times^H V \arrow[d, "\pi_V"] \\ G \arrow[r, "q"'] & A \end{tikzcd}$$

Para ver que $(G \times^H V, \pi_V)$ es un fibrado vectorial basta observar que $(G \times V, p_1)$ es el fibrado vectorial trivial sobre G y aplicar [15, Teorema VIII.1.7]. Luego la acción $G \times (G \times^H V) \to G \times^H V$ inducida por $g \cdot [g', v] = [g'g, v]$ es lineal en las fibras y π_V es G-equivariante, donde llamamos $[g, v]$ a la clase de (g, v) en el cociente y utilizamos la propiedad universal del cociente para dar la definición a partir de los representantes.

Observemos que las fibras son isomorfas a V. Si R es una $\Bbbk$-álgebra y $a \in A(R)$, entonces $q^{-1}(R)(a) = g_a H$ para algún $g_a \in G(R)$. Luego si $[g, v] \in \pi_V^{-1}(R)(a)$, entonces $g = g_a h$ para algún $h \in H(R)$, y por lo tanto $[g, v] = [g_a h, v] = [g_a, h^{-1} \cdot v]$. Por lo tanto $\pi_V^{-1}(R)(a)$ es isomorfa a $V(R)$. □

Sean (E, ρ_E) y $(E', \rho_{E'})$ dos representaciones de $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$. Entonces podemos construir una acción de G en el fibrado vectorial $Hom_{gr}(E, E')$ a partir de la acción de G en $Aut_{gr}(E)$ y en $Aut_{gr}(E')$ ($Hom_{gr}(E, E')$ es representable por $Aut_{gr} \times^{Aut_0(E')} Hom_0(E, E')$ por [RdAF, Lema 3.24]). Sean T un esquema, $g : T \to G$ un T-punto de G y $(f, l) \in Hom_{gr}(E, E')(T)$. Definimos la acción como $g \cdot (f, l) = a\big(g, (f, l)\big) = \varrho_{E'}(g) \circ (f, l) \circ \varrho_E(g^{-1})$.

El siguiente lema nos ayuda a describir los morfismos graduados equivariantes entre (E, ρ_E) y $(E', \rho_{E'})$, es decir, el esquema de puntos fijos por la acción de G en $Hom_{gr}(E, E')$.

Lema 3.3.4. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana y (E, ρ_E) y $(E', \rho_{E'})$ dos $\mathcal{S}$-módulos. Considerando la acción de G definida anteriormente, se cumple que ${}^G Hom_{gr}(E, E') \cong G_{ant} \times^{G_{ant} \cap H} Hom_0(E, E')$. En particular, ${}^G Hom_{gr}(E, E')$ es un $\mathcal{S}_{ant}$-módulo y por lo tanto un subfibrado vectorial de $Hom_{gr}(E, E')$.*

Demostración. Este resultado y su demostración se encuentran en [RdAF, Lema 3.37]. Vamos a considerar la acción $a_{\rho_{E'}} : G \times \mathrm{Hom}_{gr}(E, E') \to \mathrm{Hom}_{gr}(E, E')$ por post-componer con $\rho_{E'}$ y construir un isomorfismo a partir de restringir y pasar al cociente ese morfismo.

Consideremos $\mathcal{S}_{ant}$ la subextensión de $\mathcal{S}$. Como G_{ant} está incluida en el centro de G, para cualquier esquema R, $g \in G_{ant}(R)$, $g' \in G(R)$ y $(f,l) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E,E')(R)$, tenemos que

$$\begin{aligned} a_{\rho_{E'}}\big(g', g \cdot (f,l)\big) &= \varrho_{E'}(g') \circ \varrho_{E'}(g) \circ (f,l) \circ \varrho_E(g^{-1}) \\ &= \varrho_{E'}(g) \circ \varrho_{E'}(g') \circ (f,l) \circ \varrho_E(g^{-1}) \\ &= g \cdot a_{\rho_{E'}}\big(g', (f,l)\big) \end{aligned}$$

y por lo tanto ${}^G\mathrm{Hom}_{gr}(E,E')$ es estable por G_{ant} para la acción $a_{\rho_{E'}}$. Obtenemos en particular que ${}^G\mathrm{Hom}_0(E,E')$ es un $G_{ant} \cap H$-módulo y $R := G_{ant} \times^{G_{ant}\cap H} {}^G\mathrm{Hom}_0(E,E') \to A$ es un fibrado vectorial homogéneo. La acción $a_{\rho_{E'}}$ induce un morfismo de fibrados vectoriales $R \to \mathrm{Hom}_{gr}(E,E')$ que es inyectivo y su imagen está contenida en ${}^G\mathrm{Hom}_{gr}(E,E')$. Finalmente, como la fibra del neutro $R_0 = {}^G\mathrm{Hom}_0(E,E')$, obtenemos como resultado que $R \cong {}^G\mathrm{Hom}_{gr}(E,E')$. $\square$

Definición 3.3.5. Llamamos fibrado vectorial homogéneo de morfismos G-equivariantes de E en E' al subfibrado vectorial ${}^G Hom_{gr}(E,E')$.

Podemos definir ahora la categoría de representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana.

Definición 3.3.6. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Definimos la categoría de representaciones de $\mathcal{S}$ como una categoría enriquecida por Sch, y la notamos $Rep(\mathcal{S})$, de la siguiente forma:

- Los objetos de $Rep(\mathcal{S})$ son las representaciones de $\mathcal{S}$.
- Dadas (E, ρ_E) y $(E', \rho_{E'})$ dos representaciones de $\mathcal{S}$, definimos $Hom_{Rep(\mathcal{S})}(E,E')$ como el fibrado vectorial homogéneo de morfismos G-equivariantes ${}^G Hom_{gr}(E,E')$.

Dentro de esta categoría, definimos $Rep_0(\mathcal{S})$ como la subcategoría amplia cuyos morfismos son $Hom_{Rep_0(\mathcal{S})}(E,E') := Hom_{Rep(\mathcal{S})}(E,E')_0$. Estos morfismos son la identidad a nivel de la base A, y por lo tanto los podemos identificar con los morfismos entre los fibrados vectoriales E y E' que conmutan con la acción de G.

Dada $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana, veamos que la construcción de la Proposición 3.3.3 cumple un rol relevante en la relación de los fibrados vectoriales G-equivariantes sobre A con los H-módulos sobre un espacio vectorial. En particular esto nos da una equivalencia para la categoría de representaciones de $\mathcal{S}$ con base 0 con la categoría de representaciones de dimensión finita de su parte afín H.

Teorema 3.3.7. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana y $V \in \mathrm{Rep}_{fin}(H)$. Consideremos la representación de $\mathcal{S}$ en $\pi_V : E_V = G \times^H V \to A$ dada en la Proposición 3.3.3. Si (E, ρ) es una representación de $\mathcal{S}$, entonces E y $G \times^H E_0$ son isomorfas en $\mathrm{HVB}_0(A)$, donde la acción de H en E_0 está dada por la restricción de ρ.*

En particular, las categorías $\mathrm{Rep}_{fin}(H)$ y $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ son equivalentes.

Demostración. Este resultado y su demostración siguen [RdAF, Teorema 3.43]. Consideremos $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$. La fibra E_0 es un H-módulo con la acción por restricción. Luego por lo expresado anteriormente, $E_V = G \times^H E_0$ es una representación de $\mathcal{S}$. Consideremos el morfismo de esquemas $f : G \times E_0 \to E$ dada por $(g, v) \to g \cdot v$ vía la acción índucida por ρ. El morfismo f es H-invariante e induce un morfismo de fibrados vectoriales $\hat{f} : E_V \to E$ que es un isomorfismo.

Estas construcciones nos permiten construir un functor de la categoría $\mathrm{Rep}_{fin}(H)$ a la categoría $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$. Si tenemos $V, W \in \mathrm{Rep}_{fin}(H)$ y $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, esto produce un morfismo en los espacios inducidos $\hat{f} : G \times^H V \to G \times^H W$. Por otro lado, dados $E, F \in Rep_0(\mathcal{S})$ y $f \in {}^G Hom(E, F)$, esto produce por restricción un morfismo de H-módulos de E_0 en F_0. La construcción anterior implica que estos functores forman una equivalencia de categorías. $\square$

Así como hicimos con los esquemas en grupos afines (Definición 3.1.9) dada una extensión afín de una variedad abeliana, podemos definir un functor olvido de la categoría de representaciones que desecha la estructura de representación y se queda solamente con la estructura de de fibrado vectorial.

Definición 3.3.8. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Definimos el functor $\omega_{gr} : \mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \to \mathrm{HVB}_g\, r(A)$ de la categoría $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ en la categoría $HVB_{gr}(A)$ como el functor olvido que a cada representación (E, ϱ) le asigna el fibrado vectorial homogéneo E y a cada morfismo entre dos representaciones le asigna el morfismo correspondiente entre los fibrados vectoriales homogéneos. Definimos $\omega_0 : \mathrm{Rep}_0(\mathcal{S}) \to \mathrm{HVB}_0(A)$ como el functor inducido por la restricción de ω_{gr}.

Los functores ω_{gr} y ω_0 verifican el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\omega_0"'] & \mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \arrow[d, "\omega_{gr}"] \\
\mathrm{HVB}_0(A) \arrow[r, hook] & \mathrm{HVB}_{gr}(A)
\end{tikzcd}$$

Observación 3.3.9. 1. Sea $\mathcal{S}$ una extensión afín de una variedad abeliana, $\omega_{gr} : \mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \to \mathrm{HVB}_g\, r(A)$ el functor olvido, y T un $\Bbbk$-esquema. Una T-transformación natural $\lambda : \omega_{gr} \Rightarrow \omega_{gr}$ está dada por una familia de morfismos $\lambda_E = (f_E, a_E) \in \mathrm{End}_{gr}(\omega_{gr}(E))(T) = \mathrm{End}_{gr}(E)(T)$, con $E \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$, que cumplen con la siguiente condición de compatibilidad:

- Dadas dos representaciones $E, F \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ y $(g, b) \in {}^G\mathrm{Hom}_{gr}(E, f)(T)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E_T \arrow[r, "f_E"] \arrow[d, "g"'] & E_T \arrow[d, "g"] \\ F_T \arrow[r, "f_F"] & F_T \end{tikzcd}$$

2. La categoría HVB_{gr} no es abeliana, es decir, la suma directa natural no cumple la propiedad universal como discutiremos en la sección 4.1. Sin embargo si podemos definir la suma directa de representaciones (ver Definición 4.1.9 para más detalles).

3. De la condición mencionada en la parte 1, se deduce que dadas dos representaciones $E_1, E_2 \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$, se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E_{iT} \arrow[r, "\lambda_E"] \arrow[d, "i"'] & E_{iT} \arrow[d, "i"] \\ E_1 \oplus E_{2T} \arrow[r, "\lambda_F"] & E_1 \oplus E_{2T} \end{tikzcd}$$

Esto implica que $d(\lambda_{E_1}) = d(\lambda_{E_1 \oplus E_2}) = d(\lambda_{E_2})$, es decir, λ_{E_1} y λ_{E_2} son morfismos de $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$ con el mismo grado. Por lo tanto podemos definir el grado de λ.

Definición 3.3.10. Dada $\mathcal{S}$ un extensión afín sobre una variedad abeliana y el functor olvido $\omega_{gr} : \mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \to \mathrm{HVB}_g\, r(A)$, podemos definir el functor de transformaciones naturales $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr}) : \mathrm{Sch}\, \Bbbk^{op} \to Mon$ definido por:

- $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr})$ está compuesto por los $\lambda : \omega_{gr} \Rightarrow \omega_{gr}$ tal que λ es una T-transformación natural que verifica que $\lambda_{E_1 \otimes E_2} = \lambda_{E_1} \otimes \lambda_{E_2}$ para cualesquiera $E_1, E_2 \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$, y que si $\mathbb{1} = (\mathrm{p}_2 : \Bbbk \times \mathrm{A} \to \mathrm{A})$ es la representación trivial, entonces $(\lambda_{\mathbb{1}}, a) = (Id_{\Bbbk} \times t_a, a)$.
- Si $g : T' \to T$ es un morfismo de esquemas, entonces $\mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr})(g) : \mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr})(T) \to \mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr})(T')$ se define a partir del functor $\mathrm{End}_{gr}(E)$.

El morfismo de grado es el mapa $d_{gr} : \mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr}) \to A$ que a cada transformación natural le hace corresponder $d(\lambda_{\mathbb{1}})$.

Luego podemos definir el subfunctor $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}) \subset \mathrm{End}^{\otimes}(\omega_{gr})$ dado por las transformaciones naturales λ tal que λ_E siempre es un automorfismo graduado de fibrados vectoriales homogéneos. También podemos definir $\mathrm{End}_0(\omega_{gr})$ y $Aut_0(\omega_{gr})$ como los núcleos correspondientes al morfismo de grado en cada caso.

Teorema 3.3.11. *Sea $\mathcal{S}$ una extensión afín de una variedad abeliana. $\mathcal{S}$ es de tipo finito si y sólo si existe un $\mathcal{S}$-módulo fiel $E \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$.*

Demostración. Si $(E, \varrho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ es un $\mathcal{S}$ módulo fiel, entonces $\mathcal{S}$ es isomorfa vía ϱ a una subextensión de $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$ que es de tipo finito.

En el otro sentido, $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to 0$ es de tipo finito si H es un esquema en grupos de tipo finito. Luego por el Teorema 3.1.7, existe un H-módulo fiel $(V, r) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$. Consideremos $(E = G \times^H V, \varrho)$ la representación inducida de $\mathcal{S}$ por (H, r).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} : \arrow[d, "\varrho"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "r"] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{Aut}_{gr}(E) : & 1 \arrow[r] & Aut_0(E) \cong GL(V) \arrow[r] & Aut_{gr}(E) \arrow[r, "d"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenmos que ver que ρ es una inmersión y por lo tanto (E, ϱ) es un $\mathcal{S}$-módulo fiel. Para esto alcanza ver que $\rho(g) = e$ por [Bri17, Proposición 2.7.1]. Para ver que $\rho(g) = e$, en primer caso tenemos que $q(g) = \rho(g) = e$, por lo tanto $g \in H$ y esto se cumple por ser r una inmersión. $\square$

Veremos ahora que dada una extensión afín sobre una variedad abeliana y una subextensión cerrada, esta última se puede presentar como un estabilizador de un subfibrado en rectas para alguna representación de la primera. Esto es una extensión de un resultado conocido para el caso afín (ver [11, Corolario II.2.3.5]) y es útil para la prueba del teorema de reconstrucción, al igual que en el caso afín.

Lema 3.3.12. *Sean $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana y $\mathcal{S} : 1 \to H' \to G' \xrightarrow{q} A \to 0$ una subextensión cerrada de $\mathcal{S}$. Entonces existe una representación $(E, \varrho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ y $L \subset E$ un subfibrado vectorial homogéneo de dimensión 1 tal que el estabilizador de L es G'. Esto es que para cualquier esquema T, se cumple que $G'(T) = \{g \in G(T) : g \cdot L(T) \subset L(T)\}$.*

Demostración. La demostración de este resultado se encuentra en [RdAF, Lema 3.78].

Consideremos H' como subesquema en grupos de H. Por ver [11, Corolario II.2.3.5], podemos considerar V un H-módulo de dimensión finita y $U \subset V$ un H-submódulo unidimensional tal que H' sea su estabilizador. Consideremos $E_V = G \times^H V$ la representación de $\mathcal{S}$ inducida de $\mathcal{S}$ y $E_W = G' \times^{H'} U$ la representación de $\mathcal{S}'$ inducida por U. La inclusión $G' \times U$ en $G \times V$ induce una inmersión de fibrados vectoriales sobre A de E_W en E_V, y llamamos L a la imagen de E_W. Para verificar que esta inclusión es una inmersión podemos tomar $[g_1, u_1], [g_2, u_2] \in E_W$ tal que sus imágenes sean iguales. Luego tenemos que $g_1 h = g_2$ por lo que $h \in G'$, y $h \cdot u_1 = u_2$ por lo que $h \in H'$.

Veamos ahora que $G'(T)$ es el estabilizador de L. Es directo que G' está contenido en el estabilizador de L. Consideremos ahora $g \in G(T)$ tal que $g \cdot L(T) \subset L(T)$, es decir, que $g \cdot [g_1, u_1] = [gg_1, u_1] \in L(T)$, para todo $[g_1, u_1] \in L(T)$, por lo que existen $g_2 \in G'$ y $u_2 \in U$ tal que $[gg_1, u_1] = [g_2, u_2]$.

Supongamos que $g \in H$ y veamos que entonces $g \in H'$. Aplicamos lo anterior para $g_1 = e$ y tenemos $[g_2, u_2] = [g, u_1] = [gg^{-1}, g \cdot u_1] = [e, g \cdot u_1]$, por lo que existe $h \in H(T)$ tal que $g_2 = h^{-1}$ y $h \cdot u_2 = g \cdot u_1$. Entonces resulta que $h \in H \cap G'$, por lo que $g \cdot u_1 \in U$, y $g \in H'$.

Consideremos ahora $g \in G(T)$. Como $q' : G \to A$ es fielmente plano, existe $\phi : T' \to T$ morfismo fielmente plano casi-compacto y $c \in G'(T')$ tal que $q \circ g \circ \phi = q \circ c \in A(T')$. Luego $(g \circ \phi)c^{-1} \in H(T')$, porque su imagen es el neutro de $A(T')$, y estabiliza $L(T')$, porque tanto $g \circ \phi$ como c lo hacen, por lo que $(g \circ \phi)c^{-1} \in H'(T')$. Esto implica que $g \circ \phi \in G'(T')$, y por lo tanto $g \in G'(T)$.

$\square$

Si (E, ϱ) es una representación de una extensión afín $\mathcal{S}$, entonces el morfismo ϱ de extensiones afines se factoriza por una subextensión afín $\mathcal{S}_E$ de la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}: \arrow[d, "\varrho"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathcal{S}_E: \arrow[d, hook] & 1 \arrow[r] & (G_E)_0 = \rho(H) \arrow[r] \arrow[d, hook] & G_E = \rho(G) \arrow[r, "d_E \restriction_{G_E}"] \arrow[d, hook] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{Aut}_{gr}(E): & 1 \arrow[r] & Aut_0(E) \arrow[r] & Aut_{gr}(E) \arrow[r, "d"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde $G_E := \rho(G)$ es la imagen esquemática de G por ρ, que es un esquema en grupos de tipo finito por ser un subesquema cerrado de $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$.

Lema 3.3.13. *Sea $\mathcal{S}$ una extensión afín de una variedad abeliana y (E, ϱ) una representación de $\mathcal{S}$. Entonces la inclusión $G_E \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E})$ es un isomorfismo, y $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E \cong \mathrm{Rep}(\mathcal{S}_E)$.*

Demostración. La prueba de este resultado sigue [RdAF, Lema 4.3] y es una generalización de la prueba de la Proposición 3.1.10.

En primer lugar veremos cómo considerar $G_E \subset \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E}) \subset \mathrm{Aut}_{gr}(E)$ como una cadena de inclusiones de esquemas en grupos. Tenemos que $G_E \subset \mathrm{Aut}_{gr}(E)$ es un subesquema en grupos cerrado de tipo finito. Consideremos (F, ς) una representación de $\mathcal{S}_E$. Esta representación es automáticamente G-equivariante vía la acción por ϱ, por lo que induce un objeto en $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E$, que resulta único a menos de isomorfismo ya que (E, ρ) es una representación fiel. Lo mismo sucede para $Aut_{gr}(E)$. Por otro lado, por la Proposición 3.4.1 sabemos que E_0 es una representación fiel de H, y por el mismo razonamiento tenemos que cualquier representación de H pertenece a $(\mathrm{Vec}_{\Bbbk})_{E_0}$. Nuevamente lo mismo sucede para $\mathrm{Aut}_0(E)$. Finalmente, aplicando otra vez la Proposición 3.4.1, resulta que $Obj\big(\mathrm{Rep}(\mathcal{S}_E)\big) = Obj\big(\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S}_E)\big)$ y $Obj\big(\mathrm{Rep}(\mathrm{Aut}_{gr}(E)\big) = Obj\big(\mathrm{Rep}_0(\mathrm{Aut}_0(E))\big)$ están incluidos en $Obj\big(\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E\big)$.

Veamos ahora que si $F \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E$ y $L \subset F$ es una subrepresentación, es decir, es un subfibrado vectorial $\mathrm{Aut}_{gr}(E)$-homogéneo, tal que L es estable por G_E, entonces también lo es por $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E})$. Sea $i : L \to F$ la inclusión de L en F que es un morfismo G-equivariante (vía la acción inducida por $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{gr}(E)$). Consideremos un esquema T, $g \in G(T)$, $(\lambda_{E'}, a)_{E' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E} \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E})(T)$ y $(l, t) \in L \times T$. Por la definición de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr})$ (Definición 3.3.10) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L \times T \arrow[r, "\lambda_L"] \arrow[d, "i \times Id_T"'] & L \times T \arrow[d, "i \times Id_T"] \\
F \times T \arrow[r, "\lambda_F"'] & L \times T
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lambda_F(l, t) &= \lambda_F \circ (i \times Id_T)(l, t) \\
&= (i \times Id_T) \circ \lambda_L(l, t) \in L \times T
\end{aligned}$$

Por lo tanto L es estable por la acción de $\mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{gr} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E)}\right)(T)$.

Finalmente, por el Lema 3.3.12, sabemos que existe una representación $F \in Rep(\mathcal{S})$ y una subrepresentación $L \subset F$ tal que G_E es el estabilizador de L. Esto implica, junto con la afirmación anterior, que $G_E = \mathrm{Aut}^{\otimes}\left(\omega_{gr} \restriction_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E)}\right)$. □

El siguiente lema nos permite extender el resultado anterior para llegar a una prueba del Teorema 3.3.15 por medio de aproximación mediante extensiones de tipo finito.

Lema 3.3.14. *Sea $\mathcal{S}$ una extensión afín de una variedad abeliana. Sea $\big(\mathcal{S}_E\big)_{E\in\operatorname{Rep}(\mathcal{S})}$ el sistema filtrado afín fielmente plano, con $\mathcal{S}_E := Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E})$ la extensión afín*

$$Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}) : 1 \to \operatorname{Aut}_0^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}) \to \operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}) \to A \to 0,$$

donde dados $E, E' \in \operatorname{Rep}(\mathcal{S}')$ tenemos que $E' \leq E$ si y sólo si $E = E' \oplus F$ para alguna $F \in \operatorname{Rep}(\mathcal{S})$, y los morfismos de transición están dados por la restricción.

Entonces la sucesión exacta corta

$$Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) : 1 \to \operatorname{Aut}_0^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) \to \operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) \to A \to 0$$

es el límite del sistema filtrado de $\big(\mathcal{S}_E\big)_{E\in\operatorname{Rep}(\mathcal{S})}$, y en particular, $Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}})$ es una extensión afín.

Demostración. En primer lugar observemos que el sistema efectivamente es filtrado. Si $E \geq E'$, es decir, $E = E' \oplus F$ para alguna $F \in \operatorname{Rep}(\mathcal{S})$, entonces $E \in \operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'}$, y por lo tanto $\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'} \subset \operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E$. Luego los elementos de $\operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E})$ inducen elementos de $\operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'}})$ vía restricción. Entonces los morfismos de transición entre las extensiones afines resultan:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (G_E)_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_E = \rho(G) \arrow[r, "d_E|_{G_E}"] \arrow[d, equal, "\rho"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Aut}_0^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}) \arrow[r, "q_{\omega_{gr}}|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E}"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Aut}_0^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'}}) \arrow[r, "r_{E,E'}"] & \operatorname{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'}}) \arrow[r, "q_{\omega_{gr}}|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_{E'}}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Las proyecciones $\pi_E : Aut^{\otimes}(\omega_{gr}) \to Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E})$ están dada nuevamente por la restricción y claramente conmutan con los morfismos de transición.

Veamos ahora que $\varprojlim \mathcal{S}_E = Aut^{\otimes}(\omega_{gr})$. Consideremos una extensión afín $\mathcal{S}' : 1 \to H' \to G' \to A \to 0$ y una familia $\Big(\varphi_E : \mathcal{S}' \to Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}\big|_{\operatorname{Rep}(\mathcal{S})_E})\Big)_{E\in\operatorname{Rep}(\mathcal{S})}$ de forma que estos morfismos conmuten con los morfismos de transición. Queremos ver que hay un único $u : \mathcal{S}' \to Aut^{\otimes}(\omega_{gr})$ morfismo de extensiones afines sobre A que conmuta con las proyecciones. En particular, para los centros de las sucesiones exactas esto resulta en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & G' \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\phi_E"'] \arrow[ddr, "\phi_{E'}"] & \\
 & \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}) \arrow[dl, "\pi_E"] \arrow[dr, "\pi_{E'}"'] & \\
Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E}) \arrow[rr, "r_{E,E'}"'] & & Aut^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_{E'}})
\end{tikzcd}$$

Si existe tal morfismo u, entonces dado un esquema T y $g \in G(T)$, tenemos que $u(g) = \lambda : \omega_{gr} \Rightarrow \omega_{gr}$ es una transformación natural que cumple las propiedades enunciadas en la Definición 3.3.10. Luego dado $F \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$, $\lambda_F = \phi_{F'}(g)_F \in \mathrm{Aut}_{gr}(F)$ para todo $F' \geq F$. Esto efectivamente define un único elemento de $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr})$ y un único morfismo $u : \mathcal{S}' \to Aut^{\otimes}(\omega_{gr})$. □

Presentamos ahora el Teorema de Reconstrucción para la teoría de representaciones de extensiones afines de variedades abelianas.

Teorema 3.3.15. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 1$ una extensión afín de una variedad abeliana. La transformación natural $\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{gr}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}})$ es un isomorfismo de functores. Además el isomorfismo induce un isomorfismo entre las extensiones correspondientes:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} : \arrow[d, "\varphi"] & 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "q"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\mathrm{Aut}_{gr}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) : & 1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}_0^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{gr}^{\otimes}(\omega_{gr}^{\mathcal{S}}) \arrow[r, "d"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En particular tenemos que si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son dos extensiones afines de variedades abelianas, entonces $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$ si y sólo si existe una equivalencia de categorías $F : \mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{S}')$ tal que su restricción a $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ es un functor monoidal y que F conmuta con los functores olvido $\omega_{gr}^{\mathcal{S}}$ y $\omega_{gr}^{\mathcal{S}'}$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\omega_{gr}^{\mathcal{S}}"'] & & \mathrm{Rep}(\mathcal{S}') \arrow[dl, "\omega_{gr}^{\mathcal{S}'}"] \\
 & \mathrm{HVB}_{gr}(A) &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Este enunciado y su prueba se encuentran en [RdAF, Teorema 4.6]. Consideremos el sistema de extensiones afines $\{\mathcal{S}_E\}_{E \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})}$ con $E' \geq E$ si y sólo si E' se factoriza a través de G_E, esto es, que exista un morfismo $\rho_{E,E'}$ tal que $\rho_{E'} = \rho_{E,E'} \rho E$.

Si $E' \geq E$, entonces $E' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E$, y en particular, $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_{E'} \subset \mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo (que se prolonga a las extensiones afines correspondientes):

$$\begin{tikzcd} G_E \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{E,E'}"'] & \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E}) \arrow[d, "f_{E,E'}"] \\ G_{E'} \arrow[r] & \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_{E'}}) \end{tikzcd}$$

En particular, $f_{E,E'}$ es un epimorfismo si y sólo $\rho_{E,E'}$ lo es. Llamamos $\mathcal{J}$ al sistema filtrado de extensiones afines inducido por los morfismos $f_{E,E'}$.

Por el Lema 3.3.14 sabemos que $\mathcal{S}$ es el límite inverso del sistema filtrado $\{\mathcal{S}\}_{E\in I}$ al que llamaremos $\mathcal{I}$ y que es un subsistema filtrado de $\mathcal{J}$. Esto implica que $\mathcal{S} = \varprojlim_{\mathcal{I}} \mathcal{S}_E = \varprojlim_{\mathcal{J}} \mathcal{S}_E$.

Sabemos por el Lema 3.3.13, que los sistemas filtrados afines $\{\mathcal{S}\}_{\mathcal{J}}$ y $\{\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E})\}_{\mathcal{K}}$ tienen el mismo límite, donde $\{\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E})\}_{\mathcal{K}}$ es el sistema filtrado construido en la demostración del lema. Esto es entonces que $\mathcal{S} = \varprojlim_{\mathcal{J}} \varprojlim_{\mathcal{K}} \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr}|_{\mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E}) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega_{gr})$ y obtenemos el resultado buscado. $\square$

Proposición 3.3.16. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *H es finito si y solamente si existe $E \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ tal que todo objeto $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ es isomorfo a uno de $\langle E \rangle$.*

2. *G es de tipo finito si y solamente si $\mathrm{Rep}(\mathcal{S}) \cong \mathrm{Rep}(\mathcal{S})_E$.*

3. *$\mathcal{S}$ es una extensión trivial de A, es decir, $\mathcal{S}$ es de la forma $1 \to H \to H \times A \to A \to 0$, si y solamente si toda representación de $\mathcal{S}$ es sobre fibrados triviales $\mathbb{k}^n \times A$.*

Demostración.

1. Como los objetos de $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ y $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ son los mismos, basta referirse a la Proposición 3.1.14.

2. La prueba es la misma que la del segundo ítem de la Proposición 3.1.14.

3. Si $\mathcal{S}$ es de la forma $1 \to H \to H \times A \to A \to 0$, obtenemos una sección $A \to \mathrm{Aut}_{gr}(E)$ para cualquier representación (E, ρ). Luego por la [RdAF, Observación 3.29] tenemos que E es un fibrado trivial. Por otro lado, si toda representación de $\mathcal{S}$ es sobre un fibrado trivial, tenemos que $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathbb{k}^n \times A) \cong GL_n \times \mathbb{k}^n$. Luego G_E es de la forma $K_E \times A$ con K_E afín, y tomando límite resulta que G es de la forma $K \times A$ con K afín ([RdAF, Proposición 4.8]).

$\square$

Presentamos ahora sin demostración el resultado que refiere al problema de reconocimiento de una categoría de representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana.

Teorema 3.3.17. *Sea* $(\mathcal{C}, \omega_{gr})$ *una categoría* $\mathcal{C}$ *enriquecida sobre* $\mathrm{Sch}\,\Bbbk$ *junto con un functor olvido fielmente plano* $\omega_{gr} : \mathcal{C} \to \mathrm{HVB}_{gr}(A)$ *tal que:*

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *es un fibrado vectorial homogéneo sobre* A.

2. *Para cualquier par* $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\omega_{gr}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\big) = \mathrm{Hom}_{\omega_{gr}(\mathcal{C})}(\omega_{gr}(X), \omega_{gr}(Y)) \subset \mathrm{Hom}_{gr}(\omega_{gr}(X), \omega_{gr}(Y))$$

   es un subfibrado vectorial.

3. *La categoría* $\mathcal{C}_0$ *con objetos* $Ob(\mathcal{C}_0) = Obj(\mathcal{C})$ *y morfismos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_0 = \omega_{gr}^{-1}(\omega_{gr}(X), \omega_{gr}(Y))$$

   es abeliana, monoidal y rígida.

4. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}_0} \cong \Bbbk$.

5. *La restricción del functor olvido a* $\mathcal{C}_0$ *es un functor monoidal.*

6. *El functor olvido continúa siendo fielmente pleno luego de restringirlo a la fibra sobre* $0 \in A$. *Esto es, el functor* $\hat{\omega} : \mathcal{C}_0 \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ *tal que* $\hat{\omega}(X) = \big(\omega_0(X)\big)_0$ *y* $\hat{\omega}(f : X \to X') = f \restriction_{\omega_0(X))_0} : \big(\omega_0(X)\big) \to \big(\omega_0(x')\big)_0$ *es un functor fielmente plano, abeliano, y monoidal.*

Entonces existe $\mathcal{S}$ *una extensión afín de una variedad abeliana tal que su categoría de representaciones es equivalente a* $\mathcal{C}$, *es decir, que existe* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ *una equivalencia de categorías que conmuta con los functores olvido respectivos a* $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$ *y que su restricción a* $\mathcal{C}_0$ *es monoidal.*

Demostración. Este resultado y su demostración se encuentran en [RdAF, Teorema 5.1] $\square$

Para el caso de la teoría de representaciones de esquemas en grupos afines podemos considerar el functor $Id : Vec_{\Bbbk} \to Vec_{\Bbbk}$. Tenemos entonces que $\mathrm{Aut}^{\otimes}(Id)$ es un esquema en grupos afín y resulta ser el esquema en grupos trivial. Podemos hacer lo mismo en el caso de las representaciones de extensiones afines de una variedad abeliana A y preguntarnos cuál es el objeto de nuestra categoría que verifica que su categoría de representaciones es equivalente $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$. En [RdAF, Ejemplo 3.73] dan una construcción alternativa a la extensión universal de una variedad abeliana, definida por Brion en [6] y [7], y prueban que ésta es la solución a la pregunta.

Ejemplo 6. Dado una fibrado vectorial homogéneo $E \to A$ tenemos la extensión afín $Aut_{gr} : 1 \to \mathrm{Aut}_0(E) \to \mathrm{Aut}_{gr}(E) \xrightarrow{d_E} A \to 0$. Utilizando [RdAF, Teorema 2.42] podemos tomar su parte antiafín que es la extensión afín

$$Aut_{gr}(E)_{ant} : 1 \to \mathrm{Aut}_0(E) \cap \mathrm{Aut}_{gr}(E)_{ant} \to \mathrm{Aut}_{gr}(E)_{ant} \xrightarrow{d} A \to 0$$

Luego podemos tomar el sistema filtrado afín y fielmente plano $Aut_{gr}(E)_{ant}$, con $E \in \mathrm{HVB}_{gr}(A)$ y $E \leq E'$ si y sólo si $E \cong E' \oplus F$ para algún $F \in HVB_{gr}(A)$. Tomando el límite obtenemos una extensión afín $\mathcal{G}_A$ y una serie de morfismos de extensiones afines $\varkappa_E : \mathcal{G}_A \to Aut_{gr}(E)_{ant}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_A : \arrow[d, "\varkappa_E"] & 1 \arrow[r] & H_A \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_E|_{H_A}"] & G_A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\kappa_E"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
Aut_{gr}(E)_{ant} : & 1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}_0(E) \cap Aut_{gr}(E)_{ant} \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{gr}(E)_{ant} \arrow[r, "d_E"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

A la extensión afín $\mathcal{G}_A$ la llamamos extensión universal de la variedad abeliana A. Veamos ahora que $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_A) \cong \mathrm{HVB}_{gr}(A)$, y en particular por el Teorema de Reconstrucción 3.3.15, que $\mathcal{G}_A \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}(Id)$. Además, esto prueba que la construcción de la extensión universal dada en [RdAF] coincide con la de Brion dado que sus categorías de representaciones coinciden (ver [7, Teorema 2.9]).

Dado un fibrado vectorial homogéneo E, el mapa inducido por $\varkappa_E : \mathcal{G}_A \to Aut_{gr}(E)_{ant} \subset Aut_{gr}(E)$ es una representación de $\mathcal{G}_A$. Veamos que toda representación de $\mathcal{G}_A$ en E es isomorfa a esta. Consideremos $\varrho : \mathcal{G}_A \to Aut_{gr}(E)$ una representación, esta queda determinada por la acción de la parte afín de $\mathcal{G}_A$ en la fibra del neutro de E (Proposición 3.4.1). Como H_A es antiafín, la única acción lineal posible de H_A en E_0 es la trivial, por lo tanto la representación debe ser isomorfa a la inducida por $\varkappa_E$.

Finalmente queremos ver que dados $E, E' \in HVB_{gr}(A)$ resulta que ${}^{\mathcal{G}_A}Hom_{gr}(E, E') \cong Hom_{gr}(E, E')$. Si consideramos la acción de $\mathcal{G}_A$ en $Hom_{gr}(E, E')$ tenemos que $Hom_{gr}(E, E')_a = Hom_0(E, E') \otimes \Bbbk(a)$ es estable por $(\mathcal{G}_A)_{\Bbbk(a)}$. Pero este esquema en grupos es antiafín y $Hom_0(E, E') \otimes \Bbbk(a)$ es un esquema afín sobre $\Bbbk(a)$, por lo tanto la acción es trivial. Tenemos entonces que $Hom_{\mathcal{G}_A}(E, E') \cong Hom_{gr}(E, E')$.

3.4. Alternativa al problema de reconstrucción

Para terminar el capítulo veremos que la construcción expuesta para dar respuesta al problema de reconstrucción podría presentarse sin utilizar directamente la categoría de fibrados vectoriales con morfismos graduados $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$ y restringiéndonos a $\mathrm{HVB}_0(A)$ que tiene la propiedad de ser una categoría abeliana.

En primer lugar tenemos el siguiente resultado que nos muestra que una representación de $\mathcal{S}$ sobre un fibrado E queda determinada por la restricción a una representación de H sobre E_0.

Proposición 3.4.1. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín sobre una variedad abeliana y $E, E' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ dos representaciones de $\mathcal{S}$. Llamamos E_0 y E'_0 a las representaciones de H en la fibra del neutro inducidas por E y E'. Tenemos entonces que E y E' son isomorfas como $\mathcal{S}$-módulos si y solamente si E_0 y E'_0 lo son como H-módulos.*

Demostración. El enunciado y la demostración de este resultado corresponden a [RdAF, Corolario 3.44]. La implicación resulta directamente de que la estructura de H-módulos en E_0 y E'_0 provienen de la restricción de la acción en E y E' respectivamente. Para el recíproco, dado un isomorfismo $f : E_0 \to E'_0$, podemos definir el mapa $G \times E_0 \to E' = G \times^H E'_0$ dado por $(g, v) \to [g, f(v)]$. Esto induce un morfismo $\hat{f} : E = G \times^H E_0 \to E'$ que es un isomorfismo. □

El resultado anterior nos da indicios que $\mathrm{Rep}_0(S)$, junto con el functor olvido a $\mathrm{HVB}_0(A)$, podrían ser suficientes para reconstruir nuestra extensión afín $\mathcal{S}$. Antes de avanzar en esto veremos como la categoría HVB_0 admite sumas directas y es una categoría abeliana.

Definición 3.4.2. Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es abeliana si verifica las siguientes propiedades:

1. La categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto cero.
2. Todo par de objetos de C tiene un producto y un co-producto.
3. Todo morfismo de $\mathcal{C}$ tiene núcleo y co-núcleo.
4. Todo monomorfismo de $\mathcal{C}$ es un núcleo y todo epimorfismo de $\mathcal{C}$ es un co-núcleo.

Ver, por ejemplo, [5, Capítulo 1] para más detalles.

Observación 3.4.3. La equivalencia del Teorema 3.3.7 nos dice que la categoría $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ es abeliana, monoidal y rígida. Las estructuras de suma directa, producto tensorial y espacio dual son las naturales como fibrados vectoriales.

Para el caso de la suma directa, sea $V = V_1 \oplus V_2$ un H-módulo, y $G \times^H V$, $G \times^H V_1$ y $G \times^H V_2$ son las respectivas representaciones inducidas de $\mathcal{S}$. Luego el mapa $f : G \times V_1 \times V_2 \to G \times^H V_1 \oplus G \times^H V_2$ del siguiente diagrama induce un isomorfismo de H-módulos entre $G \times V$ y $G \times^H V_1 \oplus G \times^H V_2$.

$$\begin{tikzcd}
G \times V_1 \times V_2 \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "q_2 \circ p_{13}"] \arrow[ddr, bend right, "q_1 \circ p_{12}"'] & & \\
& G \times^H V_1 \oplus G \times^H V_2 \arrow[r] \arrow[d] & G \times^H V_2 \arrow[d, "\pi_{V_2}"] \\
& G \times^H V_1 \arrow[r, "\pi_{V_1}"'] & A
\end{tikzcd}$$

Observación 3.4.4. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ una extensión afín sobre una variedad abeliana A y T un $\Bbbk$-esquema. No necesariamente todos los elementos de $A(T)$ tienen una preimagen en $G(T)$ pero sí es cierto que todo $g \in G(T)$ es preimagen por $q(T)$ para algún $A(T)$ (recordar Observación 2.3.2). Tenemos entonces que $G(T) = \bigcup_{a \in A(T)} q^{-1}(T)(a)$. Además como $H(T)$ es el núcleo de $q(T)$, si consideramos $g_a \in q^{-1}(T)(a)$, tenemos que

$$G(T) = \bigcup_{a \in q(T)(G(T))} H(T) g_a.$$

Definamos ahora el functor de esquemas en grupos $\mathcal{MI}$ con el que podemos emular la prueba de reconstrucción de forma similar a usar $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega^{\mathcal{S}})$ para la versión ya dada.

Definición 3.4.5. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \xrightarrow{q} A \to 0$ una extensión afín sobre una variedad abeliana A y T un $\Bbbk$-esquema. Definimos el functor $\omega_{\mathcal{S},0,T} : \mathrm{Rep}_0(\mathcal{S}) \to \mathrm{HVB}_0(A)$ como el functor $\omega_{\mathcal{S},0}$ seguido del pull-back por el esquema T.

Dado $a \in A(T)$ notamos

$$MI_a(T) = \{F_a : \omega_{\mathcal{S},0,T} \to t_a^* \omega_{\mathcal{S},0,T} / \ F \text{ es un isomorfismo monoidal}\}$$

y con esto definimos

$$\mathcal{MI}(T) = \cup_{a \in A(T)} MI_a(T).$$

La operación de grupo $m_{\mathcal{MI}(T)} : \mathcal{MI}(T) \times \mathcal{MI}(T) \to \mathcal{MI}(T)$ se define de la siguiente forma. Sean $F_a : \omega_{\mathcal{S},0,T} \to t_a^* \omega_{\mathcal{S},0,T}$ y $F'_b : \omega_{\mathcal{S},0,T} \to t_a^* \omega_{\mathcal{S},0,T}$ en $\mathcal{MI}(T)$. Entonces F_a

consiste en una familia de morfismos $(\alpha_E)_{E\in \mathrm{HVB}_0(A)}$ tal que para cualquier par $E, E' \in \mathrm{HVB}_0(A)$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{HVB}_0(A)}(E, E')$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E_T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_E"'] & E'_T \arrow[d, "\alpha_{E'}"] \\
t_a^* E_T \arrow[r, "t_a^* f"] & t_a^* E'_T
\end{tikzcd}$$

Respectivamente F'_b se conforma por una familia $(\beta_E)_{E\in \mathrm{HVB}_0(A)}$ que cumple con la propiedad equivalente para t_b^*. Definimos entonces $m_{\mathcal{MI}(T)}(F_a, F'_b)$ como la familia $(\gamma_E)_{E\in \mathrm{HVB}_0(A)}$ con $\gamma_E = (t_a^*\beta_E) \circ \alpha_E : E_T \to t_{a+b}^* E_T$. Este producto da una estructura de grupo, donde el neutro es la transformación natural $Id : \omega_{\mathcal{S},0,T} \to t_e^* \omega_{\mathcal{S},0,T}$.

Luego si $f : T' \to T$ es un morfismo de esquemas en grupos, definimos $\mathcal{MI}(f)$ a partir del morfismo de restricción asociado por el pull-back $f^* : A_{T'} \to A_T$:

$$\begin{tikzcd}
\omega_{\mathcal{S},0,T} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \omega_{\mathcal{S},0,T'} \arrow[d, Rightarrow] \\
t_a^*(\omega_{\mathcal{S},0,T}) \arrow[r, Rightarrow] & t_a^*(\omega_{\mathcal{S},0,T'})
\end{tikzcd}$$

Luego podemos emular la prueba del Teorema de Reconstrucción (ver Teorema 3.3.15) a partir del functor $\mathcal{MI}$, emulando lo hecho con la construcción de la Definición 3.3.10.

Capítulo 4

Caracterización del grupo afín a partir de las representaciones

En este capítulo se estudian las representaciones semisimples, diagonalizables y unipotentes de extensiones afines de variedades abelianas. Para esto se presenta en cada caso las definiciones y principales resultados de la teoría clásica de representaciones de esquemas en grupos afines de tipo finito, basándonos en [MilAG], para luego presentarlos en el contexto de las extensiones afines de variedades abelianas, desarrollado en [RdAF]. En esta sección los esquemas en grupos afines serán de tipo finito y las extensiones afines de variedades abelianas serán extensiones de tipo finito.

4.1. Representaciones semisimples

Un aspecto relevante en la teoría de representaciones es estudiar cuáles son aquellos objetos cuyas representaciones se presentan de forma más básica posible. En primer lugar, decimos que una representación es simple si no tiene subrepresentaciones propias, y que una representación es semisimple si puede descomponerse como suma directa de representaciones semisimples.

En esta sección nos interesaremos en conocer para cuáles extensiones afines de variedades abelianas sucede que todas sus representaciones son semisimples. Para esto, primero describiremos algunos aspectos de la teoría clásica de representaciones de esquemas en grupos afines de tipo finito, para lo que seguiremos [MilAG]. A continuación, basándonos en [RdAF], analizaremos a qué corresponde la suma directa de representaciones para las extensiones afines de variedades abelianas, donde no resulta posible extender la suma de forma que cumpla la propiedad universal de la suma directa, pero sí podemos definir la suma de forma de dar una definición de semisimplicidad en este contexto. Luego, para finalizar la sección, describimos un resultado que vincula la semisimplicidad de la categoría de representaciones de $\mathcal{S}$ con la semisimplicidad de la categoría de la teoría de representaciones de su parte afín.

Definición 4.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana (ver 3.4.2). Decimos que un objeto X es simple si sus únicos sub-objetos son 0 y X. Por otro lado, si un objeto X es suma directa de finitos objetos simples entonces diremos que es semisimple. Diremos que la categoría es semisimple si todo objeto es semisimple.

Definición 4.1.2. Sea H un esquema en grupos afín de tipo finito.

1. Un esquema en grupos afín H es unipotente si toda representación no trivial tiene un vector fijo.

2. Llamamos radical de H, y lo notamos $R(H)$, al mayor subgrupo normal, soluble y conexo de H, y radical unipotente al mayor subgrupo normal, unipotente y conexo de H, al que notaremos $R_u(H)$.

3. Decimos que un esquema en grupos afín H es reductivo si es conexo y su radical unipotente es trivial, es decir, si $R_u(H) = e$. Llamamos linealmente reductivo a un esquema en grupos afín H si todas sus representaciones finito dimensionales son semisimples.

Observación 4.1.3. Para un esquema en grupos de tipo finito, afín y conexo son equivalentes ser reductivo, que el radical de H sea un toro y que H admita una representación semisimple con núcleo finito ([MilAG, Proposición 21.60]).

Ejemplo 7. Algunos ejemplos de esquemas en grupos reductivos son $\mathbb{G}_m^r$, GL_n, SL_n, SO_n y Sp_{2n}.

Observación 4.1.4. Si el cuerpo $\Bbbk$ no es perfecto entonces las definiciones de semisimplicidad y reductividad de un esquema en grupos requieren que sea liso y que el radical (o el radical unipotente respectivamente) sea trivial para $\overline{\Bbbk}$ en lugar de serlo para $\Bbbk$. La definición que damos para el caso de cuerpos perfectos resulta del hecho de que la formación del radical conmuta con extensiones de cuerpos algebraicas y separables ([MilAG, Proposición 19.2]). Para leer acerca de la estructura y teoría de representaciones de esquemas en grupos reductivos sobre cuerpos no perfectos el lector puede dirigirse a [10].

Observación 4.1.5. Para un esquema en grupos afín, conexo y de tipo finito sobre un cuerpo de característica 0 son equivalentes que H sea reductivo, que toda representación de dimensión finita sea semisimple y que exista alguna representación fiel semisimple ([MilAG, Teorema 22.42]). En particular, se cumple que un esquema en grupos afín de tipo finito sobre un cuerpo de característica 0 es linealmente reductivo si y sólo si G^0 es reductivo ([MilAG, Corolario 22.43]).

Observación 4.1.6. En su problema número 14, Hilbert se plantea si el anillo de polinomios invariantes por una representación lineal de un grupo algebraico afín es finitamente generado sobre el cuerpo de base. En [19], Hilbert prueba que esto es cierto para el caso de grupos linealmente reductivos (para una prueba de este resultado dirigirse a [MilAG, Teorema 12.57]). En 1958, Nagata dio un contraejemplo al caso general utilizando representaciones de $\mathbb{G}_a^{13}$ en [26]. En 2008, Totara da contraejemplos para cualquier cuerpo base en [34] (incluyendo por primera vez contraejemplos con cuerpos finitos).

Queremos ahora ver cuándo las representaciones de una extensión afín de una variedad abeliana se descompone en representaciones simples. Si $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ es una extensión afín de una variedad abeliana, en por el Teorema 3.3.7 tenemos una equivalencia entre la categoría de representaciones de dimensión finita de H y la categoría de representaciones de $\mathcal{S}$ que dejan fija la base. Este resultado será el nexo para conectar nuestro problema con la teoría clásica de representaciones.

Tenemos entonces que la categoría $Rep_0(\mathcal{S})$ será semisimple siempre y cuando la categoría de representaciones del grupo algebraico afín $\mathrm{Rep}_{gr}(H)$ también lo sea. Veamos ahora qué sucede con el caso de las representaciones de extensiones afines sobre fibrados homogéneos en general.

A partir del Teorema 3.3.7 observamos que $\mathrm{Rep}_0(E)$ es una categoría abeliana, monoidal y rígida, de hecho, esto se basa en el hecho de que $\mathrm{HVB}_0(A)$ lo es. Por otro lado, estas estructuras no se pueden extender a $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$, que es una extensión amplia de $\mathrm{HVB}_0(A)$, salvo para el caso de que los morfismos sean del mismo grado.

Lema 4.1.7. *Sean $E, E', F, F' \in \mathrm{HVB}_{gr}(A)$ y $(f, a) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E, F)(T)$, $(f', a) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E', F')(T)$ morfismos graduados. Los siguientes pares son morfismos graduados en $\mathrm{HVB}_{gr}(A)$:*

1. *$(f \hat{\oplus} f', a) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E \oplus E', F \oplus F')(T)$, con $\big(f \hat{\oplus} f'\big)(e + e') = f(e) + f'(e')$.*

2. *$(f \hat{\otimes} f', a) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E \otimes E', F \otimes F')(T)$, con $\big(f \hat{\otimes} f'\big)(e \otimes e') = f(e) \otimes f'(e')$.*

3. *$(f^\vee, a) \in \mathrm{Hom}_{gr}((E')^\vee, E^\vee)(T)$.*

Demostración. Para construir el morfismo correspondiente a la suma directa simplemente utilizamos la propiedad universal de la suma directa en la categoría de fibrados vectoriales sobre esquemas y verifica las propiedades deseadas.

$$\begin{tikzcd}
(E \oplus E')_T \cong E_T \oplus E'_T \arrow[dr, dashed, "f \oplus f'"] \arrow[drr, bend left, "f' \circ p_2"] \arrow[ddr, bend right, "f \circ p_1"'] & & \\
& F_T \oplus F'_T \arrow[r] \arrow[d] & F'_T \arrow[d, "\pi_T"] \\
& F_T \arrow[r, "\pi_T"'] & A_T
\end{tikzcd}$$

El resto de los morfismos se construyen de la misma forma utilizando las propiedades del producto tensorial y el espacio dual. □

Observación 4.1.8. Dados $E, E', F, F' \in \mathrm{HVB}_{gr}(A)$ y $(f, a) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E, F)(T)$, $(f', b) \in \mathrm{Hom}_{gr}(E', F')(T)$ morfismos graduados con $a \neq b$, no podemos definir una suma $f \hat{\oplus} f'$ en $\mathrm{Hom}_{gr}(E \oplus E', F \oplus F')$ como en el lema anterior.

Definición 4.1.9. Dadas dos representaciones $(E, \rho), (E', \rho') \in Rep(\mathcal{S})$, definimos la representación $(E \bigoplus E', \rho \hat{\oplus} \rho')$ su suma de forma que dado un $\Bbbk$-esquema T, $g \in G(T)$ y $a = q(g) \in A(T)$, entonces $(\rho \hat{\oplus} \rho')(T)(g) = \big(\rho(T)(g) \hat{\oplus} \rho'(T)(g), a\big) \in \mathrm{Aut}_{gr}(E \bigoplus E')$. Como $q = d \circ \rho$ y $q = d \circ \rho'$ por ser ρ y ρ' representaciones, tenemos que la suma entre $(\rho(T)(g), a)$ y $(\rho'(T)(g), a)$ está bien definida (Lema 4.1.7).

Definición 4.1.10. Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Decimos que $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ es simple si no tiene otras subrepresentaciones además de si misma y la representación trivial. Diremos que $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ es semisimple si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ y $\rho = \hat{\oplus}_{i=1}^n \rho_i$, con (E_i, ρ_i) representaciones simples $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Proposición 4.1.11. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Entonces H es linealmente reductivo si y solamente si todo objeto de $Rep(\mathcal{S})$ es semisimple.*

Demostración. Para el recíproco, tenemos que $\mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ es una subcategoría de $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ y allí la suma que definimos resulta en la suma directa usual. Luego $\mathrm{Rep}_{fin}(H) \cong \mathrm{Rep}_0(\mathcal{S})$ es semisimple y por lo tanto H es linealmente reductivo.

En el otro sentido, consideremos (E_0, ρ_0) la representación inducida de H en la fibra del neutro. Como H es linealmente reductivo, (E_0, ρ_0) es semisimple como H-módulo, y por lo tanto $E_0 = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ con V_i H-módulos simples. Luego $F_i = G \times^H V_i$ son subfibrados de E para todo $i = 1, ..., n$, y ρ se restringe en cada uno de ellos. Luego podemos definir $(E, \bigoplus_{i=1}^n \rho_i)$, que es semisimple como representación de $\mathcal{S}$, y es isomorfa a (E, ρ) porque sus restricciones a la fibra del neutro lo son (Proposición 3.4.1). □

4.2. Grupos diagonalizables

En esta sección veremos la definición y caracterización de los esquemas en grupos diagonalizables para luego observarlos en el contexto de la teoría de representaciones de extensiones afines de variedades abelianas. Para una lectura en mayor detalle acerca de los esquemas en grupos diagonalizables el lector puede referirse a [MilAG, Capítulo 12].

Dado un esquema en grupos afín H, un caracter de H es un morfismo de esquemas en grupos $\chi : H \to \mathbb{G}_m$. Llamaremos elemento tipo-grupo a un elemento $a \in \mathcal{O}_H(H)$ si es invertible y verifica que $\Delta(a) = a \otimes a$. Existe una correspondencia uno a uno entre los caracteres de un esquema en grupos afín H y los elementos tipo-grupo de $\mathcal{O}_H(H)$.

Dado un grupo abstracto conmutativo y finitamente generado, podemos dotar al álgebra de grupo $\Bbbk[M]$ de una estructura de álgebra de Hopf, definiendo $\Delta(m) = m \otimes m$, $\epsilon(m) = e$ y $S(m) = m^{-1}$, para todo m elemento de la base de M. Luego podemos definir el functor $D(M)$ que a cada $\Bbbk$-álgebra R le corresponde $Hom(M, R^\times)$, y es representado por el esquema en grupos $\mathrm{Spm}(\Bbbk[M])$. Además, la elección de la base de M determina un isomorfismo con un producto finito de copias de $\mathbb{G}_m$ y μ_n ([MilAG, Proposición 12.3]).

Definición 4.2.1. Decimos que un esquema en grupos afín H es diagonalizable si los elementos tipo-grupo de $\mathcal{O}_H(H)$ lo generan como $\Bbbk$-espacio vectorial, o equivalentemente, si H es isomorfo a $D(M)$ para algún grupo conmutativo finitamente generado M.

Teorema 4.2.2. *Dado H un esquema en grupos afín, son equivalentes:*

1. *H es diagonalizable;*
2. *toda representación de H es diagonalizable, es decir, toda representación de H es suma de subrepresentaciones unidimensionales;*
3. *toda representación de H de dimensión finita es diagonalizable;*
4. *para toda representación (V, r) de H, $V = \bigoplus_{\chi \in X(H)} V_\chi$, donde V_χ es el subespacio propio de caracter χ.*

Demostración. Este resultado sigue [MilAG, Teorema 12.12]. Veamos la prueba de (1) $\Leftrightarrow$ (2), ya que (2) $\Leftrightarrow$ (3) resulta de que toda representación es unión de subrepresentaciones de dimensión finita, y (2) $\Leftrightarrow$ (4) es trivial.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sea (V, r) una representación de H un esquema en grupos diagonalizable y $\rho : V \to V \otimes \mathcal{O}(H)$ su correspondiente co-módulo. Como los elementos tipo-grupo de $\mathcal{O}(H)$ lo generan como $\Bbbk$-espacio vectorial, existe una base $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de elementos de este tipo. Dado $v \in V$, tenemos que $\rho(v) = \sum_{i \in I} u_i \otimes e_i$, con $u_i \in V$. Luego como

$\rho\otimes Id = Id\otimes\Delta$, tenemos que $\sum_{i\in I}\rho(u_i)\otimes e_i = \sum_{i\in I} u_i\otimes e_i\otimes e_i$, por lo que $v = \sum_{i\in I} u_i$. Además obtenemos que $\rho(u_i) = u_i \otimes e_i \in \langle u_i\rangle \otimes \mathcal{O}(H)$, por lo tanto la representación r es la suma de subrepresentaciones unidimensionales.

(2) $\Rightarrow$ (1): Si toda representación de H es diagonalizable entonces en particular también lo es la representación regular de H, que es la representación inducida en $\mathcal{O}_H(H)$ por la multiplicación de H a izquierda. Tenemos entonces que $\mathcal{O}_H(H)$ es generado por un conjunto $\{f_i\}_{i\in I}$ de vectores propios. Dado $i \in I$, consideremos χ_i su caracter correspondiente, y $h, g \in H(R)$ para R alguna $\Bbbk$-álgebra. Luego tenemos que

$$f_i(hg) = g \cdot f_i(h) = f_i(h)\chi_i(g),$$

y en particular, si $h = e$, obtenemos que $f_i(g) = f_i(e)\chi_i(g)$, es decir, f_i es un múltiplo del caracter χ_i. Por lo tanto resulta que $\mathcal{O}_H(H)$ es generado por sus caracteres y H es diagonalizable. $\square$

Ejemplo 8. Los subesquemas en grupos de D_n, el grupo de matrices diagonales, son grupos diagonalizables.

A partir de la caracterización de los grupos diagonalizables a través de sus representaciones podemos ver qué sucede en el caso de las representaciones de extensiones afines para el caso cuando el esquema afín es un grupo diagonalizable.

Proposición 4.2.3. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Entonces H es diagonalizable si y solamente si toda representación $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ se descompone como suma de representaciones sobre fibrados vectoriales de dimensión 1.*

Demostración. Este resultado es un corolario de la prueba de la Proposición 4.1.11. Resta observar que la dimensión es 1 para cada uno de los subespacios de la fibra en el neutro y de los subfibrados que componen la suma. $\square$

4.3. Grupos unipotentes

En esta sección seguiremos el mismo esquema en que en las anteriores de este capítulo. Primero veremos brevemente algún aspecto de los esquemas en grupos afines unipotentes y sus representaciones siguiendo [MilAG, Capítulo 14], y luego veremos cómo extender su caracterización al caso de las representaciones de extensiones afines sobre variedades abelianas.

Recordamos que un esquema en grupos afín H es unipotente si toda representación no trivial tiene un vector fijo.

Definición 4.3.1. Sea H un esquema en grupos afín. Decimos que una representación $(V, r) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$ es unipotente si existe una base de V tal que $r(H) \subset \mathbb{U}_n$. Esto es equivalente a que exista una bandera de V, $0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$, que sea estable por la acción de H y que actúe trivialmente en los cocientes V_{k+1}/V_k.

Proposición 4.3.2. *Sea H un esquema en grupos afín. H es unipotente si y sólo si toda representación de dimensión finita de H es unipotente.*

Demostración. La siguiente demostración es la que se encuentra en [MilAG, Proposición 14.3].

($\Rightarrow$) Sea $(V, r) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$ y $0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$ una serie maximal de H-submódulos de V. Luego al ser la serie maximal tenemos que V_{i+1}/V_i es simple, y como H es unipotente actúa trivialmente allí. Entonces (V, r) es unipotente.

($\Leftarrow$) Sea $(V, r) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$ unipotente. Entonces existe una bandera de V, $0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$, estable por la acción de H y con H actuando trivialmente en V_{k+1}/V_k, y por lo tanto, actuando trivialmente en $V_1 \neq 0$. Entonces toda representación de H tiene vectores fijos y H es unipotente. □

Definición 4.3.3. Definimos el grupo unipotente de dimensión n, y lo notamos $\mathbb{U}_n$, como el subgrupo de matrices de GL_n de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Observación 4.3.4. Todo esquema en grupos unipotente es isomorfo a algún subgrupo de $\mathbb{U}_n$. Esto resulta de aplicar la Proposición 4.3.2 a la representación fiel de H.

Proposición 4.3.5. *Sea $\mathcal{S} : 1 \to H \to G \to A \to 0$ una extensión afín de una variedad abeliana. Entonces H es unipotente si y solamente si para toda $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ existe una serie de subfibrados $A \subset E_1 \subset ... \subset E_n = E$ estables por la acción de G tal que E_{k+1}/E_k es un fibrado trivial para todo k.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $(E, \rho) \in \mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ y $(V, \rho_0) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$ la representación inducida en la fibra. Como H es unipotente, existe una bandera de V, $0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$, estable por la acción de H y con H actuando trivialmente en V_{k+1}/V_k. Esto induce una serie de subfibrados $A \subset E_1 \subset ... \subset E_n = E$ estables por la acción de G, con

$E_k = G \times^H V_k$. Además tenemos que $E_{k+1}/E_k = G \times^H V_{k+1}/V_k \cong G/H \times V_{k+1}/V_k$, ya que la acción de H en V_{k+1}/V_k es trivial.

($\Leftrightarrow$) Sea $(V, r) \in \mathrm{Rep}_{\mathit{fin}}(H)$. Luego la representación inducida en $E = G \times^H V$ tiene una serie de subfibrados $A \subset E_1 \subset ... \subset E_n = E$ estables por la acción de G tal que E_{n+1}/E_n es un fibrado trivial para todo n, que cuando los restringimos a la fibra del neutro V obtenemos el resultado buscado. $\square$

Apéndice A

Esquemas

En la definiciones y construcciones básicas de esquemas nos basaremos en [13, §I] y [35].

Definición A.0.1. Sea R una $\Bbbk$–álgebra sobre un cuerpo $\Bbbk$. Definimos el conjunto $Spec(R)$ como el conjunto de los ideales primos de R dotado de la topología de Zariski, es decir, que los conjuntos cerrados son aquellos de la forma $V(I) = \{P \in Spec(R)/I \subset P\}$ para algún ideal I en R.

Dado $f \in R$ definimos $U_f = \{P \in Spec(R) : f \notin P\}$. Esta familia de conjuntos es una base de abiertos de la topología. Además verifican que dados $f, g \in R$ entonces $U_f \cap U_g = U_{fg}$, por lo que la asignación $\mathcal{O}_{Spec(R)}(U_f) = R_f$ se puede extender para producir un haz de $\Bbbk$-álgebras.

Llamaremos $Spec(R)$ al espacio anillado $(Spec(R), \mathcal{O}_{Spec(R)})$ (esto es un par con un espacio topológico y un haz de anillos). Diremos que un tal espacio anillado es un esquema afín.

Definición A.0.2. Un esquema sobre un cuerpo $\Bbbk$ es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ (ver ([35, Def. 4.3.6]) tal que puede cubrirse con esquemas afines. Esto es que existe un cubrimiento por abiertos U_i de X tal que existen $\Bbbk$-álgebras R_i y homeomorfismos $U_i \cong Spec(R_i)$ con $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{Spec(R_i)}$.

Definición A.0.3. Dado un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ diremos que X es el espacio subyacente y $\mathcal{O}_X$ el haz estructural o haz de funciones regulares. La $\Bbbk$-álgebra $\mathcal{O}_X(X)$ es el álgebra de funciones regulares de X o las secciones globales del haz estructural (ver [35, § II]).

Definición A.0.4. Dados dos $\Bbbk$-esquemas $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$, un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados $(\varphi, \varphi^{\#}) : X \to Y$. Esto es un par $(\varphi, \varphi^{\#})$

donde $\varphi : X \to Y$ es una función continua entre los espacios topológicos subyacentes y $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*(\mathcal{O}_X)$ un morfismo de haces de $\Bbbk$-álgebras sobre Y tal que toda vez que $\varphi(x) = y$, el mapa inducido en los anillos locales $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{Y,y} \to \varphi_*\mathcal{O}_{X,x}$ envía el ideal maximal del primero en el ideal maximal del segundo. Cuando no haya confusión posible, diremos que $\varphi : X \to Y$ es un morfismo de esquemas.

Observación A.0.5. Si $(m, m^{\#}) : R \to S$ y $(n, n^{\#}) : S \to T$ son morfismos de esquemas entonces la composición está dada por $\big(n \circ m, (n \circ m)^{\#}\big) : R \to T$, con $(n \circ m)^{\#} = n_*(m^{\#}) \circ n^{\#} : \mathcal{O}_T \to (n \circ m)_*\mathcal{O}_R$. En particular, si consideramos las secciones globales tenemos que $m^{\#}(S) : \mathcal{O}_S(S) \to (m_*\mathcal{O}_R)(S) = \mathcal{O}_R(R)$ y $n^{\#}(T) : \mathcal{O}_T(T) \to (n_*\mathcal{O}_S)(T) = \mathcal{O}_S(S)$, y nos queda que $(n \circ m)^{\#}(T) = n_*(m^{\#})(S) \circ n^{\#}(T) : \mathcal{O}_T(T) \to \mathcal{O}_R(R)$.

Definición A.0.6. Diremos que un $\Bbbk$-esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es separado sobre $\Bbbk$ cuando el morfismo diagonal $\Delta_X : X \to X \times_{\Bbbk} X$, inducido por los mapas identidad $id : X \to X$ en cada coordenada, es una inmersión cerrada (ver A.0.8).

A partir de ahora todos los esquemas que mencionemos asumiremos que son separados.

Ejemplo 9. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\Bbbk)$ puede dotarse de una estructura de esquema (ver [35, 4.5.7]). $\mathbb{P}^n(\Bbbk)$ no es un espacio afín a menos que $n = 0$.

Proposición A.0.7. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos esquemas y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Consideremos una familia de morfismos de esquemas $(f_i, f_i^{\#}) : U_i \to Y$ tal que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to Y$ (como morfismos de esquemas). Entonces existe un morfismo de esquemas $(f, f^{\#}) : X \to Y$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Tenemos que definir el par $(f, f^{\#})$. Para la función continua entre los espacios topológicos $f : X \to Y$ es sencillo. Veremos cómo definir $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$.

Sea $U \subset Y$ y $s \in \mathcal{O}_Y(U)$. Entonces $f^{-1}(U) = \cup_i (f^{-1}(U) \cap U_i)$. Definimos $f^{\#}(s) \in f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ pegando $f_i^{\#}(s) \in (f_i)_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f_i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U) \cap U_i)$ en el haz $\mathcal{O}_X$, para producir una sección de $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ (ver [35, Definición 2.2.6]). Efectivamente tenemos que

$$res_{f^{-1}(U) \cap U_i, f^{-1}(U) \cap U_i \cap U_j}\big(f_i^{\#}(s)\big) = res_{f^{-1}(U) \cap U_j, f^{-1}(U) \cap U_i \cap U_j}\big(f_j^{\#}(s)\big),$$

por lo que esto define una única sección en $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. □

Recordamos ahora algunas definiciones de propiedades de esquemas y morfismos de esquemas.

Definición A.0.8. Sean X e Y dos $\Bbbk$-esquemas y $(\varphi, \varphi^{\#}) : X \to Y$ un morfismo de esquemas.

- X es de tipo finito si $\mathcal{O}_X(U)$ es una álgebra de tipo finito sobre $\Bbbk$ para todo abierto U de X.
- X es irreducible si su espacio topológico subyacente es irreducible.
- X es reducido si para todo x en X el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es reducido. Esto es equivalente a que $\mathcal{O}(U)$ sea reducido para todo abierto $U \subset X$ (ver [33, 26.12.2]).
- X es geométricamente reducido si para todo x en X y toda extensión de cuerpos $\Bbbk'$ de $\Bbbk$, el anillo local $\mathcal{O}_{X_{\Bbbk'},x}$ es reducido (la construcción del esquema $X_{\Bbbk'}$ se encuentra a continuación de estas definiciones).
- Diremos que X es liso si el conjunto de puntos singulares es vacío (ver [MilAG, Sección A.h]).
- El esquema X es propio si para todo esquema Z la proyección $X \times Z \to Z$ es cerrada.
- Diremos que el morfismo de esquemas $(\varphi, \varphi^{\#})$ es plano si para todo punto x en X el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es plano sobre $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Si además φ es sobreyectivo, entonces diremos que $(\varphi, \varphi^{\#})$ es fielmente plano.
- El morfismo de esquemas $(\varphi, \varphi^{\#})$ es una inmersión cerrada si la imagen de φ es un conjunto cerrado de Y y el morfismo de haces $\mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X$ es sobreyectivo. En particular, en este caso la imagen esquemática de $(\varphi, \varphi^{\#})$ tiene soporte en el cerrado $\varphi(X)$.
- Decimos que el morfismo $(\varphi, \varphi^{\#})$ es casi compacto si Y tiene un cubrimiento por abiertos afines tal que sus preimágenes son casi compactas (como espacios topológicos).

Observación A.0.9. Sean X,Y y Z tres esquemas y $(\varphi, \varphi^{\#}) : X \to Z$ y $(\psi, \psi^{\#}) : Y \to Z$ dos morfismos de esquemas. Entonces existe un esquema $X \times_Z Y$ y un par de morfismos de esquemas tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Z \end{tikzcd}$$

Además si tenemos otro esquema W y morfismos de W a X e Y que cumplen esta propiedad, entonces existe un único morfismo $W \to X \times_Z Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
& X \arrow[r, "\varphi"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Podemos encontrar una prueba de la existencia de este esquema en [35, 9.1.1].

Definición A.0.10. Con las notaciones de más arriba, llamaremos $X \times_Z Y$ el producto fibrado de X e Y. En los casos que no genere confusiones omitiremos la mención a cuáles son los morfismos de X e Y en Z.

Ejemplo 10. Sean $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$ y $Z = Spec(C)$ tres esquemas afines, donde A, B y C son $\Bbbk$-álgebras, y $X \to Z$ e $Y \to Z$ morfismos de esquemas inducidos por $Spec(A) \to Spec(C)$ y $Spec(B) \to Spec(C)$ respectivamente. Entonces el producto fibrado es $Spec(A \otimes_C B)$ con los morfismos inducidos por los morfismos de álgebras evidentes $A \to A \otimes_C B$ y $B \to A \otimes_C B$.

Observación A.0.11. Supongamos ahora que tenemos un $\Bbbk$-esquema X con morfismo estructural $\pi : X \to Spec(\Bbbk)$ y una extensión de $\Bbbk$-álgebras $\Bbbk \to R$. Tenemos entonces la existencia del producto fibrado y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_{Spec(\Bbbk)} Spec(R) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_R"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\
Spec(R) \arrow[r] & Spec(\Bbbk)
\end{tikzcd}$$

Definición A.0.12. Llamaremos al esquema $X \times_{Spec(\Bbbk)} Spec(R)$ la extensión de escalares a R y lo notaremos como X_R. Podemos ver a X_R como un R-esquema, con morfismo estructural π_R.

A continuación demostraremos un lema que describe cuáles son las funciones regulares de un producto de esquemas casi compactos, y nos será de utilidad en varias demostraciones.

Lema A.0.13. *Sean X e Y esquemas casi compactos, entonces las álgebras $\mathcal{O}_X(X) \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathcal{O}_Y(Y)$ y $\mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y)$ son isomorfas. En particular, tenemos un isomorfismo canónico $\mathcal{O}_X(X) \underset{\Bbbk}{\otimes} R \cong \mathcal{O}_{X_R}(X_R)$.*

Demostración. Presentaremos la prueba desarrollada en [Bri17, Lema 2.3.3]. El caso cuando ambos esquemas son afines es sencillo. Supongamos que tenemos X afín e Y cualquiera, entonces podemos elegir un cubrimiento finito $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ de Y, luego las intersecciones $V_i \cap V_j$ son afines. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_Y(Y) \to \prod_i \mathcal{O}_Y(V_i) \xrightarrow{d_Y} \prod_{i,j} \mathcal{O}_Y(V_i \cap V_j)$$

donde $d_Y((f_i)_i) := (f_i \restriction_{V_i\cap V_j} - f_j \restriction_{V_i \cap V_j})_{i,j}$. Tensorizando con $\mathcal{O}_X(X)$ obtenemos esta otra sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathcal{O}_Y(Y) \to \prod_i \mathcal{O}_{X\times V_i}(X \times V_i) \xrightarrow{d_{X,Y}} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{X\times(V_i\cap V_j)}(X \times (V_i \cap V_j))$$

donde $d_{X,Y}$ es definida similarmente y usamos que X y los V_i son afines. Como los $X \times V_i$ forman un cubrimiento abierto de $X\times Y$, el núcleo de $d_{X,Y}$ es $\mathcal{O}(X\times Y)$, entonces tenemos probado este caso.

En el caso general tomamos un cubrimiento afín finito $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de X y utilizando el mismo procedimiento obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \underset{\Bbbk}{\otimes} \mathcal{O}_Y(Y) \to \prod_i \mathcal{O}_{U_i\times Y}(U_i \times Y) \xrightarrow{d_{X,Y}} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{(U_i\cap U_j)\times Y}((U_i \cap U_j) \times Y)$$

El núcleo de $d_{X,Y}$ nos queda $\mathcal{O}(X \times Y)$ por lo que el lema queda demostrado. □

Observación A.0.14. Sean X, X', Y e Y' esquemas y $(f, f^{\#})$ y $(g, g^{\#})$ dos morfismos de esquemas de X en X' y de Y en Y' respectivamente. Por la propiedad universal de $X \times Y$, tenemos entonces un único morfismo de esquemas $(h, h^{\#})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, "h"] & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & X' \times Y' \arrow[r, "p_{Y'}"'] \arrow[d, "p_{X'}"] & Y' \arrow[d] \\
& X' \arrow[r] & Spec(\Bbbk)
\end{tikzcd}$$

donde $h = f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$, $h(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$. Recordando la Obsevación A.0.5 tenemos que $p_{X'*}(h^{\#})(X') : p_{X'*}(\mathcal{O}_{X'\times Y'})(X') = \mathcal{O}_{X'\times Y'}(X' \times Y') \to p_{X'*}h_*(\mathcal{O}_{X\times Y})(X') = \mathcal{O}_{X\times Y}(X \times Y)$, que es el morfismo de álgebras $h^{\#}(X' \times Y') : \mathcal{O}_{X'\times Y'}(X' \times Y') \to h_*(\mathcal{O}_{X\times Y})(X' \times Y')$, y lo mismo sucede con $p_{Y'*}(h^{\#})(Y')$. El diagrama anterior entonces induce el siguiente diagrama en las álgebras de funciones globales:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X\times Y}(X\times Y) & \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[l, "p_Y^{\#}"'] & \\
\mathcal{O}_X(X) \arrow[u, "p_X^{\#}"] & \mathcal{O}_{X'\times Y'}(X'\times Y') \arrow[ul, "h^{\#}"] & \mathcal{O}_{Y'}(Y') \arrow[l, "p_{Y'}^{\#}"] \arrow[ul, "g^{\#}"'] \\
& \mathcal{O}_{X'}(X') \arrow[ul, "f^{\#}"] \arrow[u, "p_{X'}^{\#}"'] & \mathbb{k} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Luego, si tomamos $j \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ y $k \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$, tenemos que $p_{X'*}(h^{\#})(p_{X'}^{\#}(j)) = (p_{X'} \circ h)^{\#}(j) = (f \circ p_X)^{\#}(j) = f_*(p_X^{\#})(f^{\#}(j))$ y $p_{Y'*}(h^{\#})(p_{Y'}^{\#}(k)) = (p_{Y'} \circ h)^{\#}(k) = (g \circ p_Y)^{\#}(k) = g_*(p_Y^{\#})(g^{\#}(k))$. Entonces utilizando la correspondencia del Lema A.0.13, y que esta hace corresponder a $j \otimes k$ con $p_{X'}^{\#}(j)p_{Y'}^{\#}(k)$, obtenemos que $h^{\#}$ es el morfismo de álgebras inducido por $f^{\#} \otimes g^{\#} : \mathcal{O}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{Y'}(Y') \to \mathcal{O}_X(X) \otimes \mathcal{O}_Y(Y)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X'}(X') \underset{\mathbb{k}}{\otimes} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \arrow[r, "f^{\#}\otimes g^{\#}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X'}(X') \underset{\mathbb{k}}{\otimes} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{X'\times Y'}(X'\times Y') \arrow[r, "h^{\#}"'] & \mathcal{O}_{X\times Y}(X\times Y)
\end{tikzcd}$$

Bibliografía

[1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*, AddisonWesley. Reading, MA.

[2] Barsotti, I. (1955) *Structure theorems for group-varieties.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 38, 77–119.

[3] Borel, A. (2001). *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups.* American Mathematical Soc..

[4] Borel, A. (2012). *Linear algebraic groups* (Vol. 126). Springer Science & Business Media.

[5] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra: Volume 2*, Categories and Structures (Vol. 2). Cambridge University Press.

[Bri17] Brion, M. (2017). *Some structure theorems for algebraic groups.* In Proc. Symp. Pure Math (Vol. 94, pp. 53-125).

[6] Brion, M. (2020). *On the fundamental groups of commutative algebraic groups.* Annales Henri Lebesgue, 3, 1-34.

[7] Brion, M. (2020). *Homogeneous vector bundles over abelian varieties via representation theory.* Representation Theory of the American Mathematical Society, 24(3), 85-114.

[BS13] Brion, M., & Samuel, P. (2013). *Lectures on the structure of algebraic groups and geometric applications.* Springer.

[8] Chevalley, C. (1960) *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques.* J. Math. Pures Appl. (9) 39, 307–317.

[9] Chevalley, C. (2004). *Classification des groupes algébriques semi-simples: The classification of semi-simple algebraic groups* (Vol. 3). Springer.

[10] Conrad, B., Gabber, O., & Prasad, G. (2015). *Pseudo-reductive groups* (Vol. 26). Cambridge University Press.

[DM] P. Deligne & P. Milne (1982) *Tannakian categories*, in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, LNM 900, pp. 101-228. Se puede encontrar una versión con correcciones https://www.jmilne.org/math/xnotes/tc2018.pdf.

[11] Demazure, M., Gabriel, P. (1970). *Groupes algébriques (Vol. 1)*, Masson et Cie, Paris.

[12] Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., & Ostrik, V. (2016). *Tensor categories* (Vol. 205). American Mathematical Soc..

[13] Eisenbud, D., Harris, J. (2000). *The geometry of schemes*, Springer, New York.

[14] Ferrer, W., Rittatore, A. (2017). Actions and invariants of algebraic groups. CRC press.

[15] Grothendieck, A., Raynaud, M. (2003) *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Directed by A. Grothendieck, With two pa- pers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original. Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129), Société Mathématique de France, Paris, xviii+327 pages.

[16] Grothendieck, A., Demazure, M. (1962). *Schemas en groupes I.* Lect. Notes Math, 151.

[17] Grothendieck, A. (1965). Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24, 5-231

[18] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.

[19] Hilbert, D. (1970). *Ueber die Theorie der algebraischen Formen.* In Algebra· Invariantentheorie Geometrie (pp. 199-257). Springer, Berlin, Heidelberg.

[20] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

[21] Massey, W. S. (1991). *A basic course in algebraic topology* (Vol. 127). Springer.

[22] Matsumura, H., & Oort, F. (1967). Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes. Inventiones mathematicae, 4(1), 1-25.

[23] Milne, J. S. (1986). *Abelian varieties. Arithmetic geometry*, 5, 103-150.

[MilAG] Milne, J. S. (2017). *Algebraic groups: The theory of group schemes of finite type over a field (Vol. 170).* Cambridge University Press.

[24] Mumford, D., Ramanujam, C. P., Manin, I. I. (1974). *Abelian varieties (Vol. 2).* Oxford: Oxford university press.

[25] Mumford, D., Fogarty, J., & Kirwan, F. (1994). *Geometric invariant theory* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.

[26] Nagata, M. (1958) *On the fourteenth problem of Hilbert* Proc. Int. Conf. Mathematics, Edinburgh, 459–462.

[27] Perrin, D. (1975). *Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps et groupes henséliens* (Vol. 165). Université Paris XI, UER Mathématique.

[28] Raynaud, M. (1970) Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Lecture Notes in Math. 119, Springer-Verlag.

[RdAF] Rittatore, A., del Angel, P. L., Santos, W. F. (2018). *Quasi-compact group schemes, Hopf sheaves, and their representations.* arXiv preprint arXiv:1807.03428.

[29] Rosenlicht, M. (1956). *Some basic theorems on algebraic groups.* American Journal of Mathematics, 78(2), 401-443.

[30] Saavedra Rivano, N. (1972). *Catégories tannakiennes.* Bulletin de la Société Mathématique de France, 100, 417-430.

[31] Silverman, J. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves.* Springer-Verlag, 1994.

[32] Shafarevich, I. R., Reid, M. (1994). *Basic algebraic geometry (Vol. 2).* Berlin: Springer-verlag.

[33] The Stacks Project (2020). Columbia University. Recuperado de https://stacks.math.columbia.edu/

[34] Totaro, B. (2008). *Hilbert's 14th problem over finite fields and a conjecture on the cone of curves.* Compositio Mathematica, 144(5), 1176-1198.

[35] Vakil, R. *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry*, http://math.stanford.edu/∼vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf (actualizado el 18 de noviembre de 2017).

[36] Waterhouse, W. C. (1979) *Introduction to affine group schemes* (Vol. 66). Springer Science & Business Media.