Notas para el curso de Medida e Integración
Licenciatura en Matemática

Alejandro Cholaquidis

Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Estas notas fueron escritas para el curso de Medida e Integración de la Licencitura en Matemática, dictado en el año 2020. Las erratas que hubieren, se agradece comunicarlas a acholaquidis@hotmail.com. Están basadas en el libro [6], otra referencia recomendable también de fácil lectura es el libro [1]. Una referencia clásica es el libro [2], cuyo enfoque es *más abstracto* y algo distinto a la primera parte del curso. Otra referencia clásica es el libro [4]. Una lectura mas avanzada es el libro [3]. Ejemplos y contraejemplos varios pueden encontrarse en el libro [5].

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo veremos primero, de manera imprecisa, y sólo a efectos de motivar la introducción de la medida de Lesbesgue y los siguientes capítulos, un recorrido por algunos de los temas que abordaremos más adelante. Luego nos centraremos en la definición de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. En el capítulo siguiente estudiaremos las funciones medibles.

1.1. Notación

Vamos a introducir primero la notación que usaremos a lo largo del curso, dado un conjunto E, denotamos $int(E), \overline{E}$, E^c, su interior, clausura, y complemento respectivamente. Dados A, B denotamos $A \triangle B = A \cap B^c \cup B \cap A^c$ y $A \setminus B = A \cap B^c$. En general dado $r > 0$, $B(x, r)$ denota la bola abierta de radio r. Denotamos $\|v\|$ la norma euclidea en $\mathbb{R}^d$. La suma de Minokowski de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^d$ se denota $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, dado $\lambda > 0$, $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Por otra parte su distancia se define como $d(A, B) = \text{ínf}_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$.

1.2. Algunos problemas a abordar

1.2.1. Teorema fundamental del cálculo

Recordemos que el teorema fundamental del cálculo da una respuesta (parcial), al problema de encontrar una familia de funciones para las que vale

a)

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f(y)dy = f(x)$$

En relación al punto a) recordemos que si existe $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$ y f es Riemann Integrable (R.I.), vale a). Ninguna de estas dos condiciones se cumplen bajo la hipótesis de continuidad. Weierstrass en 1872 da un ejemplo de una función F que es continua pero no es derivable en ningún punto. Y además, el conocido ejemplo $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$ es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, pero su derivada no es R.I., ya que en particular no es acotada. Más adelante veremos que una condición necesaria y suficiente para que valga a), si cambiamos la integral de Riemann por la integral de

Lebesgue (que definiremos en el capítulo 2), es pedirle a F que sea absolutamente continua, esto es: $\forall\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$ y

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \epsilon.$$

En relación al punto b), recordemos que si la integral es la de Riemann, vale la igualdad si por ejemplo f es continua en $[a,b]$ (en cuyo caso además es R.I.), veremos que, nuevamente cambiando la noción de integrabilidad por la de Lebesgue, el punto b) vale *para casi todo* x (esto quiere decir que vale para todo x en el dominio de la función f excepto un conjunto de *medida de Lebesgue nula*).

1.2.2. Sobre el intercambio de la integral con el límite

Recordemos que si $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones R.I que converge uniformemente a cierta $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir $\sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0$ cuando $n \to \infty$), es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx,$$

es decir podemos *meter el límite dentro de la integral*. Sin la convergencia uniforme esto no es cierto, basta pensar por ejemplo $E = [0,1]$ y $f_n(x) = n\mathbb{I}_{[0,1/n]}$. Otro ejemplo es $E = \{x : x > 0\}$ y $f_n(x) = x/n$, en este caso las f_n no son R.I, pero convergen en todo E a la función nula. En estos dos ejemplos una de las cosas que se observa es que las f_n no están uniformemente acotadas (por una función g R.I. en E). No obstante veremos que esto no es condición suficiente para que el límite de las integrales (de Riemann) de las f_n, sea la integral de f, en particular porque puede pasar que f no sea R.I. En concreto veremos que se pueden encontrar funciones $f_n : [0,1] \to [0,1]$ tal que para todo $x \in [0,1]$, la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}_n$ es decreciente a cierto $f(x)$ (es inmediato ver que esto implica que existe el límite de $\int_0^1 f_n(x)dx$ ya que es una sucesión decreciente de números reales, acotados inferiormente por 0), pero la función así definida no es Riemann Integrable

1.2.3. Sobre la medida de Lebesgue y los conjuntos no-medibles

Una noción de medida en $\mathbb{R}$ busca generalizar el concepto de longitud de un intervalo, por lo tanto como caso particular, la medida de un subconjunto E de $\mathbb{R}$, debería ser tal que si $E = (a,b)$, $E = [a,b]$, $E = (a,b]$ o $E = [a,b)$ con $a < b$ entonces $m(E) = b - a$. De esto se deduce en particular que si trasladamos E su medida no debería cambiar (ya que la longitud de los intervalos trasladados no cambia). Otra propiedad deseable es que si $E = E_1 \cup E_2$ y los conjuntos E_1 y E_2 son disjuntos, la medida de E debería ser la suma de las medidas de E_1 y E_2 (y por inducción esto parecería ser razonable que valga para cualquier unión finita de conjuntos). ¿Qué pasa cuando la unión es infinita? Probaremos más adelante que un abierto de $\mathbb{R}$ es una unión de a lo sumo una cantidad numerable de intervalos abiertos disjuntos. Por lo tanto parece razonable que la medida de cualquier abierto sea la suma (infinita) de las longitudes de estos intervalos, esta propiedad (el poder sumar en infinitos conjuntos disjuntos) se llama σ-aditividad. De la sigma aditividad se sigue la aditividad finita, y en particular se sigue que si $A \subset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.

Estas tres propiedades que hemos mencionado (que en un intervalo $[a,b]$ valga $b-a$, que sea invariante por traslaciones, y que sea σ-aditiva) hacen que no se pueda definir una medida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ como veremos a continuación.

Conjunto no medible

Para mostrar que hay conjuntos que no pueden ser medibles (si se mantienen las 3 propiedades antes mencionadas), vamos a definir en $\mathbb{R}$ una relación de equivalencia $\sim$: $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$, es fácil ver que esto define una relación de equivalencia. Si denotamos $[x]$ a la clase de equivalencia de x, vamos a tomar para cada clase de equivalencia de $\sim$ un único representante, que esté en $[0,1]$ (observar que esto es posible porque para todo real x, $x+\mathbb{Q} = \{x+q : q \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$). Esto nos define (axioma de elección mediante) un conjunto $V \subset [0,1]$ que se denomina conjunto de Vitali. Este conjunto tiene la propiedad de que $V+q \cap V+q' = \emptyset$ si $q \neq q'$ (se deja como ejercicio verificar esto último). Además es claro que, la unión de todos los trasladados de V por números racionales contenidos en $[-1,1]$ (es decir los conjuntos de la forma $V+q$ con $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$), está contenido en $[-1,2]$. Por otra parte si $x \in [0,1]$, existe un representante $y \in V$ de la clase $[x]$, es decir $x-y=q$. Como $|x-y| \leq 1$ se tiene que $q \in [-1,1]$. Es decir para todo $x \in [0,1]$ existe $y \in V$ y $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ tal que $x-y=q$. Es decir

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} V+q \subset [-1,2]. \tag{1.1}$$

Si V fuese medible y pudiéramos definir una medida en las partes de $\mathbb{R}$ que fuese invariante por traslaciones, tendría que ser $m(V) = m(V+q)$ para todo racional q. Como la unión anterior es una unión infinita de conjuntos disjuntos, todos ellos con la misma medida (ya que $m(V) = m(V+q)$ para todo racional q). Tenemos dos opciones, la medida de V es 0, lo cual es imposible ya que $m([0,1]) = 1$, y la unión en (1.1) contiene a $[0,1]$ o $m(V) > 0$, pero esto tampoco es posible ya que la medida de la unión daría infinito (por la sigma aditividad), pero tiene que ser menor que 3 (por la segunda inclusión en (1.1)).

El ejemplo anterior muestra que no es posible definir una medida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que cumpla las 3 propiedades antes mencionadas. Lo que haremos es definirla en un subconjunto de las partes, que llamaremos sigma álgebra de Lebesgue y que contiene a los intervalos (abiertos, semiabiertos, cerrados), a las uniones e intersecciones numerables de intervalos, etc. Veremos además que si bien, como acabamos de mostrar no es igual a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, tiene el cardinal de las partes de $\mathbb{R}$ (aquí se asume la hipótesis del continuo generalizada, que dice que para cualquier conjunto infinito A no existe un conjunto B tal que $|A| < |B| < 2^{|A|}$ es decir cuyo cardinal esté estrictamente entre el cardinal de A y el cardinal de las partes de A).

1.3. Rectángulos y cubos

Sean $a_i < b_i$ para $i = 1, \dots, d$, un rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^d$ es

$$R = \{(x_1, \dots, x_d) \subset \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, d\}$$

El rectángulo es abierto si $a_j < x_j < b_j$. Su volumen lo definimos (tanto para rectángulos abiertos como cerrados), como

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_d - a_d).$$

El rectángulo cerrado es un cubo si para todo $i = 1, \dots, d$, $b_i - a_i = l > 0$. Una unión de rectángulos $R_1, R_2, \dots$ se dice **casi disjunta** si sus interiores son disjuntos, es decir para todo $i \neq j$ $int(R_i) \cap int(R_j) = \emptyset$.

Lema 1.1. *Si R es un rectángulo que es una unión casi disjunta de rectángulos $R_1, \dots, R_n$, entonces*

$$|R| = \sum_{i=1}^{n} |R_i|$$

Demostración. Primero lo que haremos es partir cada rectángulo R_i de modo que el resultado sea una grilla de rectángulos casi disjuntos en R. Esto se logra extendiendo los lados de los R_i hasta intersectar los lados de R, ver Figura 1.1. Más formalmente, si

$$R_i = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_j^i \leq x_j \leq b_j^i \quad \forall j = 1, \dots, d\} \qquad \forall i = 1, \dots, n,$$

y

$$R = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, d\}$$

Al proyectar sobre el lado i de R obtenemos $a_i \leq a_i^{i_1} \leq a_i^{i_2} \leq \cdots \leq a_i^{i_{d-2}} \leq b_i$, denotamos $a_i = a_i^{i_0}$ y $b_i = a_i^{i_{d-1}}$. Ahora definimos los rectángulos $\tilde{R}_i$ de la grilla que se obtienen como producto de todas las posibles combinaciones de d intervalos $[a_i^{i_j}, a_i^{i_{j+1}}]$ con $i = 1, \dots, d$ y $j = 0, \dots, d-1$. Esto nos da M rectángulos casi disjuntos $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$. Cada rectángulo R_i es una unión de $|J_i|$ de estos rectángulos donde J_i es un subconjunto de $\{1, \dots, M\}$. Observar que los J_i son conjuntos disjuntos de índices (ya que los R_i son casi disjuntos) cuya unión da todo $\{1, \dots, M\}$. Por otra parte

$$|R_i| = \sum_{j \in J_i} |\tilde{R}_j| \quad y \quad |R| = \sum_{j=1}^{M} |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j| = \sum_{k=1}^{n} |R_k|$$

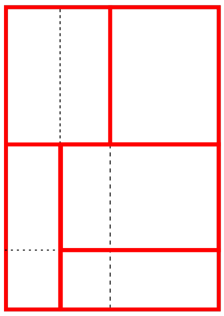

Figura 1.1: En rojo se muestran los bordes de los R_i, las lineas punteadas forman parte de los bordes de los $\tilde{R}_i$

□

Lema 1.2. *Si $R, R_1, \dots, R_n$ son rectángulos tal que $R \subset \cup_{i=1}^n R_i$ entonces $|R| \leq \sum_{i=1}^n |R_i|$*

Demostración. Procedemos igual que antes, extendiendo los lados de $R, R_1, \dots, R_n$. Esto nos da rectángulos $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$. Algunos de estos rectángulos no cortan a R. Sean $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_L$ los que si, R es la unión casi disjunta de estos rectángulos. Por lo tanto por el lema anterior

$$|R| = \sum_{i=1}^{L} |\tilde{R}_i|.$$

Por otra parte cada R_k con $k = 1, \dots, n$ es unión de ciertos rectángulos $\tilde{R}_j$ (algunos de los cuales puede cortar a R y otros no), con $j \in J_k$ donde J_k es un subconjunto de $\{1, \dots, M\}$ pero no necesariamente los índices J_k y $J_{k'}$ son disjuntos si $k \neq k'$. Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{L} |\tilde{R}_j| \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} |\tilde{R}_j|,$$

donde en esta desigualdad hemos usado que los rectángulos que cortan a R están contenidos en algún $R_1, \dots, R_n$. □

Lema 1.3. *Todo abierto $O \subset \mathbb{R}$ se puede escribir de forma única como una unión de a lo sumo una cantidad numerable de intervalos abiertos disjuntos (no necesariamente intervalos acotados).*

Demostración. Para todo $x \in O$ denotemos I_x el intervalo abierto más grande que contiene a x, contenido en O. Es claro que

$$O = \bigcup_{x \in O} I_x$$

Si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ entonces $I_x \cup I_y \subset I_x$ ya que I_x es maximal y $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto que contiene a x. De $I_x \cup I_y \subset I_x$ se sigue que $I_y \subset I_x$. Razonando de manera análoga $I_x \subset I_y$, entonces $I_x = I_y$. Es decir dos intervalos distintos en la familia de intervalos $\{I_x\}_{x \in O}$, son disjuntos. Son una cantidad numerable porque $\mathbb{Q}$ es numerable y (se deja como ejercicio) cualquier intervalo abierto contiene al menos un racional. $\square$

Observación 1.4. *El lema interior permite definir la medida de cualquier abierto de $\mathbb{R}$ como la suma de las longitudes de los intervalos que lo componen ya que la descomposición es única. Ademas prueba que si tenemos dos abiertos disjuntos O_1 y O_2 su medida es la suma de las medidas de O_1 y la de O_2. En $\mathbb{R}^2$ el análogo del lema anterior es falso, es decir no podemos descomponer cualquier abierto de forma única como unión de a lo sumo una cantidad numerable de rectángulos disjuntos. No obstante tenemos el siguiente resultado que nos será de utilidad más adelante.*

Lema 1.5. *Todo abierto $O \subset \mathbb{R}^d$ es unión de una cantidad a lo sumo numerable de cubos casi disjuntos.*

Demostración. Consideremos $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_N, \dots$ la sucesión de grillas de $\mathbb{R}^d$ que se obtienen a partir de $\mathcal{N}_1 = \mathbb{Z}^d$, dividiendo cada lado a la mitad. Es decir $\mathcal{N}_N$ esta formado por cubos de lado 2^{-N+1}. Vamos a definir un procedimiento iterativo para construir los cubos de la tesis.

Paso 1: Un cubo de $\mathcal{N}_1$ lo aceptamos si está incluido en O, lo rechazamos si está incluido en O^c, y *tentativamente lo aceptamos* si corta a O y O^c, y vamos al paso siguiente.

Iteración: En el paso i, para $i = 2, 3, \dots$, consideremos únicamente los cubos de la grilla $\mathcal{N}_i$ cuya unión dan cubos tentativamente aceptados del paso $i-1$. Rechazamos aquellos que están incluidos en O^c, aceptamos los que están incluidos en O, y tentativamente aceptamos los que cortan a O y O^c.

Repetimos el paso 2 infinitamente y nos quedamos con todos los cubos aceptados. Observar que por construcción estos cubos son casi disjuntos, y son una cantidad numerable (contienen al menos un punto de $\mathbb{Q}^d$). Por otra parte si $x \in O$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset O$, tomamos N tal que $\sqrt{d}/2^{-N+1} < \epsilon$, para que sean cubos con diagonal menor que ϵ. Como la grilla $\mathcal{N}_N$ es una partición de $\mathbb{R}^d$ en cubos de lado $1/2^{-N+1}$ existe un único cubo $Q_x \in \mathcal{N}_N$ tal que $x \in Q_x \subset B(x, \epsilon) \subset O$. Este cubo Q_x o bien está incluido en un cubo que ya fue aceptado, o será aceptado en el paso N.

$\square$

Observar que como la descomposición anterior no es única no podemos definir la medida de los abiertos de $\mathbb{R}^d$ como la suma de los volúmenes de los cubos que forman la descomposición que da el lema anterior. Antes de eso vamos a tener que definir el concepto de medida exterior.

1.4. Medida Exterior

Definición 1.6. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ definimos su **medida exterior**, que denotamos $m_*(E)$, como

$$m_*(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\},$$

donde el ínfimo es en todos los cubrimientos numerables de E por cubos cerrados.

Es inmediato a partir de la definición verificar que la medida exterior de un punto es 0, que la medida exterior es un número real no negativo, y que $m_*(Q) \leq |Q|$ para todo cubo Q (abierto o cerrado). Si tomamos cubrimientos finitos, el resultado no da lo mismo, por ejemplo con una cantidad finita de cubos la medida exterior de los racionales en $[0,1]$ daría 1, mientras que con una cantidad numerable, da 0, ya que los puntos tienen medida exterior 0.

Lema 1.7. *$m_*(Q) = |Q|$ para todo cubo cerrado Q.*

Demostración. Primero observemos que $m_*(Q) \leq |Q|$ ya que el propio Q es un cubrimiento de si mismo (por cubos cerrados). Para probar la otra desigualdad sean $Q_1, Q_2, \dots$ cubos correspondientes a un cubrimiento numerable de Q por cubos cerrados. Basta probar que $|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_i|$ y luego tomar ínfimo. Como el cubrimiento no es finito no podemos aplicar directamente el Lema 1.2. Para eso vamos a usar que Q es compacto y tomar un subcubrimiento adecuado. Dado $\epsilon > 0$ sea S_j un cubo abierto tal que $Q_j \subset S_j$ y

$$|S_j| \leq (1+\epsilon)|Q_j| \quad j = 1, 2, \dots,$$

tenemos entonces que $S_1, S_2, \dots$ es un cubrimiento abierto de Q y por lo tanto existe un subcubrimiento finito que denotaremos $S_1, \dots, S_N$. Ahora si por el Lema 1.2

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{N} |S_j| \leq (1+\epsilon) \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \leq (1+\epsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

como ϵ es arbitrario $|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_i|$ y como esto vale para cualquier cubrimiento de Q por cubos cerrados $m_*(Q) \geq |Q|$. □

Lema 1.8. *$m_*(Q) = |Q|$ para todo cubo abierto Q.*

Demostración. Como $Q \subset \overline{Q}$ y $\overline{Q}$ es un cubo cerrado que contiene al cubo abierto Q, se tiene que $m_*(Q) \leq |\overline{Q}|$, y por definición $|\overline{Q}| = |Q|$. Para probar la otra desigualdad sea $\epsilon > 0$ y Q_0 un cubo cerrado tal que $Q_0 \subset Q$ y $|Q_0| \geq (1-\epsilon)|Q|$. Además por el lema anterior $m_*(Q_0) = |Q_0|$, es decir obtuvimos

$$|Q|(1-\epsilon) \leq |Q_0| = m_*(Q_0) \leq m_*(Q),$$

donde la última desigualdad se debe a que todo cubrimiento de Q cubre Q_0. □

Lema 1.9. *$m_*(R) = |R|$ para todo rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^d$.*

Demostración. La prueba de que $m_*(R) \geq |R|$ se hace igual que la prueba de que $m_*(Q) \geq |Q|$ en 1.7: dado un cubrimiento cualquiera por cubos cerrados, se cubre R por cubos abiertos cuyo volumen supere el de los cubos cerrados en un factor $(1+\epsilon)$, y se toma un subcubrimiento finito.

Para probar que $m_*(R) \leq |R|$ consideremos $\mathcal{N}_k$ una grilla de $\mathbb{R}^d$ con lados de longitud $1/k$. Consideremos Q^1 los cubos de $\mathcal{N}_k$ incluidos en R y Q^2 los cubos de $\mathcal{N}_k$ que cortan R y R^c. Observar que

$$R \subset \bigcup_{Q \in Q^1 \cup Q^2} Q \qquad \text{y} \qquad \#(Q^1 \cup Q^2) < \infty,$$

además, es claro que

$$\sum_{Q \in Q^1} |Q| \leq |R|.$$

Para acotar la suma cuando $Q \in Q^2$ observemos que R tiene $2d$ caras, cada una de ellas corta a lo sumo $C_1 k^{d-1}$ cubos, con $C_1 > 0$ una constante que se puede tomar independiente de la cara (esto se debe a que cada cara es un rectángulo de dimensión $d-1$). Entonces $Q^2 \leq C_2 k^{d-1}$ donde $C_2 > 0$ es otra constante. Por lo tanto

$$\sum_{Q \in Q^2} |Q| \leq C_2 k^{d-1} k^{-d} \leq \frac{C_2}{k},$$

por lo tanto

$$\sum_{Q \in Q^1 \cup Q^2} |Q| \leq |R| + \frac{C_2}{k},$$

Esto prueba que $m_*(Q) \leq |R| + C_2/k$, y tomando límite en k se obtiene la desigualdad. □

El siguiente lema se sigue de la definición de medida exterior.

Lema 1.10. *Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento $Q_1, Q_2, \dots$ de E por cubos cerrados, tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \epsilon.$$

Lema 1.11. ***Monotonía***. *Si $E_1 \subset E_2$ entonces $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.*

Lema 1.12. ***Subaditividad***. *Si denotamos $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ entonces*

$$m_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j).$$

Demostración. Primero observemos que si alguno de los E_j es tal que $m_*(E_j) = \infty$ la desigualdad es trivial, supongamos que $m_*(E_j) < \infty$ para todo j. Por el Lema 1.10 para todo $\epsilon > 0$ y para todo j, existe $Q_{1,j}, Q_{2,j}, \dots$ un cubrimiento de E_j por cubos cerrados tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Observar que $\{Q_{k,j}\}_{k,j}$ es un cubrimiento de E por cubos cerrados, por lo tanto

$$m_*(E) \leq \sum_{j,k} |Q_{j,k}| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Big(m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}\Big) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j),$$

como ϵ es arbitrario obtenemos la desigualdad que queríamos. □

Lema 1.13. *Para todo $E \subset \mathbb{R}^d$, $m_*(E) = \inf_{E \subset O} m_*(O)$, donde el ínfimo es en todos los abiertos O que contienen a E.*

Demostración. Como $E \subset O$, por monotonía $m_*(E) \leq m_*(O)$, entonces $m_*(E) \leq \inf_{E \subset O} m_*(O)$. Para probar la otra desigualdad sea $\epsilon > 0$, tomemos un cubrimiento de E por cubos cerrados $Q_1, Q_2, \dots$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Sean $\{Q_j^0\}_j$ cubos abiertos tal que $Q_j \subset Q_j^0$ y $|Q_j^0| \leq |Q_j| + \epsilon/2^{j+1}$, definimos el abierto

$$O_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0,$$

por la subaditividad $m_*(O_1) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j^0) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^0|$ donde en la última igualdad se usa el Lema 1.8. Por lo tanto

$$m_*(O_1) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^0| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| + \frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \frac{\epsilon}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq \epsilon + m_*(E).$$

Observar que $\inf_{E\subset O} m_*(O) \leq m_*(O_1)$. Por lo tanto hemos probado que para todo $\epsilon > 0$,

$$\inf_{E\subset O} m_*(O) \leq m_*(E) + \epsilon,$$

de donde se deduce la desigualdad que queríamos. □

Lema 1.14. *Si $E = E_1 \cup E_2$ y $d(E_1, E_2) > 0$ entonces $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.*

Demostración. Denotemos $\delta = d(E_1, E_2)$. Cualquier cubrimiento de E por cubos cerrados lo podemos llevar (particionando los cubos) a un cubrimiento de E por cubos cuya diagonal es menor que δ. Tomemos un cubrimiento $Q_1, Q_2, \ldots$ en estas condiciones tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon$. Cada cubo Q_i corta a E_1 o E_2 pero no a ambos (ya que su diagonal es menor que la distancia entre los conjuntos). Denotemos J_1 los índices de los cubos que cortan a E_1 y J_2 los índices de los cubos que cortan a E_2, tenemos que $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Como

$$E_1 \subset \bigcup_{j\in J_1} Q_j \quad y \quad E_2 \subset \bigcup_{j\in J_2} Q_j,$$

por lo tanto

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq \sum_{j\in J_1} |Q_j| + \sum_{j\in J_2} |Q_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon,$$

donde en la primera desigualdad usamos que m_* es por definición un ínfimo. Y en la segunda desigualdad usamos que los índices J_1 y J_2 son disjuntos, y estan incluidos en $1, 2, \ldots$. □

Lema 1.15. *Si $E = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ y los Q_j son cubos casi disjuntos $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.*

Demostración. Por la subaditividad $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j)$, y además $m_*(Q_j) = |Q_j|$ tanto si Q_j es un cubo abierto o cerrado. Para probar la otra desigualdad vamos a usar el lema anterior, sea $\tilde{Q}_j \subset Q_j$ cubos cerrados tal que $|Q_j| \leq |\tilde{Q}_j| + \epsilon/2^j$. Para todo N los cubos $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_N$ están a distancia positiva entre si, por lo tanto

$$m_*\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j\Big) = \sum_{j=1}^{N} |\tilde{Q}_j| \geq \sum_{j=1}^{N} \Big(|Q_j| - \frac{\epsilon}{2^j}\Big) \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \epsilon.$$

Como $\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j \subset E$ tenemos que

$$m_*\Big(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j\Big) \leq m_*(E),$$

juntando estas dos últimas ecuaciones

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \epsilon,$$

tomando límite en $N \to \infty$.

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - \epsilon,$$

y como ϵ es arbitrario se obtiene la desigualdad. □

El resultado anterior implica que podemos definir la medida exterior de un abierto O (que ya probamos que se puede escribir como una unión numerable de cubos casi disjuntos) como la suma de los volúmenes de cubos cerrados casi disjuntos en cualquier descomposición del abierto (ya que cualquiera de estas sumas da $m_*(O)$). En general no es cierto que si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $m_*(E_1) + m_*(E_2) = m_*(E_1 \cup E_2)$.

1.5. Medida de Lebesgue

Definición 1.16. Dado $A \subset \mathbb{R}^d$, decimos que A es **medible Lebesgue** (a veces diremos simplemente que es medible) si para todo $\epsilon > 0$, existe O abierto tal que $A \subset O$ y $m_*(O \setminus A) < \epsilon$. En este caso definimos su medida de Lebesgue, $m(A)$ como $m(A) := m_*(A)$.

Claramente m hereda las propiedades de m_* ya que es una restricción de m_* a una cierta familia de subconjuntos (los medibles) de las partes de $\mathbb{R}^d$. Una consecuencia inmediata de la definición es que todo abierto es medible Lebesgue.

Teorema 1.17.

1. *Si $m_*(E) = 0$, E es medible.*
2. *La unión numerable de conjuntos medibles es medible.*
3. *Los cerrados son medibles.*
4. *El complemento de un conjunto medible es medible.*
5. *La intersección numerable de conjuntos medibles es medible.*

Demostración.

1. Sabemos que $m_*(E) = \inf_{E \subset O} m_*(O) = 0$ con O abierto, por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ podemos tomar O tal que $m_*(O) < \epsilon$ y por lo tanto $m_*(O \setminus E) \leq m_*(O) \leq \epsilon$ (donde hemos usado en la primera desigualdad la monotonía de m_*).

2. Sea $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ con E_j medible para todo j. Sea $\epsilon > 0$, para todo j existe O_j abierto tal que $m_*(O_j \setminus E_j) < \epsilon/2^j$. Sea $O = \cup_{j=1}^{\infty} O_j$, tenemos que
$$E \subset O \qquad \text{y} \qquad O \setminus E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (O_j \setminus E_j),$$
entonces, por la monotonía
$$m_*(O \setminus E) \leq m_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (O_j \setminus E_j)\Big)$$
y usando la subaditividad
$$m_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (O_j \setminus E_j)\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(O_j \setminus E_j) < \epsilon.$$

3. Veamos primero que basta probarlo para compactos. Podemos escribir $F = \cup_{k=1}^{\infty} [F \cap \overline{B(0,k)}]$. Si probamos que los compactos son medibles, tenemos que el compacto $[F \cap \overline{B(0,k)}]$ es medible para todo k. Y por la parte 2., la unión numerable de medibles es medible, por lo tanto F sería medible. Supongamos que F es compacto (por lo tanto por monotonía $m_*(F) < \infty$, ya que lo podemos incluir

en un cubo suficientemente grande). Como $m_*(F) = \text{ínf}_{F\subset O} m_*(O)$ con O abierto, podemos tomar, para todo $\epsilon > 0$ un abierto O tal que

$$m_*(O) \leq m_*(F) + \epsilon. \tag{1.2}$$

Observar que $O \setminus F$ es abierto, por lo tanto por el Lema 1.5

$$O \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \tag{1.3}$$

con Q_j cubos cerrados casi disjuntos. Para todo $N > 0$ el conjunto $K = \cup_{j=1}^N Q_j$ es compacto, por lo tanto $d(K, F) > 0$. Por el Lema 1.14

$$m_*(K \cup F) = m_*(K) + m_*(F) = \sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j) + m_*(F)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el Lema 1.15. Observar que $K \cup F \subset O$, por lo tanto $m_*(K \cup F) \leq m_*(O)$. Si combinamos esto con (1.2),

$$m_*(F) + \epsilon \geq m_*(O) \geq \sum_{j=1}^{N} m_*(Q_j) + m_*(F),$$

es decir, para todo N, $\sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \leq \epsilon$, si tomamos límite en $N \to \infty$, de (1.3) se sigue que $m_*(O \setminus F) \leq \epsilon$.

4. Sea E medible, tomemos O_n abiertos tal que $E \subset O_n$ y $m_*(O_n \setminus E) < 1/n$. Los conjuntos O_n^c son cerrados para todo n, y por lo tanto medibles por la parte anterior, entonces $S = \cup_{n=1}^{\infty} O_n^c$ es medible. Además $S \subset E^c$, y

$$E^c \setminus S = E^c \setminus \Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c\Big] = E^c \setminus \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big)^c = E^c \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big)$$

y para todo n

$$E^c \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\Big) \subset O_n \setminus E,$$

es decir para todo n, $m_*(E^c \setminus S) \leq m_*(O_n \setminus E) < 1/n$. Esto prueba que $m_*(E^c \setminus S) = 0$ por lo tanto $E^c \setminus S$ es medible por la parte 1 del Teorema. Por otro lado $E^c = S \cup E^c \setminus S$ es unión de medibles.

5. Se sigue de los puntos 2 y 3.

□

El Teorema anterior prueba en particular que los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ tienen el cardinal de partes de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que si C es el conjunto de Cantor estándar (quitando tercios centrales), su medida es 0. Por lo tanto por la parte 1 cualquier subconjunto de C es medible (usando la monotonía de m_*). Por otra parte C tiene el cardinal de los números reales.

Lema 1.18. *Si tenemos $E_1, E_2, \ldots$ una cantidad numerable de conjuntos medibles y disjuntos*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Demostración. Por la subaditividad numerable tenemos que

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Para probar la otra desigualdad supongamos primero que E_j es acotado para todo j. Como E_j^c es medible, por definición existe O_j abierto tal que $E_j^c \subset O_j$ y $m_*(O_j \setminus E_j^c) < \epsilon/2^j$. Es decir si definimos $F_j = O_j^c$, F_j es cerrado y $m_*(E_j \setminus F_j) < \epsilon/2^j$. Los F_j son compactos y disjuntos (ya que son cerrados y están incluidos en los E_j que los supusimos acotados). Por lo tanto para todo N, $F_1, \ldots, F_N$ están a distancia positiva entre si, y vale que

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\Big) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j).$$

Sea $E = \cup_j E_j$, como $\cup_{j=1}^N F_j \subset E$, si aplicamos la monotonía y luego la subaditividad de m (que se hereda de m_*)

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{N} m(F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - m(E_j \setminus F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \epsilon,$$

si tomamos límite cuando $N \to \infty$

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) - \epsilon,$$

y como ϵ es arbitrario obtenemos la desigualdad que queríamos. En el caso en que los conjuntos no son acotados tomamos una sucesión creciente de cubos $Q_1, Q_2, \ldots$ estrictamente crecientes a todo $\mathbb{R}^d$ y definimos $S_1 = Q_1$, $S_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$ si $k > 1$, $E_{j,k} = E_j \cap S_k$. Es claro que $E = \cup_{j,k} E_{j,k}$ y que los $E_{j,k}$ son acotados y disjuntos. Por lo tanto

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_{j} \sum_{k} m(E_{j,k}) = \sum_{j} m(E_j).$$

□

Teorema 1.19. ***Continuidad de la medida.***

1. *Consideremos $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ una familia creciente de conjuntos medibles, entonces*

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \lim_{n\to\infty} m(E_n). \tag{1.4}$$

2. *Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ es una familia decreciente de conjuntos medibles, tal que para algún n $m(E_n) < \infty$ entonces*

$$m\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \lim_{n\to\infty} m(E_n). \tag{1.5}$$

Demostración. 1. Definimos $E_0 = \emptyset$, los conjuntos $E_j \setminus E_{j-1}$ son medibles y disjuntos, por lo tanto por el lema anterior

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} m(E_j \setminus E_{j-1}),$$

además $\sum_{j=1}^{n} m(E_j \setminus E_{j-1}) = m(E_n)$ ya que la suma es telescópica.

2. Denotemos $F_j = E_n \setminus E_j$ para $j > n$ donde n es tal que $m(E_n) < \infty$, estos conjuntos son una familia creciente de conjuntos medibles, $F_{n+1} \subset F_{n+2}$. Además

$$\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j = E_n \setminus \bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j,$$

entonces

$$m\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j\Big) = m(E_n) - m\Big(\bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j\Big)$$

por lo tanto

$$m(E_n) = m\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j\Big) + m\Big(\bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j\Big) \tag{1.6}$$

usando el punto anterior

$$m\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} F_j\Big) = \lim_{j\to\infty} m(F_j)$$

como $m(F_j) = m(E_n) - m(E_j)$ (recordar que n está fijo), el límite anterior es igual a $m(E_n) - \lim_{j\to\infty} m(E_j)$. Si sustituímos esto en (1.6) obtenemos que

$$m(E_n) = m(E_n) - \lim_{j\to\infty} m(E_j) + m\Big(\bigcap_{j=n+1}^{\infty} E_j\Big),$$

como la medida de E_n es finita, obtenemos (1.5)

□

Veamos algunas propiedades de regularidad de la medida de Lebesgue.

Teorema 1.20. *Sea $\epsilon > 0$,*

1. *para todo conjunto medible E existen O abierto y F cerrado (que dependen de ϵ) tal que $F \subset E \subset O$ y $m(O \setminus F) < \epsilon$.*
2. *Si además $m(E) < \infty$*
   a) Existe $K \subset E$, K compacto (que depende de ϵ), tal que $m(E \setminus K) < \epsilon$
   b) Existen $Q_1, \ldots, Q_N$ cubos cerrados tal que si $F = \cup_{i=1}^{N} Q_i$, entonces $m(E \triangle F) < \epsilon$.

Demostración. 1. Por definición de medibilidad aplicado a E existe $O_1 \supset E$ abierto tal que $m(O_1 \setminus E) < \epsilon/2$. Y por definición de medibilidad aplicado a E^c existe $O_2 \supset E^c$ abierto tal que $m(O_2 \setminus E^c) < \epsilon/2$. Definimos $F = O_2^c$, observar que $O_2 \setminus E^c = E \cap O_2 = E \setminus F$. Como los conjuntos $O_1 \setminus E$ y $E \setminus F$ son medibles y disjuntos $m(O_1 \setminus F) = m(O_1 \setminus E) + m(E \setminus F) < \epsilon$.

2. a) Por la parte anterior existe $F \subset E$, F cerrado tal que $m(F \setminus E) < \epsilon/2$. Sea $B_n = \overline{B(0,n)}$ y $K_n = F \cap B_n$, K_n es compacto para todo n y $E \setminus K_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos que decrecen a $E \setminus F$, además $m(E \setminus K_n) < \infty$ para todo n y por lo tanto podemos aplicar el Teorema 1.19 2 y obtenemos que $m(E \setminus K_n) \to m(E \setminus F)$. Podemos tomar n suficientemente grande tal que $|m(E \setminus K_n) - m(E \setminus F)| < \epsilon/2$, por lo tanto $m(E \setminus K_n) < \epsilon$.

2. b) Tomemos $Q_1, Q_2, ...$ una sucesión de cubos cerrados tal que $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} Q_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| \leq m(E) + \epsilon/2$. Como $m(E) < \infty$ porque E es acotado (usando la monotonía de la medida), tenemos que la serie anterior es convergente, por lo tanto existe N tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \epsilon/2, \quad \text{definimos} \quad F = \bigcup_{i=1}^{N} Q_i,$$

veamos que $m(E \triangle F) < \epsilon$. Por un lado

$$E \setminus F \subset \bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j,$$

por lo tanto

$$m(E \setminus F) \leq m\Big(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\Big) \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} m(Q_i) = \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_i| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además observemos que

$$F \setminus E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \setminus E, \tag{1.7}$$

y

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \setminus E\Big) + m(E) = m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_i) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_i| \leq m(E) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Finalmente de (1.7) y (1.8) obtenemos que $m(F \setminus E) \leq \epsilon/2$, que concluye la demostración.

□

1.5.1. Invarianza de la medida de Lebesgue y σ-álgebra

Como dijimos al comienzo de este capítulo la medida de Lebesgue tiene ciertas propiedades de invarianza que pasamos a detallar. Dados el conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$ y $\delta > 0$ definimos $E_h = E + h = \{x + h : x \in E\}$ el conjunto trasladado de E por h y $\delta E = \{\delta x : x \in E\}$ el conjunto dilatado de E un factor δ. Tenemos el siguiente teorema, cuya demostración queda como ejercicio para el lector, solamente daremos una idea general.

Teorema 1.21. *Los conjuntos E_h y δE son conjuntos medibles y*

i) $m(E_h) = m(E)$.

ii) $m(\delta E) = \delta^d m(E)$.

iii) Si B es una bola de radio r en $\mathbb{R}^d$, entonces $m(B) = r^d m(B_1)$, donde B_1 es la bola de centro en el origen y radio unitario.

Demostración. Para probar la medibilidad de E_h observemos que para todo $\epsilon > 0$, existe O abierto tal que $m(O \setminus E) < \epsilon$, basta ver que $O_h \supset E_h$ (el trasladado del abierto) cumple que $m(O_h \setminus E_h) < \epsilon$. Y lo mismo para δE, basta considerar δO. En relación a *i*) y *ii*) observar que los cubos lo verifican, y $Q_1, Q_2, \ldots$ es un cubrimiento por cubos cerrados de E si y sólo si los trasladados de dichos cubos son un cubrimiento de E_h. El punto *iii*) se deduce de *i*) y *ii*) ya que $B(0, r) = rB(0, 1)$ si $r > 0$.

□

Definición 1.22. Una familia de subconjuntos $\mathcal{A}$ es una **σ-álgebra** si

1. Para todo $A_1, A_2, \ldots$ elementos de $\mathcal{A}$, su unión está en $\mathcal{A}$, es decir $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, y su intersección está en $\mathcal{A}$, es decir $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

2. Para todo $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$.

Se puede demostrar fácilmente que la intersección de una cantidad arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra. Esto permite definir para cualquier familia de subconjuntos de un determinado conjunto, su σ-álgebra generada, es decir la intersección de todas las σ-álgebra que contiene a la familia (observar que es la menor σ-algebra que contiene a dicha familia, en el sentido de la inclusión). En el caso particular en que tenemos un espacio métrico (M, d), la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos se llama **σ-álgebra de Borel** y se denota $\mathcal{B}(M)$.

Hemos demostrado que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que son medible Lebesgue forman una σ-álgebra, que se llama **σ-álgebra de Lebesgue**, y denotaremos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, que ya vimos que no contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, ya que hay conjuntos que no son medibles. Es inmediato que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contiene a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ya que contiene a todos los abiertos. Para el caso $d = 1$ se puede ver fácilmente que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ contiene al conjunto de Cantor usual (cuyo cardinal es el cardinal de $\mathbb{R}$), y por lo tanto a todos sus subconjuntos, es decir el cardinal de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es el cardinal de las partes de $\mathbb{R}$. Si bien es fácil ver que el cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es mayor o igual que el cardinal de $\mathbb{R}$ (ya que en particular contiene a los puntos), se puede demostrar que el cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es menor estricto que el cardinal de las partes de $\mathbb{R}$. Se deja como ejercicio verificar que el cardinal de los subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$ es el el cardinal de las partes de $\mathbb{R}$.

Definición 1.23. Denotamos $\mathscr{G}_\delta$ a la familia de los conjuntos que se obtienen como intersección numerable de abiertos. Denotamos $\mathfrak{F}_\delta$ a la familia de conjuntos que se obtienen como unión numerable de cerrados.

Lema 1.24. *$E \subset \mathbb{R}^d$ es medible si y solo si*

1. *Existe un conjunto $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$ y S tal que $G_\delta = E \cup S$ con $m(S) = 0$.*

2. *Existe un conjunto $F_\delta \in \mathfrak{F}_\delta$ y S tal que $F_\delta \cup S = E$ con $m(S) = 0$.*

Demostración.

1. Supongamos que existe un conjunto $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$ y S tal que $G_\delta = E \cup S$ con $m(S) = 0$, veamos que E, para eso escribimos $E = (E \setminus S) \cup (E \cap S)$, ahora observar que $E \cap S \subset S$ y por lo tanto es medible (ya que tiene medida nula) y $E \setminus S = (E \cup S) \cap S^c$ es medible porque $E \cup S = G_\delta$ es medible y S^c es medible. Veamos que si E es medible vale 1. Consideremos

$$G_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

con $O_n \supset E$ y $m(O_n \setminus E) < 1/n$, $m(G_\delta \setminus E) \leq m(O_n \setminus E)$ para todo n y por lo tanto $m(G_\delta \setminus E) = 0$. Definimos $S = G_\delta \setminus E$.

2. La prueba de que si existe un conjunto $F_\delta \in \mathfrak{F}_\delta$ y S tal que $F_\delta \cup S = E$ con $m(S) = 0$ entonces E es medible es análoga a la hecha en el punto anterior. Consideramos $F_n \subset E$, F_n cerrado tal que $m(E \setminus F_n) < 1/n$ (F_n existe porque E^c es medible). Definimos

$$F_\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

tenemos que $m(E \setminus F_\delta) \leq m(E \setminus F_n) < 1/n$ para todo n. Por lo tanto podemos definir $S = E \setminus F_\delta$.

□

Capítulo 2

Integral de Lebesgue

Primero introduciremos las funciones medibles y algunas de sus propiedades. Recordemos que si tenemos f_n una sucesión de funciones a valores reales, $\sup_n f_n$ es la función que a cada x le asigna el supremo de la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}_n$. Análogamente se definen $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ y $\underline{\lim}_n f_n$, el ínfimo, limite superior y límite inferior de dicha sucesión. Vamos a denotar $f_n \rightrightarrows f$ si $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Definimos la parte positiva de una función a valores reales f, que denotamos f^+, como la función $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$. Análogamente la parte negativa de f, que denotamos f^-, se define como $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Decimos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es no decreciente si $f(x) \leq f(y)$ para todo $a \leq x \leq y \leq b$. Una sucesión de funciones f_n crece a f, y denotamos $f_n \uparrow f$ si para casi todo x, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ y $f_n(x) \xrightarrow{ctp} f(x)$.

2.1. Funciones Medibles

Definición 2.1. Una función $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se dice que es una **función medible** si $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$ es medible para todo a. Para simplificar la notación denotamos $\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\}$. [1]

Definición 2.2. Función Simple. Dados $E_1, \ldots, E_N$ con juntos medibles de medida finita, una función f es simple si existe $a_1, \ldots, a_N$ números reales tal que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{I}_{E_k}(x) \tag{2.1}$$

donde $\mathbb{I}_{E_k}(x)$ denota la función indicatriz o función característica de E_k, que vale 1 si $x \in E_k$ y 0 en otro caso. Observar que si imponemos la restricción de que los $a_1, \ldots, a_N$ sean distintos y no nulos y los $E_1, \ldots, E_N$ disjuntos 2 a 2, es fácil ver que hay una única descomposición de la forma (2.1). Además, cualquier función simple se puede llevar a una que cumpla esas dos propiedades.

Observación 2.3. *Pedir $\{f < a\}$ medible para todo a es equivalente a pedir $\{f \leq a\}$ medible para todo a, ya que*

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + 1/k\} \qquad y \qquad \{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq a - 1/k\}.$$

[1] Esto define una función $\mathcal{L} - \mathcal{B}$ medible (con $\mathcal{L}$ la σ-álgebra de Lebesgue), es decir la pre-imagen por f de un boreliano da un conjunto $\mathcal{L}$, no necesariamente es $\mathcal{L} - \mathcal{L}$ medible.

Observación 2.4. *Si $-\infty < f < \infty$, f es medible si y sólo si $f^{-1}(O)$ es medible para todo $O \subset \mathbb{R}$ abierto, si y sólo si $f^{-1}(F)$ es medible para todo $F \subset \mathbb{R}$ cerrado. Observemos que los recíprocos se siguen de la observación anterior. Supongamos que f es medible, sea O abierto, sabemos que $O = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ con $a_i < b_i$, observemos que $f^{-1}((a_i, b_i))$ es medible, por otra parte*

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((a_i, b_i))$$

es decir $f^{-1}(O)$ es unión numerable de conjuntos medibles, y por lo tanto es medible.

Si F es cerrado, F^c es abierto y $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ es medible, como el complemento de un conjunto medible es medible, $f^{-1}(F)$ es medible.

Definición 2.5. Si $-\infty \leq f \leq \infty$, diremos que f es medible si además de ser medible en el sentido de 2.1, se cumple que $f^{-1}(-\infty)$ y $f^{-1}(\infty)$ son medibles.

Observación 2.6. *Es claro que cualquier función continua es medible (se sigue de la observación anterior y de que los abiertos son medibles). Por otra parte, es inmediato que si $-\infty < f < \infty$ y Φ es continua, $\Phi \circ f$ es medible. La composición $f \circ \Phi$ no necesariamente es medible.*

Proposición 2.7. *Si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones medibles, también lo son*

1. $\sup_n f_n$

2. $\inf_n f_n$

3. $\overline{\lim}_n f_n$

4. $\underline{\lim}_n f_n$

Demostración. 1. Basta observar que $\{x : \sup_n f_n(x) > a\} = \cup_n \{f_n > a\}$

2. Observar que $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$.

3. Observar que $\overline{\lim}_n f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$

4. Se sigue de que $\underline{\lim}_n f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$

□

Proposición 2.8. *Si f y g son medibles, $-\infty < f < \infty$ y $-\infty < g < \infty$ entonces $f+g$ y fg son medibles.*

Demostración. Para ver que la suma es medible observar que $f(x) + g(x) < a$ si y sólo si $f(x) < a - g(x)$ si y sólo si existe un racional r tal que $f(x) < r < a - g(x)$ por lo tanto

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{g < a - r\}.$$

Para demostrar que el producto es medible usamos que la suma es medible y que

$$fg = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big).$$

□

Definición 2.9. Dos funciones f, g definidas en $E \subset \mathbb{R}^d$ son **iguales en casi todo punto** si $m\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Se denota $f = g$ ctp.

Proposición 2.10. *Si $f = g$ ctp, f es medible si y sólo si g es medible.*

Demostración. Observemos primero que $\{f = g\}$ es medible ya que es el complemento del conjunto $\{f \neq g\}$ que por tener medida 0 es medible. Por otra parte

$$\{f < a\} = \{f < a\} \cap \{f = g\} \cup \{f < a\} \cap \{f \neq g\} = \{g < a\} \cap \{f = g\} \cup \{f < a\} \cap \{f \neq g\}$$

El conjunto $\{f < a\} \cap \{f \neq g\}$ es medible por ser un subconjunto de un conjunto de medida nula. Por lo tanto $\{g < a\}$ es medible si y solo si $\{f < a\}$ es medible. $\square$

2.2. Teoremas de aproximación

Una función $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$ es simple si los E_k son medibles de medida finita. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad que los a_i son no nulos, distintos, y los E_k son disjuntos 2 a 2.

Teorema 2.11. *Sea f medible definida en $\mathbb{R}^d$ a valores reales, no negativa, entonces existen funciones simples $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ no negativas tal que para todo $k > 0$, $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$ y*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \forall x.$$

Demostración. Definimos la sucesión de funciones

$$\tilde{\varphi_k}(x) = \sum_{i=1}^{k2^k-1} \frac{i}{2^k} \mathbb{I}_{\{x: f(x)\in[i/2^k,(i+1)/2^k)\}} + k\mathbb{I}_{\{x: f(x)>k\}}.$$

Observar que $0 \leq \tilde{\varphi_k}(x) \leq \tilde{\varphi}_{k+1}(x) \leq f(x)$ para todo x y para todo k. Además si $f(x) \leq k$, $f(x) - \tilde{\varphi_k}(x) < 1/2^k$, por otra parte si $f(x) = 0$, $\tilde{\varphi_k}(x) = 0$ para todo k, y, fijado k los conjuntos

$$\Big\{x : f(x) \in [i/2^k, (i+1)/2^k)\Big\}_i$$

son disjuntos 2 a 2 pero no necesariamente son de medida finita, para eso consideramos Q_k una sucesión de cubos crecientes a todo $\mathbb{R}^d$ y definimos $\varphi_k = \tilde{\varphi_k}\mathbb{I}_{Q_k}$. $\square$

Teorema 2.12. *Sea f medible definida en $\mathbb{R}^d$ a valores reales, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que para todo $k > 0$, $|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$ y*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \quad \forall x.$$

Demostración. Por el teorema anterior existen φ_k^+ y φ_k^- sucesiones tal que $\varphi_k^+ \to f^+$, y $\varphi_k^- \to f^-$. Definimos $\varphi_k(x) = \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x)$. Es claro que $\varphi_k(x) \to f(x)$ para todo x. Observar además que si $f^-(x) = 0$ entonces $\varphi_k^-(x) = 0$ para todo k y si $f^+(x) = 0$, $\varphi_k^+(x) = 0$ para todo k. Por lo tanto $|\varphi_k(x)| = \varphi_k^+(x) + \varphi_k^-(x)$. $\square$

Teorema 2.13. *Sea f medible en $\mathbb{R}^d$ entonces existe una sucesión de funciones ψ_k tal que $\psi_k = \sum_{j=1}^{M(k)} a_j^k \mathbb{I}_{R_j^k}$ donde los R_j^k son rectángulos y $\psi_k(x) \to f(x)$ ctp x.*

Demostración. Por el teorema anterior basta aproximar funciones de la forma $f = \mathbb{I}_E$ con E medible por funciones de la forma $\psi_k = \sum_{j=1}^{M(k)} a_j^k \mathbb{I}_{R_j^k}$. Vamos a suponer primero que $m(E) < \infty$, en caso contrario intersectamos E con una sucesión de cubos creciente. Por el punto 2 del Teorema 1.20, para todo $\epsilon > 0$ existen $Q_1, \dots, Q_N$ cubos cerrados tal que $m(E \triangle \cup_{n=1}^{N} Q_i) < \epsilon$. Extendiendo los lados de estos cubos podemos construir una grilla de rectángulos casi disjuntos $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_M$ tal que $\cup_{j=1}^{N} Q_i = \cup_{j=1}^{M} \tilde{R}_j$. Para cada rectángulo $\tilde{R}_i$ podemos construir un rectángulo $R_i \subset \tilde{R}_i$, de modo que los $R_1, \ldots, R_M$ sean disjuntos y tal que

$$m\Big(E \triangle \bigcup_{j=1}^{M} R_j\Big) < 2\epsilon,$$

por lo tanto la función $\mathbb{I}_E$ es igual a la función $\sum_{j=1}^{M} \mathbb{I}_{R_j}$ excepto en un conjunto de medida menor o igual que 2ϵ. Por lo tanto para cada k, podemos encontrar una función ψ_k de la forma $\sum_{j=1}^{M} \mathbb{I}_{R_j}$ tal que el conjunto $E_k = \{x : f(x) \neq \psi_k(x)\}$ tiene medida de Lebesgue menor o igual que 2^{-k}. Definamos $F_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_j$, es una sucesión decreciente de conjuntos, y $m(F_k) < \infty$ para todo k, por lo tanto si definimos $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$, por la continuidad de la medida $m(F) = 0$. Observar que $F = \overline{\lim}_k F_k$ y el limite superior de conjuntos esta formado por los x que están en infinitos F_k, por lo tanto si $x \notin F$ entonces existe un k_0 (que depende de x) a partir del cual $x \notin E_k$ para todo $k > k_0$, es decir $f(x) = \psi_k(x)$ para todo $x \in E_k$, de donde $\psi_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in F^c$. □

Antes de enunciar los próximos dos teoremas recordemos que, dada una sucesión de funciones f_n, denotamos $f_n \rightrightarrows f$ si f_n converge a f uniformemente, es decir $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por otra parte, denotamos $f_n \xrightarrow{ctp} f$ si f_n converge puntualmente a f a menos de un conjunto de medida nula, es decir si $m(\{x : f_n(x) \to f(x)\}^c) = 0$

Teorema 2.14. ***Egorov***. *Sea $f_k : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que $m(E) < \infty$. Supongamos que $f_k \xrightarrow{ctp} f$ en E. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subset E$ cerrado tal que: $m(E \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, y $f_k \rightrightarrows f$ en A_ϵ.*

Demostración. Podemos suponer $f_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$ ya que sino tomamos

$$E = E \setminus \{x \in E : f_k(x) \not\to f(x)\}.$$

Definimos los conjuntos

$$E_k^n = \Big\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < 1/n \;\; \forall j > k\Big\},$$

fijado n tenemos que $E_k^n \subset E_{k+1}^n$ y $\cup_k E_k^n = E$ ya que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$, entonces, como $m(E) < \infty$, $m(E \setminus E_k^n) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Existe $k_n \to \infty$ tal que $m(E \setminus E_{k_n}^n) < 1/2^n$ para todo n. Para todo $x \in E_{k_n}^n$, $|f_j(x) - f(x)| < 1/n$ para todo $j > k_n$. Sea N tal que $\sum_{n=N}^{\infty} 1/2^n < \epsilon/2$, definimos $\tilde{A}_\epsilon = \cap_{n \geq N} E_{k_n}^n$.

$$m(E \setminus \tilde{A}_\epsilon) = m\Big(E \cap \bigcup_{n \geq N} (E_{k_n}^n)^c\Big) = m\Big(\bigcup_{n \geq N} (E \cap (E_{k_n}^n)^c)\Big) \leq \sum_{n \geq N} m(E \setminus E_{k_n}^n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $\delta > 0$ y $n \geq N$ suficientemente grande tal que $1/n < \delta$, si $x \in \tilde{A}_\epsilon$ entonces $x \in E_{k_n}^n$, por lo tanto para todo $j > k_n$, $|f_j(x) - f(x)| < \delta$, entonces $f_k \rightrightarrows f$ en $\tilde{A}_\epsilon$. Sea $A_\epsilon \subset \tilde{A}_\epsilon$, A_ϵ cerrado, tal que $m(\tilde{A}_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon/2$, entonces $m(E \setminus A_\epsilon) < \epsilon$. □

El siguiente teorema prueba que para cualquier función medible definida en un conjunto E con medida finita existe un subconjunto F_ϵ en el cual la función definida en F_ϵ es continua. Es importante tener en cuenta que el teorema no prueba que la función original como función de E en $\mathbb{R}$ es continua en F_ϵ sino que al restringirla a F_ϵ (con la topología relativa de F_ϵ) es continua.

Teorema 2.15. ***Lusin***. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $-\infty < f < \infty$ y $m(E) < \infty$, para todo $\epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \subset E$ cerrado tal que $m(E \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ y $f : F_\epsilon \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Sea $f_n = \sum_{k=1}^{M(n)} a_k^n \mathbb{I}_{R_k^n}$ una sucesión de funciones como en el Teorema 2.13, tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$. Estas funciones son continuas salvo en los puntos del borde de los rectángulos. Podemos tomar E_n tal que $m(E_n) < 1/2^n$ y f_n es continua fuera de E_n (por ejemplo quitando entornos de los bordes de R_k^n). Por el Teorema de Egorov existe $A_{\epsilon/3}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en $A_{\epsilon/3}$ y $m(E \setminus A_{\epsilon/3}) < \epsilon/3$. Sea

$$F' = A_{\epsilon/3} \setminus \bigcup_{n \geq N} E_n$$

donde N es tal que $\sum_{n \geq N} 1/2^n < \epsilon/3$. Para todo $n \geq N$, f_n es continua en F' lo cual implica que f es continua en F'. Tomamos ahora $F_\epsilon \subset F'$ tal que F_ϵ es cerrado y $m(F \setminus F_\epsilon) < \epsilon/3$. $\square$

Observar que el resultado anterior se demuestra usando que una función simple se puede aproximar por una función escalera (Teorema 2.13). Esta construcción es posible en $\mathbb{R}^d$ únicamente. El análogo del Teorema de Lusin para medidas abstractas, requiere de otras herramientas topológicas como el Lema de Urysohn.

2.3. Integral de Lebesgue

2.3.1. Integral de funciones simples

Consideremos una función simple $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$, de aquí en adelantes supondremos sin pérdida de generalidad que los $E_1, \ldots, E_n$ son disjuntos 2 a 2, medibles, con medida finita, y $a_1, \ldots, a_n$ son todos distintos y no nulos (en este caso la descomposición es única). Definimos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n a_k m(E_k) \qquad y \qquad \int_E \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathbb{I}_E(x)dx,$$

observar que $\varphi(x)\mathbb{I}_E(x)$ es también una función simple.

Proposición 2.16. ***Linealidad.*** *Sean $\varphi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}$ y $\psi = \sum_j b_j \mathbb{I}_{B_j}$ funciones simples y a y b números reales positivos, entonces*

$$\int (a\varphi + b\psi) = a\int \varphi + b\int \psi$$

Demostración. Daremos un esquema de la demostración: primero observemos que $a\varphi + b\psi$ es una función simple, por lo tanto la podemos escribir como $a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^L c_k \mathbb{I}_{C_k}$ con los $C_1, \ldots, C_L$ disjuntos 2 a 2, y los $c_1, \ldots, c_L$ distintos y no nulos. Consideramos la partición $\mathcal{P} = \{A_i \cap B_j\}_{i,j}$ y agrupamos en un sólo C_k aquellos elementos de $\mathcal{P}$ tal que $a_i + b_j = c_k \neq 0$. Observar que $m(A_i) = \sum_j m(A_i \cap B_j)$ y $m(B_j) = \sum_i m(B_j \cap A_i)$. $\square$

Corolario 2.17. *Si E y F son disjuntos con medida finita y φ es una función simple*

$$\int_{E \cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

Demostración. Observar que, como F y E son disjuntos, $\mathbb{I}_{E\cup F} = \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_F$, y que $\varphi\mathbb{I}_E$, $\varphi\mathbb{I}_F$ y $\varphi\mathbb{I}_{E\cup F}$ son funciones simples. $\square$

Proposición 2.18. ***Monotonía.*** *Si φ y ψ son funciones simples tal que $\varphi \leq \psi$ entonces*

$$\int \varphi \leq \int \psi$$

Demostración. Primero observemos que si η es una función simple no negativa, su integral es no negativa, por lo tanto proposición se sigue de que $\psi - \varphi$ es no negativa. $\square$

Proposición 2.19. *Si φ es una función simple,*

$$\Big|\int \varphi\Big| \leq \int |\varphi|.$$

Demostración. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} E_k$ entonces $|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mathbb{I}_{E_k}$, observar que en esta última descomposición los coeficientes no necesariamente son distintos, para eso si $a_i = -a_{i'}$ para $i \neq i'$, definimos $c_i = a_i$ y $C_i = E_i \cup E_{i'}$, con lo cual podemos escribir $|\varphi| = \sum_{i=1}^{L} c_i \mathbb{I}_{C_i}$ con los c_i no nulos y distintos 2 a 2 y los C_i disjuntos. Por lo tanto

$$\Big|\int \varphi\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k m(E_k)\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| m(E_k) = \sum_{k=1}^{L} c_k m(C_k) = \int |\varphi|.$$

$\square$

Definición 2.20. El **soporte** de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible es el conjunto $sop(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$. Observar que $sop(f)$ es medible ya que es igual a $(f^{-1}(0))^c$.

Lema 2.21. *Sea f acotada con soporte E de medida finita y φ_n una sucesión de funciones simples, uniformemente acotadas y con soporte E tal que $\varphi_n \xrightarrow{ctp} f$. Entonces*

1. $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$ *existe*
2. *Si $f = 0$ ctp entonces* $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0$

Demostración.

1. Por el Teorema de Egorov, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subset E$ cerrado tal que $m(E \backslash A_\epsilon) < \epsilon$ y $\varphi_n \rightrightarrows f$ en A_ϵ. Como las φ_n tienen soporte E, por la Proposición 2.19

$$\Big|\int \varphi_n - \int \varphi_m\Big| \leq \int_E |\varphi_n - \varphi_m| = \int_{A_\epsilon} |\varphi_n - \varphi_m| + \int_{E\backslash A_\epsilon} |\varphi_n - \varphi_m|.$$

Como $\varphi_n \rightrightarrows f$ en A_ϵ, podemos tomar $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que si $n, m > n_0$, $|\varphi_n - \varphi_m| < \epsilon$. Por lo tanto

$$\int_{A_\epsilon} |\varphi_n - \varphi_m| \leq \epsilon m(A_\epsilon).$$

Para acotar la segunda integral denotemos M la cota (uniforme) de la sucesión de funciones φ_n. Podemos acotar $|\varphi_n - \varphi_m| < 2M$, por lo tanto

$$\int_{E\backslash A_\epsilon} |\varphi_n - \varphi_m| \leq 2M m(E \setminus A_\epsilon) \leq 2M\epsilon.$$

Finalmente,

$$\Big|\int \varphi_n - \int \varphi_m\Big| \leq m(A_\epsilon)\epsilon + 2M\epsilon \leq m(E)\epsilon + 2M\epsilon,$$

de donde se sigue que la sucesión $\int \varphi_n$ es de Cauchy, y por lo tanto converge.

2. Nuevamente aplicamos el Teorema de Egorov y obtenemos $A_\epsilon \subset E$ tal que $\varphi_n \rightrightarrows 0 = f$ en A_ϵ, razonando igual que antes obtenemos que $|\varphi_n| \leq m(E)\epsilon + M\epsilon$.

$\square$

Sin la hipótesis de que las funciones φ_n sean uniformemente acotadas, puede existir $\lim \int \varphi_n$, pero no ser igual a $\int f$. Basta tomar $n\mathbb{I}_{[0,1/n]}$.

2.4. Integral de funciones acotadas

El lema anterior permite definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas con soporte de medida finita:

Definición 2.22. Sea f acotada con soporte E de medida finita, definimos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx$$

donde φ_n es cualquier sucesión de funciones simples uniformemente acotadas con soporte E.

El punto 2. del lema y la linealidad de la integral de funciones simples implican que la definición anterior no depende de la sucesión (que cumpla las hipótesis antes mencionadas).

Definición 2.23. Sea E tal que $m(E) < \infty$ y f acotada con $m(sop(f)) < \infty$, definimos

$$\int_E f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{I}_E dx.$$

La siguiente proposición es una consecuencia de la validez de esos mismos resultados para funciones simples.

Proposición 2.24. *Sean f, g funciones acotadas con soporte de medida finita*

1. $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$
2. *Si E y F son disjuntos* $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$
3. *Si* $f \leq g$, $\int f \leq \int g$
4. $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

Teorema 2.25. ***Teorema de convergencia acotada.*** *Sea f_n una sucesión de funciones medibles, acotadas por M y con soporte $sop(f_n) = E$ de medida finita, tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$. Entonces f es medible, acotada en E (ctp x) y $\int |f_n - f| \to 0$, en particular $\int f_n \to \int f$.*

Demostración. f es medible por ser límite de funciones medibles, y es acotada por ser límite de acotadas. Por el Teorema de Egorov existe $A_\epsilon \subset E$ tal que $m(E \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ y $f_n \rightrightarrows f$ en A_ϵ. Por lo tanto, para n suficientemente grande,

$$\int |f_n - f| \leq \int_{A_\epsilon} |f_n - f| + \int_{E\setminus A_\epsilon} |f_n - f| \leq \epsilon m(E) + 2Mm(E \setminus A_\epsilon).$$

□

Proposición 2.26. *Si $f \geq 0$ es acotada y $sop(f) = E$ con $m(E) < \infty$ y $\int f = 0$ entonces $f = 0$ ctp.*

Demostración. Definimos $E_k = \{x \in E : f(x) \geq 1/k\}$, entonces $k^{-1}\mathbb{I}_{E_k}(x) \leq f(x)$, por lo tanto $k^{-1}m(E_k) \leq \int f = 0$. Es decir $m(E_k) = 0$ para todo k. Finalmente observar que $\{x : f(x) > 0\} \subset \cup_k E_k$. □

2.5. Integral de Riemann VS Integral de Lebesgue

Denotaremos en esta sección $\int^R$ la integral de Riemann y $\int^L$ la integral de Lebesgue. Es claro que hay funciones Lebesgue integrables que no son Riemann integrables, por ejemplo $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ ya que es discontinua en todo $[0,1]$. Sin embargo, si una función es Riemann integrable (en $[a,b]$), es Lebesgue Integrable en $[a,b]$ como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.27. *Supongamos que f es Riemann integrable en $[a,b]$ entonces f es medible y*

$$\int_{[a,b]}^{R} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{L} f(x)dx.$$

Demostración. Por definición si f es R.I. es acotada por un cierto M, existen φ_k y ψ_k sucesiones tal que $|\varphi_k| < M$, $|\psi_k| < M$ para todo k,

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq \psi_3 \leq \psi_2 \leq \psi_1$$

y

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{R} \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{R} \psi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{R} f(x)dx. \tag{2.2}$$

Podemos escribir

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{k} a_i^k \mathbb{I}_{E_i}$$

con E_i intervalos disjuntos 2 a 2. Es fácil ver que en este caso

$$\int_{[a,b]}^{R} \varphi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{L} \varphi_k(x)dx$$

ya que es válido para $\varphi_k = \mathbb{I}_E$ con $E \subset [a,b]$ un intervalo, y luego se usa la linealidad.

Veamos que

$$\int_{[a,b]}^{L} \varphi_k(x)dx \to \int_{[a,b]}^{L} f(x)dx.$$

Como la sucesión de funciones φ_k es no decrecientes, y están acotadas superiormente, existe $\tilde{\varphi} = \lim_k \varphi_k$, medible y acotada. Análogamente como la sucesión ψ_k es no crecientes y están acotadas por abajo por f existe $\tilde{\psi}$ tal que $\tilde{\psi} = \lim_k \psi_k$, por lo tanto $\tilde{\psi}$ es medible y acotada. Observemos que $\tilde{\varphi} \leq f \leq \tilde{\psi}$. Por el Teorema 2.25

$$\int_{[a,b]}^{L} \varphi_k(x)dx \to \int_{[a,b]}^{L} \tilde{\varphi}(x)dx \qquad y \qquad \int_{[a,b]}^{L} \psi_k(x)dx \to \int_{[a,b]}^{L} \tilde{\psi}(x)dx.$$

Por (2.2) tenemos que

$$\int_{[a,b]}^{L} (\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x))dx = 0,$$

como $\psi_k - \varphi_k \geq 0$ tenemos que $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi} \geq 0$ y por lo tanto por la Proposición 2.26 $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$ ctp y $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = f$ ctp de donde se deduce que f es medible y

$$\int_{[a,b]}^{R} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{L} f(x)dx.$$

□

Para el caso de integrales impropias ver la observación 2.37.

2.6. Integral de funciones positivas, no acotadas

Vamos a extender la integral de Lebesgue a $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ medible tal que $f \geq 0$. Recordar que esto quiere decir que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\}$ es medible, y además $f^{-1}(\infty)$ es medible. Definimos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sup_{g \in G_f} \int g(x)dx$$

donde

$$G_f = \Big\{ g : 0 \leq g \leq f, \ g \ \text{ es medible, acotada y } \ m(sop(g)) < \infty \Big\}.$$

Se dice que f es Lebesgue integrable (o simplemente integrable) si $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx < \infty$. Definimos, para $E \subset \mathbb{R}^d$ medible,

$$\int_E f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{I}_E(x)dx.$$

Observar que no estamos pidiendo que $m(E) < \infty$.

Proposición 2.28. *Sean f, g funciones positivas a valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, medibles y a, b reales positivos.*

1. $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$.
2. *Si E y F son disjuntos* $\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$.
3. *Si* $0 \leq f \leq g$, $\int f \leq \int g$, *en particular si g es integrable entonces f es integrable.*
4. *Si f es integrable entonces $f < \infty$ ctp.*
5. *Si* $\int f = 0$ *entonces* $f(x) = 0$ *ctp.*

Demostración.

1. Para probar 1 supongamos primero que $a = b = 1$. Sean $\varphi \leq f$ y $\psi \leq g$, ambas acotadas con soporte con medida finita. Es claro que $\varphi + \psi$ es acotada con soporte con medida finita y $\varphi + \psi \leq f + g$. Por otra parte, por definición

$$\int f + g = \sup_{h \in G_{f+g}} \int h.$$

El conjunto G_{f+g} contiene al conjunto de los pares de funciones φ, ψ medibles, acotadas con soporte con medida finita, tal que $\varphi \leq f, \psi \leq g$, por lo tanto

$$\sup_{h \in G_{f+g}} \int h \geq \sup_{\varphi \leq f, \psi \leq g} \int \varphi + \psi.$$

Por la linealidad de la integral de las funciones medibles, acotadas, con soporte con medida finita,

$$\sup_{\varphi \leq f, \psi \leq g} \int \varphi + \int \psi = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi + \sup_{\psi \leq g} \int \psi = \int f + \int g.$$

Para probar la otra desigualdad sea $\eta \leq f + g$, $\eta \in G_{f+g}$, y $\eta_1(x) = \text{mín}\{f(x), \eta(x)\}$. Tenemos que $0 \leq \eta_1 \leq \eta$, definimos $\eta_2 = \eta - \eta_1$. Observar que $0 \leq \eta_2 \leq \eta$, por lo tanto η_1 y η_2 son acotadas con soporte en un conjunto de medida finita. Además $\eta_1 \leq f$ y $\eta_2 \leq g$ ya que si $\eta_1 = f$, $\eta - f \leq g$ y si $\eta_1 = \eta$, $\eta - \eta_1 = 0$. Por lo tanto

$$\int \eta = \int \eta_1 + \eta_2 = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leq \int f + \int g,$$

tomando supremo en $\eta \in G_{f+g}$ se obtiene la desigualdad.

2 Se sigue de 1.

3 Es inmediato a partir de la definición y del punto 3 de la Proposición 2.24.

4 Denotemos $E_k = \{x : f(x) > k\}$, observar que es una familia de conjuntos medibles, y decrecientes con k que decrecen al conjunto $\{x : f(x) = \infty\}$, por otra parte $km(E_k) \leq \int_{E_k} f$ por el punto 3 ya que $k\mathbb{I}_{E_k} \leq f\mathbb{I}_{E_k}$, además $\int_{E_k} f < \int f < \infty$ con lo cual $m(E_k) \to 0$. Esto, junto con la continuidad de la medida, prueban que $m(\{x : f(x) = \infty\}) = 0$.

5 Se sigue de que $\int f = 0$ implica que $\int g = 0$ para todo $g \in G_f$ lo cual implica que $g = 0$ por la Proposición 2.26 .

$\square$

Lema 2.29. ***Lema de Fatou.*** *Sea f_n una sucesión de funciones medibles, $f_n \geq 0$ para todo n. Si $f_n \xrightarrow{ctp} f$ entonces*

$$\int f \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración. Sea $g \in G_f$ y $g_n(x) = \min\{g(x), f_n(x)\}$, observar g_n es medible con soporte incluido en el soporte de g. Observar que $g_n \xrightarrow{ctp} g$ ya que $f_n \xrightarrow{ctp} f \geq g$ y las g_n son uniformemente acotadas por g que es acotada. Por el Teorema 2.25 tenemos que

$$\int g_n \to \int g.$$

Por construcción $g_n \leq f_n$ con lo cual $\int g_n \leq \int f_n$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n,$$

entonces

$$\int g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n.$$

Tomando supremo en $g \in G_f$, obtenemos

$$\int f \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n.$$

$\square$

Observación 2.30. *De manera análoga se puede probar que si f_n es una sucesión cualquiera de funciones no negativas, medibles, (no necesariamente convergentes ctp a una f) entonces $\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n$, además, la desigualdad es estricta: basta considerar $f_{2n} = \mathbb{I}_{[0,1/2]}$ y $f_{2n+1} = \mathbb{I}_{[1/2,1]}$.*

Corolario 2.31. *Sea $f \geq 0$ medible y f_n una sucesión de funciones medibles, no negativas, tal que $f_n(x) \leq f(x)$ y $f_n \xrightarrow{ctp} f$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Demostración. Primero observar que f es no negativa y medible. Como $f_n \leq f$ tenemos que $\int f_n \leq \int f$ por lo tanto tomando límite superior

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Finalmente la tesis se sigue del Lema de Fatou ya que

$$\int f \leq \underline{\text{lím}}_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

En el corolario anterior, cualquiera de las integrales anteriores puede ser infinito. En particular tenemos el siguiente corolario,

Corolario 2.32. *1. Sea $f_n \uparrow f$ una sucesión de funciones medibles, no negativas, crecientes a cierta f entonces*

$$\int f_n \to \int f$$

2. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ donde las funciones $a_k(x) \geq 0$ y son medibles para todo k, entonces

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx,$$

en particular si $\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx < \infty$ entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) < \infty$ ctp.

Demostración. El punto 1 es una consecuencia inmediata del corolario anterior. Para probar el punto 2 definimos

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = f(x)$$

Por el punto 1 $\int f_n \to \int f$, es decir,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int a_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)$$

□

El punto 1 del corolario anterior se conoce usualmente como **teorema de convergencia monótona** y así nos referiremos a el más adelante.

Una consecuencia interesante del punto 2 del corolario anterior es el lema de Borel-Cantelli. Recordemos la definición de límite superior de conjuntos: dada una familia numerable de conjuntos $E_1, E_2, \ldots$

$$\overline{\text{lím}}_k E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Lema 2.33. ***Lema de Borel-Cantelli.*** *Si $E_1, E_2, \ldots$ son conjuntos medibles tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty \quad \text{entonces} \quad m(\overline{\text{lím}}_k E_k) = 0.$$

Demostración. Definimos $a_k(x) = \mathbb{I}_{E_k}(x)$. Recordar que $x \in \overline{\text{lím}}_k E_k$ si y sólo si x pertenece a infinitos E_k, y esto se da si y sólo si $\sum_k a_k(x) = \infty$. Observemos que $\sum_k m(E_k) < \infty$ es equivalente a $\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx < \infty$, por el corolario anterior parte 2, $\int \sum_k a_k(x)dx < \infty$ y por lo tanto $\sum_k a_k(x) < \infty$ ctp. □

2.7. Integral de Lebesgue, caso general

Si $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es medible, decimos que es **integrable Lebesgue** si $|f|$ es integrable (en el sentido dado en la sección 2.6). En este caso definimos

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

donde, recordemos que, $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ y $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Observar que f^+ y f^- están acotadas por $|f|$ por lo tanto son integrables. La definición anterior no depende de la descomposición que tomemos (en funciones positivas): sean g_1, g_2 positivas, integrables, tal que $f = g_1 - g_2$, entonces $f^+ + g_2 = g_1 + f^-$ y son ambas positivas, por lo tanto podemos usar la linealidad de la integral y obtenemos

$$\int g_1 + f^- = \int f^+ + g_2 = \int f^+ + \int g_2 = \int g_1 + \int f^-,$$

por lo tanto

$$\int f^+ - \int f^- = \int g_1 - \int g_2.$$

Observación 2.34. *Si f es integrable Lebesgue entonces $f(x) < \infty$ ctp. Además si f, g son integrable Lebesgue su suma lo es.*

Dejamos como ejercicio verificar que la integral de Lebesgue es lineal, monótona, y cumple la desigualdad triangular.

Proposición 2.35. *Sea f integrable, para todo $\epsilon > 0$,*

1. *existe B de medida finita tal que*
$$\int_{B^c} |f| < \epsilon,$$
2. *existe $\delta > 0$ tal que para todo E medible con $m(E) < \delta$,*
$$\int_E |f| < \epsilon.$$

Demostración. Podemos suponer en ambos casos que $f \geq 0$.

1. Sea $f_n(x) = f(x)\mathbb{I}_{B(0,n)} \uparrow f$, y son positivas y medibles, podemos usar el Corolario 2.32, por lo tanto
$$\int f_n(x)dx \to \int f(x)dx$$
y tomando n suficientemente grande,
$$0 \leq \int f - \int f_n \leq \epsilon.$$
Por lo tanto, para n suficientemente grande,
$$\int f - \int f_n = \int f(1 - \mathbb{I}_{B(0,n)}) = \int f\mathbb{I}_{B(0,n)^c} < \epsilon.$$

2. En este caso definimos $f_n(x) = f(x)\mathbb{I}_{E_n}$ con $E_n = \{x : f(x) \leq n\}$. Es claro que $f_n \uparrow f$, por lo tanto existe $N = N(\epsilon)$ tal que
$$\int (f - f_N) < \frac{\epsilon}{2}.$$
Sea $\delta > 0$ tal que si $m(E) < \delta$, $N\delta < \epsilon/2$, entonces
$$\int_E f = \int_E (f - f_N + f_N) = \frac{\epsilon}{2} + \int_E f_N \leq \frac{\epsilon}{2} + Nm(E) \leq \epsilon.$$

□

Teorema 2.36. ***Teorema de convergencia dominada*** . *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$. Supongamos que existe g integrable tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ ctp x. Entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Demostración. Sea $E_N = \{x \in B(0, N) : g(x) \leq N\}$ razonando igual que en la proposición anterior parte 1, para todo $\epsilon > 0$ podemos tomar N suficientemente grande tal que
$$\int_{E_N^c} |g| < \epsilon.$$

Fijado N, $f_n\mathbb{I}_{E_N} \leq g\mathbb{I}_{E_N} \leq N$ para todo n, y $|f(x)| \leq g(x)$ entonces $|f_n - f|\mathbb{I}_{E_N} \leq 2N$. Por otra parte observemos que $|f_n - f|\mathbb{I}_{E_N} \xrightarrow{ctp} 0$, por lo tanto si usamos el Teorema 2.25
$$\text{para todo } N \text{ fijo} \qquad \int_{E_N} |f_n - f| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$
Finalmente, si usamos que $|f_n - f| \leq 2|g|$,
$$\int |f_n - f| = \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2\int_{E_N^c} |g| = \int_{E_N} |f_n - f| + 2\epsilon,$$
ahora se toma límite en $n \to \infty$, y se obtiene
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \leq 2\epsilon,$$
como ϵ es arbitrario se obtiene,
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

□

Observación 2.37. *Volviendo a la relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue, una consecuencia interesante del teorema de convergencia dominada es que si f es una función Riemann Integrable en $[0, b]$ para todo $b > 0$ y Lebesgue integrable en $[0, \infty)$ entonces*
$$\int_{[0,\infty)}^{L} f dm = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x) dx.$$
Donde, por el Teorema 2.27, la integral de la derecha puede ser la de Riemann o la de Lebesgue. No obstante puede pasar que exista el límite a la derecha en la expresión anterior pero la función no ser Lebesgue integrable, como en $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(-1)^n \mathbb{I}_{(n,n+1)}$.

2.7.1. Funciones complejas

Sea $f(x) = u(x) + iv(x)$ con $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, se dice que f es medible si u y v son medibles. Se dice que f es integrable si $\|f\|$ es integrable. Observar que f es integrable si y sólo si u y v son integrables ya que: $|u(x)| \leq \|f(x)\|$, $|v(x)| \leq \|f(x)\|$ y $\|f(x)\| \leq |u(x)|+|v(x)|$ ya que en general si $a, b \geq 0$ $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Definimos la integral de f como

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx.$$

2.8. Completitud de L^1

Hemos probado que el conjunto de funciones medibles e integrables de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}$ forman un espacio vectorial que denotamos $\mathcal{V}$. Si queremos definir en $\mathcal{V}$ una norma, lo más intuitivo es definir $\|f\| = \int |f|$ la cual ya vimos que cumple la desigualdad triangular. Obviamente es mayor o igual que 0, pero tiene un problema, puede ser $\int |f| = 0$ pero la función f no ser la función nula (aunque sabemos que si $\int |f| = 0$ entonces $f = 0$ ctp). Este problema se resuelve cocientando $\mathcal{V}$ por una relación de equivalencia: $f \sim g$ si $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, la cual hace que en el cociente si $f = 0$ ctp su clase de equivalencia es la del 0. Se deja como ejercicio ver que $\sim$ es una relación de equivalencia. Si $f \in \mathcal{V}$ y modificamos sus valores funcionales en un conjunto de medida nula, el resultado es una función que pertenece a la clase de f en dicha relación de equivalencia. En el espacio cociente $\mathcal{V}/\sim$ cada función f es una clase de equivalencia (que seguiremos denotando f) a la cual le podemos asignar

$$\|f\| = \int |f|,$$

ahora si, en el cociente, $\|f\|$ define una norma (observar que $\|f\|$ no depende del representante). Definimos el espacio

$$L^1(\mathbb{R}^d) = (\mathcal{V}/\sim, \|\cdot\|).$$

Observar que no es un espacio de funciones sino un espacio de clases de equivalencias por lo tanto no tiene sentido para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ preguntarse por el valor funcional $f(x)$. De forma totalmente análoga se puede definir $L^1(E)$ con $E \subset \mathbb{R}^d$ medible. Veremos algunas propiedades de este espacio, primero enunciaremos las propiedades que cumple $\|\cdot\|$ por ser una norma.

Proposición 2.38. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces*

1. $\|af\| = |a|\|f\|$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$
2. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
3. $\|f\| = 0$ *si y sólo si* $f = 0$ *ctp*
4. $d(f, g) = \|f - g\|$ *es una distancia en* $L^1(\mathbb{R}^d)$

El punto 4 se sigue del 2, el 2 se conoce como desigualdad de Minkowski la demostraremos en un caso más general mas adelante cuando veamos los espacios L^p para $p \geq 1$.

Teorema 2.39. *El espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ es completo con la distancia $d(f, g) = \|f - g\|$.*

Demostración. Tenemos que probar que toda sucesión de Cauchy en $L^1(\mathbb{R}^d)$ converge, para eso es suficiente probar que existe f_{n_k} una subsucesión de f_n, y f, tal que $f_{n_k} \xrightarrow{ctp} f$ (esto prueba que f es medible) y $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que en este caso hacemos $\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|$ y ambos sumandos tienden a 0, con lo cual $f_n \to f$ en L^1.

Como f_n es de Cauchy podemos definir f_{n_k} tal que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1/2^k$ para todo $k \geq 1$, definimos ahora

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \qquad y \qquad g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

Veremos que $f < \infty$ ctp, para eso probaremos primero que g es integrable: por el punto 2 del Corolario 2.32,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k < \infty$$

por lo tanto $\int g < \infty$ y como $|f| \leq g$ tenemos que f es integrable. Esto prueba que $f < \infty$ ctp por lo tanto, como $f_{n_1} < \infty$ ctp tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) < \infty \quad ctp.$$

Para todo $l > 0$

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{l} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) = f_{n_{l+1}}(x) \xrightarrow{ctp} f(x) \quad \text{ cuando } l \to \infty.$$

Usando esta última ecuación vemos que $|f - f_{n_k}| \leq g$, ya que

$$\begin{aligned} |f - f_{n_{k+1}}| =& \Big| f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) - \Big[f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \Big] \Big| \\ =& \sum_{j=k+1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq |g(x)| \end{aligned}$$

con lo cual del teorema de convergencia dominada concluimos que $\int |f - f_{n_k}| \to 0$ o lo que es lo mismo $\|f - f_{n_k}\| \to 0$. □

Un corolario interesante que se sigue de la demostración del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 2.40. *Si f_n es una sucesión de funciones medibles e integrables tal que $\|f_n - f\| \to 0$ existe una subsucesión f_{n_k} medibles e integrables tal que $f_{n_k} \xrightarrow{ctp} f$.*

Demostración. Como $\|f_n - f\| \to 0$ la sucesión f_n es de Cauchy, con lo cual podemos definir f_{n_k} tal que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1/2^k$ para todo $k \geq 1$, definimos ahora

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \qquad y \qquad g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Al igual que antes se prueba que $f_{n_k} \xrightarrow{ctp} f$. □

Teorema 2.41. *Las siguientes familias de funciones son densas en $L^1(\mathbb{R})$,*

1. *Las funciones simples.*
2. *Las funciones escalera $\sum a_k \mathbb{I}_{R_k}$ con R_k rectángulos casi disjuntos.*

3. Las funciones continuas con soporte compacto.

Demostración.

1. El punto 1 se demuestra usando el Teorema 2.12 y el teorema de convergencia dominada (donde acotamos $|f - \varphi_n| \leq 2|f|$).

2. Basta aproximar $\mathbb{I}_E$ con $m(E) < \infty$ por $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{R_k}$ esto se hizo en el Teorema 2.13.

3. En este caso basta aproximar $\mathbb{I}_R$ con R un rectángulo por una función continua, supongamos para simplificar la notación que R es un cubo. Para eso primero definimos $g : [a, b] \to [0, 1]$ con $a < b$ como $g(x) = 1$ si $x \in [a, b]$, $g(x) = 0$ si $x \notin (a - \epsilon, b + \epsilon)$, luego definimos g linealmente entre $(a - \epsilon, a)$ y entre $(b, b + \epsilon)$. En $\mathbb{R}^d$ podemos definir $g(x_1) \dots g(x_d)$.

□

2.9. Integrales iteradas

Consideremos la partición $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, tal que $d_1 + d_2 = d$, $d_1, d_2 \geq 1$. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es medible definimos las funciones $f^y : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ y $f_x : \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ como

$$f^y(x) = f(x, y) \qquad \text{y} \qquad f_x(y) = f(x, y).$$

Más adelante veremos algunos ejemplos de que f medible no implica f^y o f_x medible. Definimos para $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\} \qquad y \qquad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in E\}.$$

Nuevamente que E sea medible no implica que lo sea E^y o E_x, basta definir en $\mathbb{R}^2$, el conjunto que es en $y = 0$ un conjunto no medible. Este conjunto en $\mathbb{R}^2$ tiene medida 0 y por lo tanto es medible, pero E^y no es medible para $y = 0$ (luego veremos que si E es medible entonces para casi todo E^y es medible).

Teorema 2.42. ***Teorema de Fubini.*** *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible e integrable, para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$*

1. f^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$

2. La función

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx = F(y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^{d_2}$ y

3.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)dxdy. \tag{2.3}$$

Demostración. Denotamos $\mathfrak{F}$ al conjunto de las funciones que cumplen los puntos 1, 2 y 3 del teorema. Veremos que $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{F}$, esto lo haremos probando que las funciones simples están en $\mathfrak{F}$ y que $\mathfrak{F}$ es cerrado por pasajes al límite en L^1. A su vez, esto se hará en varios pasos. En el primero veremos que $\mathfrak{F}$ es cerrado por combinaciones lineales, en el segundo que es cerrado por pasaje al límite de sucesiones monótonas. Luego probaremos que $\mathbb{I}_{G_\delta} \in \mathfrak{F}$ para todo $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$ (ver Definición 1.23) y $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$ si $m(E) = 0$. Finalmente que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$ para todo E medible de medida finita, y luego deduciremos de los pasos anteriores que $f \in \mathfrak{F}$ para toda función integrable.

Paso 1: Cerrado por combinaciones lineales.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}$ y $a_1, \ldots, a_n$ números reales. Sean, para $k = 1, \ldots, n$, $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ con $m(A_k) = 0$ tal que f_k^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$ para todo $y \notin A_k$. Definimos $A = \cup_{k=1}^n A_k$, A tiene medida 0 y para todo $y \in A^c$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k^y$$

es medible e integrable. Por la linealidad de la integral también se cumplen los puntos 2 y 3 para S_n.

Paso 2: $\mathfrak{F}$ es cerrado por límites monótonos.

Sea $f_1, f_2, \ldots$ una sucesión de funciones en $\mathfrak{F}$, supongamos que $f_k \uparrow f$ ctp o $f_k \downarrow f$ ctp, y que f es integrable, vamos a demostrar que $f \in \mathfrak{F}$. Para demostrar esto observemos primero que podemos suponer que la sucesión f_k es no decreciente (en el segundo caso tomamos la sucesión no decreciente $-f_k$, y por la linealidad si valen los pasos 1, 2 y 3 para la sucesión $-f_k$ también valen para la f_k). Además si reemplazamos f_k por $f_k - f_1$ podemos suponer que son no negativas. Por el Corolario 2.32 tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y)dxdy \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)dxdy.$$

Al igual que en el paso anterior sean, para $k = 1, \ldots, n$, $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ con $m(A_k) = 0$ tal que f_k^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$ para todo $y \notin A_k$, definimos $A = \cup_{k=1}^\infty A_k$, entonces $m(A) = 0$ y para todo $y \in A^c$, f_k^y es integrable en $\mathbb{R}^{d_1}$ para todo k. Fijado y, las f_k^y son crecientes a f^y, por lo tanto también lo son

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)dx \qquad \text{y} \qquad g_k(y) \uparrow \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx.$$

Como $f_k \in \mathfrak{F}$, las funciones g_k son integrables (respecto a y), si aplicamos nuevamente el Corolario 2.32 obtenemos que,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)dy \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx \Big) dy,$$

como $f_k \in \mathfrak{F}$ para todo k,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y)dxdy \uparrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)dxdy.$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)dxdy < \infty.$$

Esto prueba que

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx < \infty$$

ctp y, de donde se sigue que f^y es integrable ctp y (ya que f^y es positiva), además prueba (2.3) con lo cual $f \in \mathfrak{F}$.

Paso 3: $\mathbb{I}_{G_\delta} \in \mathfrak{F}$ para todo $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$ con $m(G_\delta) < \infty$.

Caso 1: Supongamos $E = Q_1 \times Q_2$ con Q_1 y Q_2 cubos abiertos en $\mathbb{R}^{d_1}$ y $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivamente, veamos que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$. Fijado y, la función $\mathbb{I}_E^y(x)$ es medible e integrable. Definimos

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_E^y(x)dx \; = \begin{cases} |Q_1| & \text{si } y \in Q_2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \; = |Q_1| \mathbb{I}_{Q_2}(y)$$

por lo tanto
$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy = |Q_1||Q_2|.$$
Como
$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_E(x,y)dxdy = |E| = |Q_1||Q_2| = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy$$
se prueba que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Caso 2: Si $E \subset \partial Q$ con Q cubo, veamos que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$. Como $m(\partial Q) = 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_E(x,y) = 0$. Además, para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ el conjunto E^y tiene medida 0 en $\mathbb{R}^{d_1}$. Esto prueba que
$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_E^y(x)dx = 0 \qquad ctp \;\; y$$
con lo cual $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy = 0$ de donde $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Caso 3: Sea $E = \cup_{j=1}^k Q_j$ con $Q_1, \ldots, Q_k$ cubos casi disjuntos. Observemos que
$$\mathbb{I}_E = \sum_{j=1}^k \Big(\mathbb{I}_{int(Q_j)} + \mathbb{I}_{A_j} \Big) \qquad \text{con } A_j \subset \partial Q_j$$
por los casos anteriores $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Caso 4: Sea E es abierto de medida finita entonces $E = \cup_{j=1}^\infty Q_j$ con $Q_1, Q_2, \ldots$ cubos casi disjuntos. Tenemos que
$$f_k = \mathbb{I}_{\cup_{j=1}^k Q_j} \uparrow \mathbb{I}_E$$
por el paso caso anterior $f_k \in \mathfrak{F}$ y por el paso 2 podemos concluir que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Caso 5: Sea $E \in \mathscr{G}_\delta$ de medida finita existen $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \ldots$ tal que
$$E = \bigcap_{k=1}^\infty \tilde{O}_k,$$
como $m(E) < \infty$ por el Lema 1.13 existe O abierto, $E \subset O$ y $m(O) < \infty$, definimos
$$O_k = O \cap \bigcap_{j=1}^k \tilde{O}_j.$$
O_k es una sucesión decreciente de conjuntos de medida finita, y $E = \cap_{j=1}^\infty O_j$. Tenemos entonces $\mathbb{I}_{O_k} \downarrow \mathbb{I}_E$ y $\mathbb{I}_{O_k} \in \mathfrak{F}$ por el caso anterior, entonces por el paso 2 concluimos que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Paso 4: Si E tiene medida 0 entonces $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.
Como E es medible, por el Lema 1.24 existe $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$, $m(G_\delta) = 0$, $E \subset G_\delta$, con lo cual $\mathbb{I}_{G_\delta} \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto
$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_{G_\delta}(x,y)dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{G_\delta} = m(G_\delta) = 0$$
Esto prueba que, para casi todo y
$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_{G_\delta}(x,y)dx = 0.$$

Entonces $m(G_\delta^y) = 0$ ctp y, como $E^y \subset G_\delta^y$, $m(E^y) = 0$ ctp y, con lo cual $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_E(x,y)dx = 0$ ctp y. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbb{I}_E(x,y)dx \Big) dt = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_E,$$

de donde se concluye que $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Paso 5: Para todo medible E con $m(E) < \infty$, $\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$.

Por el Lemma 1.24 existe $G_\delta \in \mathscr{G}_\delta$ tal que $E \subset G_\delta$ y $m(G_\delta \setminus E) = 0$, por lo tanto $\mathbb{I}_{G_\delta \setminus E} \in \mathfrak{F}$ por el paso anterior y $\mathbb{I}_{G_\delta} \in \mathfrak{F}$ por el paso 3, finalmente, por el paso 1

$$\mathbb{I}_E = \mathbb{I}_{G_\delta} - \mathbb{I}_{G_\delta \setminus E} \in \mathfrak{F}.$$

Paso 6: Si f es integrable $f \in \mathfrak{F}$. Primero descomponemos $f = f^+ - f^-$ ambas positivas, por el paso 1 podemos suponer entonces $f \geq 0$. Existe $\varphi_k \uparrow f$, una sucesión de funciones simples que por los pasos anteriores están en $\mathfrak{F}$ y por el paso 2, $f \in \mathfrak{F}$.

□

Si la función no es integrable, pero es positiva, igual tenemos el siguiente resultado (usualmente conocido como Teorema de Tonelli).

Teorema 2.43. *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible tal que $f \geq 0$, para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$*

1. *f^y es medible en $\mathbb{R}^{d_1}$.*

2. *La función*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx = F(y),$$

es medible en $\mathbb{R}^{d_2}$ y

3. $$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy,$$

donde la integral anterior puede ser ∞

Demostración. Definamos las funciones

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } |(x,y)| < k \quad \text{y} \quad f(x,y) < k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

cada f_k es integrable y por el teorema de Fubini exite $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ tal que $f_k^y(x)$ es medible, para todo $y \notin E_k$. En $E = (\cup_k E_k)^c$, f^y es medible. Luego se aplica el Corolario 2.32, dos veces. □

Una aplicación importante del resultado anterior combinado con el teorema de Fubini es la siguiente: supongamos que tenemos f en las hipótesis del Teorema 2.42 excepto que no sabemos si f es integrable, consideramos ahora $|f|$, que está en las hipótesis del Teorema 2.43, en este caso vale el punto 3 para $|f|$, por lo tanto para probar que f es integrable basta probar que la siguiente integral iterada es finita

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} |f^y(x)|dx \Big) dy < \infty,$$

y aplicar el punto 3 del Teorema 2.43. En este caso estaríamos probando que f es integrable, y ahora si podemos aplicar el Teorema 2.42.

Corolario 2.44. *Si E es medible, para casi todo $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ el conjunto E^y es medible en $\mathbb{R}^{d_1}$ y*

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)dy,$$

y lo mismo vale para E^x.

Observación 2.45. *Como mencionamos al comienzo el recíproco del corolario anterior no es cierto, basta tomar $E = [0,1] \times V$ con V no medible, E^y es medible para todo y pero E no es medible ya que si lo fuera por el corolario anterior también lo sería E_x para todo x salvo un conjunto de medida nula, pero $E_x = V$ para todo $x \in [0,1]$. Se puede encontrar además un $E \subset [0,1]^2$ no medible pero que E_x y E^y sean medibles.*

Proposición 2.46. *Si $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ es medible y $m_*(E_2) > 0$ entonces E_1 es medible.*

Demostración. Por el corolario anterior, E^y es medible para casi todo y, y esto es equivalente a que la función $\mathbb{I}^y_{E_1 \times E_2}(x)$ sea medible para casi todo y. Además,

$$\mathbb{I}^y_{E_1 \times E_2}(x) = \mathbb{I}_{E_1}(x)\mathbb{I}_{E_2}(y)$$

Basta ver entonces que podemos tomar $y \in E_2$ en cuyo caso

$$\mathbb{I}^y_{E_1 \times E_2}(x) = \mathbb{I}_{E_1}(x)\mathbb{I}_{E_2}(y) = \mathbb{I}_{E_1}(x) : \mathbb{R}^{d_2} \to \{0,1\}$$

es medible y por lo tanto E_1 sería medible (ya que es la preimagen de 1 por una función medible). Sea $F = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : E^y \text{ es medible } \}$, $m(F^c) = 0$ y por lo tanto $m_*(E_2 \cap F^c) = 0$ con lo cual

$$0 < m_*(E_2) \leq m_*(E_2 \cap F) + m_*(E_2 \cap F^c) = m_*(E_2 \cap F),$$

por lo tanto $E_2 \cap F \neq \emptyset$ como queríamos. $\square$

Lema 2.47. *Si $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ entonces $m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2)$*

Demostración. Sean $\{Q^1_k\}_k$ cubos en $\mathbb{R}^{d_1}$ y $\{Q^2_l\}_l$ cubos en $\mathbb{R}^{d_2}$ tal que

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q^1_k, \qquad E_2 \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q^2_l, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |Q^1_k| \leq m_*(E) + \epsilon, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} |Q^2_l| \leq m_*(E) + \epsilon.$$

Observemos que

$$E_1 \times E_2 \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} Q^1_k \times Q^2_l,$$

entonces

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |Q^1_k \times Q^2_l| = \sum_{k,l=1}^{\infty} |Q^1_k||Q^2_l| =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |Q^1_k|\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} |Q^2_l|\right) \leq (m_*(E_1) + \epsilon)(m_*(E_2) + \epsilon)$$

$\square$

Proposición 2.48. *Sean $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ medibles, entonces $E = E_1 \times E_2$ es medible en $\mathbb{R}^d$ y $m(E) = m(E_1)m(E_2)$.*

Demostración. Es suficiente probar que E es medible ya que $m(E) = m(E_1)m(E_2)$ se sigue de que

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)dy \quad \text{y} \quad m(E^y) = m(E_1)\mathbb{I}_{E_2}(y).$$

Como E_1 y E_2 son medibles existen, para $j = 1, 2$, $G_\delta^j \subset \mathbb{R}^{d_j}$, $G_\delta^j \in \mathscr{G}_\delta^j$, $E_j \subset G_\delta^j$ y $m_*(G_\delta^j \setminus E_j) = 0$. Sabemos que cada $G_\delta^j = \cap_l O_l^j$ donde los $\{O_l^1\}_l$ son abiertos de $\mathbb{R}^{d_1}$ y los $\{O_l^2\}_l$ son abiertos de $\mathbb{R}^{d_2}$.

Definimos el conjunto

$$G_\delta = G_\delta^1 \times G_\delta^2 = \bigcap_{l,m=1}^{\infty} O_l^1 \times O_m^2,$$

G_δ es un conjunto que pertenece a la clase $\mathscr{G}_\delta$ en $\mathbb{R}^d$, además

$$G_\delta \setminus E_1 \times E_2 \subset \Big[(G_\delta^1 \setminus E_1) \times G_\delta^2\Big] \cup \Big[G_\delta^1 \times (G_\delta^2 \setminus E_2)\Big].$$

Si usamos ahora el Lema 2.47 tenemos que

$$m_*\big((G_\delta^1 \setminus E_1) \times G_\delta^2\big) \leq m_*(G_\delta^1 \setminus E_1)m_*(G_\delta^2) = 0,^2$$

ya que $m_*(G_\delta^1 \setminus E_1) = 0$. De igual forma se prueba que $m\big((G_\delta^1 \times (G_\delta^2 \setminus E_2))\big) = 0$ de donde se sigue que $m_*(G_\delta \setminus E) = 0$ y por lo tanto E es medible. $\square$

[2] aquí usamos que si fuese $m_*(E_2) = \infty$ entonces $0 \cdot \infty = 0$

Capítulo 3

Diferenciabilidad

3.1. Función maximal de Hardy-Littlewood

Vamos a arrancar estudiando el problema de encontrar la familia de funciones para las cuales vale que $1/m(B)\int_B f(y)dy \to f(x)$ cuando B es una bola de radio δ que contiene a x y hacemos $\delta \to 0$. Es fácil ver que esta familia contiene a las funciones continuas. Veremos que esto es cierto para toda f integrable, y para casi todo x (es decir, fijada f el conjunto de los puntos para el que no vale tiene medida de Lebesgue 0). Para eso vamos a introducir la siguiente función:

Definición 3.1. Denotamos, para $x \in \mathbb{R}^d$, B_x el conjunto de todas las bolas que contienen a x. Definimos para $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable,

$$f^*(x) = \sup_{B \in B_x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy.$$

Veremos que $f^*(x) \geq |f(x)|$ ctp x y que f^* no es en general integrable.

Teorema 3.2. *Sea f integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces*

1. *f^* es medible.*
2. *$f^*(x) < \infty$ para casi todo x.*
3. *Además*
$$m\big(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}\big) \leq \frac{3^d}{\alpha}\|f\|, \tag{3.1}$$
donde $\|f\|$ es la norma L^1 de f.

Demostración. Para ver que f^* es medible observemos que el conjunto $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ es abierto. Esto se debe a que si $z \in E_\alpha$,

$$\sup_{B \in B_z} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy > \alpha.$$

Por lo tanto existe una bola B' que contiene a z tal que

$$\frac{1}{m(B')} \int_{B'} |f(y)|dy > \alpha.$$

Para todo $y \in B'$, $f^*(y) > \alpha$ ya que en particular B' es una bola que contiene a y. Veamos que del punto 3 se sigue el 2: para eso observemos que $\{x : f^*(x) = \infty\} \subset E_\alpha$ para todo α, por lo tanto

$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Los conjuntos E_n son una familia decreciente y $m(E_1) < \infty$ por (3.1), por lo tanto $m(\cap_n E_n) = \lim_n m(E_n) = 0$ por (3.1), esto prueba el punto 2. Para probar la desigualdad (3.1) vamos a probar algunos resultados de cubrimientos. □

Lema 3.3. *Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ un conjunto de bolas abiertas de $\mathbb{R}^d$, existe un subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por bolas disjuntas, $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$, tal que*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}). \tag{3.2}$$

Demostración. Si dos bolas $B = B(x, r)$ y $B' = B(y, r')$ se intersectan con $r' \leq r$ entonces $B' \subset B(x, 3r)$. Para demostrar el lema procedemos iterativamente, primero definimos $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B}$, sea B_{i_1} la bola de $\mathcal{B}^0$ de radio más grande. Quitamos de $\mathcal{B}^0$ la bola B_{i_1} y todas las bolas de $\mathcal{B}^0$ que cortan a B_{i_1} esto define $\mathcal{B}^1$. De $\mathcal{B}^1$ tomamos B_{i_2} la bola de radio más grande (observar que no corta a B_{i_1}), ahora quitamos de $\mathcal{B}^1$ la bola B_{i_2} y todas las que la intersectan. Si repetimos este procedimiento al final obtenemos $\mathcal{B}^k = \{B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}\}$ un conjunto de bolas disjuntas 2 a 2 y tal que para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $B_{i_j} \in \mathcal{B}^k$ tal que $B \cap B_{i_j} \neq \emptyset$ (en caso contrario podríamos definir $B_{i_{k+1}} = B$), además el radio de la bola B tiene que ser menor o igual que el de B_{i_j} (sino hubiéramos elegido B en lugar de B_{i_j}). Observar que B puede cortar bolas de $\mathcal{B}^k$ con radio más chico que el radio de B pero seguro tiene que cortar una de $\mathcal{B}^k$ con radio más grande. Llamemos x_{i_j} y r_{i_j} el centro y radio de B_{i_j}. Esto prueba que

$$\bigcup_{l=1}^{n} B_l \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, 3r_{i_j}).$$

□

Demostración de (3.1). Sea $K \subset E_\alpha$ compacto, para todo $x \in E_\alpha$ sea B_x tal que

$$m(B_x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy.$$

$K \subset \cup_{x \in E_\alpha} B_x$ por lo tanto existen $B_1, \ldots, B_n$ tal que $K \subset \cup_{l=1}^{n} B_l$. Por el lema anterior existen $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ disjuntas 2 a 2 y tal que se cumple (3.2). Entonces

$$m(K) \leq 3^d \sum_{i=1}^{k} m(B_{i_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)| dy$$

como las bolas son disjuntas

$$\frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)| dy = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\cup_{j=1}^{k} B_{i_j}} |f(y)| dy \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|.$$

Como $K \subset E_\alpha$ es arbitrario $m(E_\alpha) \leq (3^d/\alpha)\|f\|$. □

Teorema 3.4. ***Teorema de diferenciación de Lebesgue.*** *Si f es integrable en $\mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(x) \qquad ctp\ x. \tag{3.3}$$

Demostración. Definamos los conjuntos

$$E_\alpha = \left\{ x : \overline{\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dt - f(x)\right| > \alpha \right\}.$$

Definimos $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$, si $x \in E^c$ se cumple (3.3), por lo tanto basta probar que $m(E_\alpha) = 0$. Por el Teorema 2.41 existe g continua, con soporte compacto, tal que $\|f - g\| < \epsilon$. Si escribimos

$$\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x) = \frac{1}{m(B)}\int_B (f(y) - g(y))dy + \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)dy - g(x) + g(x) - f(x),$$

por lo tanto

$$\left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)\right| \leq \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y) - g(y)|dy + \frac{1}{m(B)}\int_B |g(y) - g(x)|dy + |g(x) - f(x)|.$$

Recordar que,

$$\overline{\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)\right| = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{m(B)<\delta\\ B\in B_x}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)\right|.$$

Acotamos

$$\sup_{\substack{m(B)<\delta\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y) - g(y)|dy \leq (f-g)^*(x).$$

Como g es continua

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{m(B)<\delta\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)}\int_B |g(y) - g(x)|dy = 0.$$

Por lo tanto

$$\overline{\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dt - f(x)\right| \leq (f-g)^*(x) + |g(x) - f(x)|.$$

Denotemos

$$F_{\alpha/2} = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha/2\} \qquad \text{y} \qquad G_{\alpha/2} = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha/2\},$$

observemos que $x \in E_\alpha$ implica que o bien $x \in F_{\alpha/2}$ o $x \in G_{\alpha/2}$, por lo tanto $E_\alpha \subset F_{\alpha/2} \cup G_{\alpha/2}$. Si acotamos

$$m(G_{\alpha/2}) \leq (2/\alpha)\|f - g\|,$$

y por (3.1), $m(F_{\alpha/2}) \leq 2(3^d/\alpha)\|f - g\|$ por lo tanto, para todo α, $m(E_\alpha) \leq 2\epsilon(3^d/\alpha + 1/\alpha)$ y como ϵ es arbitrario $m(E_\alpha) = 0$. $\square$

Observación 3.5. *El teorema anterior implica que $f^*(x) \geq |f(x)|$ ctp si aplicamos (3.3) a $|f|$. Por otra parte, como es local no global vale con una hipótesis de integrabilidad local, para eso definimos las funciones localmente integrables.*

Definición 3.6. Una función medible $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es **localmente integrable** si para toda bola B, $f(x)\mathbb{I}_B$ es integrable. Denotamos $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^d$ (cocientado por la relación de equivalencia que introdujimos para definir L^1).

Tenemos entonces el siguiente resultado inmediato.

Teorema 3.7. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces,*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x) \qquad \textit{ctp } x.$$

Definición 3.8. Si E es medible, $x \in \mathbb{R}^d$ se dice que es un **punto de densidad** de Lebesgue de E si

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1,$$

donde B_x denota el conjunto de bolas que contiene a x.

Es inmediato de la definición anterior que si x es un punto de densidad de Lebesgue de E, para todo $\alpha < 1$ existe una bola B tal que $x \in B$ y $m(B \cap E) > \alpha m(B)$. El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 3.7, aplicado a $\mathbb{I}_E$.

Corolario 3.9. *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ medible, entonces*

- *la medida de los puntos de E que no son de densidad es 0, o lo que es lo mismo casi todo punto $x \in E$ es de densidad.*
- *Casi todo punto que no está en E no es de densidad.*

Definición 3.10. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, el **conjunto de Lebesgue** de f es el conjunto de los x tal que $f(x) < \infty$ y además

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Este conjunto depende del representante que se tome en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, no obstante veremos a continuación que todos son iguales ctp.

Proposición 3.11. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ casi todo punto de $\mathbb{R}^d$ pertenece al conjunto de Lebesgue de f*

Demostración. Por el Teorema 3.7 aplicado a $|f(x) - r|$ (que es localmente integrable), para todo racional r existe E_r con $m(E_r) = 0$ tal que, para todo $x \notin E_r$,

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r|dy = |f(x) - r|.$$

Definimos $E = \cup_{r\in\mathbb{Q}} E_r$. Si $x \notin E$ y $f(x) < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe r racional tal que $|f(x) - r| < \epsilon$. Por lo tanto

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|dy \leq \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\in B_x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - r|dy + |r - f(x)| < 2\epsilon.$$

□

Definición 3.12. Una familia de conjuntos $\{U_\alpha\}_\alpha$ se **contrae de forma regular** a x si existe $c > 0$ tal que para todo U_α existe una bola $B \in B_x$ que contiene a x tal que $U_\alpha \subset B$ y $m(U_\alpha) \geq cm(B)$.

Observación 3.13. *Es fácil ver que la familia de los cubos que contienen a x se contrae de forma regular a x pero no la de los rectángulos que contienen a x.*

Tenemos el siguiente corolario que generaliza el Teorema 3.7.

Corolario 3.14. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, y $\{U_\alpha\}$ es una familia de conjuntos que se contrae de forma regular a x,*

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ x\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = f(x),$$

para todo x en el conjunto de Lebesgue de f.

3.2. Diferenciabilidad

En lo que resta del capítulo estudiaremos bajo que condiciones una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifica

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx. \tag{3.4}$$

En primer lugar es claro que $F'(x)$ tiene que existir para casi todo $x \in [a, b]$. Para lo cual no es suficiente que f sea continua. Más adelante daremos una condición suficiente para que una función sea derivable en casi todo $x \in [a, b]$. No obstante esto no es suficiente para que valga la identidad anterior. Un ejemplo interesante es la función de Cantor: tiene derivada nula para casi todo $x \in [0, 1]$ con lo cual $\int_0^1 F'(x)dx = 0$ pero $F(1) - F(0) = 1$. Para que valga (3.4) se necesita que sea *absolutamente continua* (que implicará, entre otras cosas, que sea de variación acotada, y uniformemente continua).

3.2.1. Funciones de variación acotada

Definición 3.15. Dada $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $P = a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$, la variación de F en P se define como

$$V_F(P) = \sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1})|.$$

Decimos que F es de **variación acotada** en $[a, b]$ si existe $M < \infty$ tal que

$$\sup_P V_F(P) < M,$$

donde el supremo es en el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Ejemplo 3.16. Veamos algunos ejemplos, es inmediato que si F es monótona y acotada es de variación acotada y que si F es Lipschitz (existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$) es de variación acotada. Un ejemplo más interesante es el siguiente, consideremos

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

F es de variación acotada si y sólo si $a > b$.

Definición 3.17. Definimos las funciones

1. **Variación total** hasta x
$$T_F(a,x)=\sup\sum_{j=1}^{n}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$$
donde el supremo es en todas las particiones de $[a,x]$.
2. **Variación positiva** hasta x,
$$P_F(a,x)=\sup\sum_{+}F(t_j)-F(t_{j-1})$$
donde la suma es en todos los j tal que $F(t_j)\geq F(t_{j-1})$ y el supremo es en todas las particiones de $[a,x]$.
3. **Variación negativa** hasta x
$$N_F(a,x)=\sup\sum_{-}-[F(t_j)-F(t_{j-1})]$$
donde la suma es en todos los j tal que $F(t_j)\leq F(t_{j-1})$ y el supremo es en todas las particiones de $[a,x]$.

Es inmediato que las tres funciones son no negativas, y no decrecientes como funciones de x.

Lema 3.18. *Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ a valores reales, supongamos que F es de variación acotada, entonces para todo $a\leq x\leq b$*
$$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x) \tag{3.5}$$
y
$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x) \tag{3.6}$$

Demostración. Vamos a probar primero (3.5). Sea $\epsilon>0$, existe $P=a=t_0<t_1<\ldots<t_n=x$ una partición de $[a,x]$ tal que
$$\Big|P_F(a,x)-\sum_{+}F(t_j)-F(t_{j-1})\Big|<\epsilon \qquad \text{y} \qquad \Big|N_F(a,x)-\sum_{-}-\big[F(t_j)-F(t_{j-1})\big]\Big|<\epsilon \tag{3.7}$$
Esto se sigue de que un refinamiento de una partición no disminuye el valor de $\sum_{+}F(t_j)-F(t_{j-1})$ ni el de $\sum_{-}-[F(t_j)-F(t_{j-1})]$. [1]

Si descomponemos $F(x)-F(a)$ por medio de una suma telescópica y separamos los términos con incremento positivo ($F(t_j)\geq F(t_{j-1})$) de los que tienen incremento negativo ($F(t_j)\leq F(t_{j-1})$),
$$F(x)-F(a)=\sum_{j=1}^{n}F(t_j)-F(t_{j-1})=\sum_{+}F(t_j)-F(t_{j-1})+\sum_{-}F(t_j)-F(t_{j-1}) \tag{3.8}$$
el segundo término lo podemos escribir como $-\sum_{-}-[F(t_j)-F(t_{j-1})]$, por lo tanto de (3.7) y (3.8) tenemos que, para todo $\epsilon>0$,
$$\Big|F(x)-F(a)-[P_F(a,x)-N_F(a,x)]\Big|<2\epsilon,$$
lo cual prueba (3.5). Para probar (3.6) observemos que
$$\sum_{j=1}^{n}|F(t_j)-F(t_{j-1})|=\sum_{+}F(t_j)-F(t_{j-1})+\sum_{-}-[F(t_j)-F(t_{j-1})] \tag{3.9}$$

[1] para eso basta estudiar que pasa cuando se se agrega un punto t^* en un intervalo (t_i,t_{i+1}).

Si tomamos supremo a la derecha en (3.9), en las particiones de $[a,x]$

$$\sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq P_F(a,x) + N_F(a,x),$$

y si tomamos ahora supremo a la izquierda obtenemos que $T_F(a,x) \leq P_F(a,x) + N_F(a,x)$. Si ahora tomamos supremo a la izquierda en (3.9)

$$\sum_{+} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{-} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \leq T_F(a,x).$$

$\square$

Una consecuencia importante de este lema, que nos servirá para probar que las funciones de variación acotada son derivables en casi todo punto, es el siguiente teorema:

Teorema 3.19. *Una función F a valores reales, definida en $[a,b]$, es de variación acotada si y sólo si F es la diferencia de dos funciones no decrecientes y acotadas.*

Demostración. Si $F = F_1 - F_2$ con F_1 y F_2 no decrecientes y acotadas, entonces F_1, F_2 son de variación acotada. Veamos que F es de variación acotada, consideremos $P = a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición de $[a,b]$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Big|F(t_i) - F(t_{i-1})\Big| =& \sum_{i=1}^{n} \Big|F_1(t_i) - F_2(t_i) - [F_1(t_{i-1}) - F_2(t_{i-1})]\Big| \\ \leq& \sum_{i=1}^{n} \Big|F_1(t_i) - F_1(t_{i-1})\Big| + \sum_{i=1}^{n} \Big|F_2(t_i) - F_2(t_{i-1})\Big| \\ =& F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a)\end{aligned}$$

de donde se concluye tomando supremo a la izquierda de la ecuación anterior.

Si suponemos ahora que F es de variación acotada, por (3.5) definimos $F_1(x) = P_F(a,x) + F(a)$ y $F_2(x) = N_F(a,x)$ por lo tanto $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. $\square$

El objetivo ahora es probar el siguiente teorema:

Teorema 3.20. *Sea F de variación acotada en $[a,b]$ entonces F es derivable ctp.*

Observación 3.21. *Primero observemos que una función monótona es medible, con lo cual una función de variación acotada es medible, por ser resta de funciones monótonas. Por el lema anterior basta probar el Teorema 3.20 para funciones no decrecientes. Supondremos que F es continua aunque se puede demostrar también para el caso en que no lo es (ver [6] o [2]). En el Capítulo 4 veremos otra prueba de este resultado, usando algunas herramientas más generales de teoría abstracta de la medida, contenidas en ese capítulo. Vamos a probar algunos lemas antes.*

Lema 3.22. *Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, definimos el conjunto*

$$E = \Big\{x : G(x+h) > G(x) \text{ para algún } h = h_x > 0\Big\}.$$

Si E es no vacío entonces es abierto, con lo cual, por el Lema 1.3, $E = \cup_k (a_k, b_k)$ y si (a_i, b_i) es un intervalo acotado de la descomposición anterior $G(b_k) = G(a_k)$.

Demostración. Vamos a demostrar primero que E es abierto, sea $x \in E$ existe h_x tal que $G(x+h_x) > G(x)$, sea $\epsilon < (G(x+h_x)-G(x))/2$. Como G es continua en x y en $x+h_x$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x,\delta)$ y para todo $z \in B(x+h_x,\delta)$

$$|G(x) - G(y)| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad |G(z) - G(x+h_x)| < \epsilon,$$

de donde se sigue que

$$G(y) < G(x) + \epsilon < G(x+h_x) - \epsilon < G(z),$$

por lo tanto, como $h_x > 0$ para todo $y \in B(x,\delta)$ puedo tomar $z \in B(x+h_x,\delta)$ tal que $z - y = h_y > 0$ y $G(z) > G(y)$ con lo cual E es abierto. Por el Lema 1.3 podemos escribir $E = \cup_k (a_k, b_k)$ donde $a_k < b_k$ puede ser $a_k = -\infty$ o $b_k = \infty$. Como $a_k \notin E$, $G(b_k) \leq G(a_k)$. Supongamos $G(b_k) < G(a_k)$, como G es continua existe c tal que $a_k < c < b_k$ y

$$G(c) = \frac{G(a_k) + G(b_k)}{2}. \tag{3.10}$$

Observar que $G(c) > G(b_k)$ ya que $G(b_k) < G(a_k)$. Por la continuidad de G, el supremo de los $c : a_k < c < b_k$ que verifican (3.10) también lo verifica. Llamemos c' dicho supremo. Como $G(c') > G(b_k)$ no puede ser $c' = b_k$. Como $c' \in E$ existe $h_{c'}$ tal que $G(c' + h_{c'}) > G(c')$. Definimos $d = c' + h_{c'}$. Como $b_k \notin E$ $G(z) \leq G(b_k)$ para todo $z \geq b_k$ por lo tanto $d < b_k$, pero esto es imposible ya que

$$G(d) > G(c') > G(b_k)$$

con lo cual, nuevamente como G es continua existe c'' tal que $d < c'' < b_k$, y $G(c') = G(c'')$ lo cual contradice que c' era supremo. Esto implica que $G(a_k) = G(b_k)$. ☐

Para el caso particular en que G está definida en un intervalo $[a,b]$ con $a < b$ tenemos el siguiente corolario que se prueba siguiendo las ideas de la prueba anterior.

Lema 3.23. *Sea $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, definimos el conjunto*

$$E = \Big\{ x \in [a,b] : G(x+h) > G(x) \textit{ para algún } h = h_x > 0 \Big\}. \tag{3.11}$$

Si E es no vacío entonces es abierto, con lo cual, por el Lema 1.3, $E = \cup_k (a_k, b_k)$ y $G(a_k) = G(b_k)$ salvo cuando $a = a_k$ y en ese caso $G(a_k) \leq G(b_k)$.

Demostración. Si se supone $G(a_k) > G(b_k)$ se llega a la misma contradicción que antes. ☐

Demostración del Teorema 3.20. Definamos primero

$$\Delta_h(F)(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

y las siguientes funciones

$$\begin{array}{ll} D^+(F)(x) = \overline{\lim}_{h\to 0, h>0}\, \Delta_h(F)(x) & \quad D^-(F)(x) = \overline{\lim}_{h\to 0, h<0}\, \Delta_h(F)(x) \\ D_+(F)(x) = \underline{\lim}_{h\to 0, h>0}\, \Delta_h(F)(x) & \quad D_-(F)(x) = \underline{\lim}_{h\to 0, h<0}\, \Delta_h(F)(x) \end{array}$$

Tenemos que $D_+ \leq D^+$ y $D_- \leq D^-$. Veamos primero que para demostrar el teorema es suficiente probar que

1. $D^+(F)(x) < \infty$ ctp x, y
2. $D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x)$ ctp x.

Para ver esto consideremos $G(x) = -F(-x)$, por el punto 2 aplicado a G

$$D^+(G)(x) = \overline{\text{lím}}_{h\to 0, h>0}\Delta_h(G)(x) \leq \underline{\text{lím}}_{h\to 0, h<0}\Delta_h(G)(x) = D_-(G)(x) \quad ctp\ x \tag{3.12}$$

Veamos que $D^+(G)(x) = D^-(F)(-x)$,

$$\Delta_h(G)(x) = \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{-F(-x-h) + F(-x)}{h}$$

por lo tanto

$$\overline{\text{lím}}_{h\to 0, h>0}\Delta_h(G)(x) = \overline{\text{lím}}_{h\to 0, h<0}\frac{-F(-x+h) + F(-x)}{-h} = \overline{\text{lím}}_{h\to 0, h<0}\frac{F(-x+h) - F(-x)}{h} = D^-(F)(-x)$$

De igual forma se prueba que

$$\underline{\text{lím}}_{h\to 0, h<0}\Delta_h(G)(x) = D_+(F)(-x)$$

con lo cual de (3.12) obtenemos $D^-(F)(-x) \leq D_+(F)(-x)$ ctp x y por lo tanto $D^-(F)(x) \leq D_+(F)(x)$ ctp x. Por lo tanto de esto último y el punto 2, tenemos que

$$D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x) \leq D_+(F)(x) \leq D^+(F)(x) < \infty.$$

Resta probar los puntos 1. y 2. Para demostrar 1 definimos, para $\gamma > 0$ los conjuntos

$$E_\gamma = \{x : D^+(F)(x) \geq \gamma\}.$$

Es claro que $\{x : D^+(F)(x) = \infty\} \subset E_\gamma \quad \forall\gamma$, veremos que $m(E_\gamma) \to 0$ cuando $\gamma \to \infty$. El conjunto E_γ es medible, ya que existe $h_n \to 0$ tal que

$$D^+(F)(x) = \overline{\text{lím}}_{h_n\to 0, h_n>0}\Delta_{h_n}(F)(x),$$

y el límite superior de una sucesión de funciones medibles es medible. Si aplicamos el Lema 3.23 a $G(x) = F(x) - \gamma x$ obtenemos que el conjunto E definido en (3.11) cumple que $E = \cup_k(a_k, b_k)$ y $G(a_k) \leq G(b_k)$. Veamos que $E_\gamma \subset \cup_k(a_k, b_k)$. Si $x \in E_\gamma$

$$\overline{\text{lím}}_{h\to 0, h>0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} > \gamma > 0,$$

por lo tanto para $h = h_x$ suficientemente pequeño, $F(x+h) > F(x) + \gamma h$, es decir

$$G(x+h) = F(x+h) - \gamma(x+h) > F(x) + \gamma x = G(x).$$

Esto prueba que $x \in E = \cup_k(a_k, b_k)$. De $G(b_k) \geq G(a_k)$ obtenemos que $F(b_k) - F(a_k) \geq \gamma(b_k - a_k)$ por lo tanto

$$m(E_\gamma) \leq \sum_k m((a_k, b_k)) \leq \frac{1}{\gamma}\sum_k F(b_k) - F(a_k) \leq \frac{1}{\gamma}(F(b) - F(a)),$$

donde en la última desigualdad hemos usado que F es no decreciente. De $m(E_\gamma) \leq \frac{1}{\gamma}(F(b) - F(a))$ se sigue que $m(E_\gamma) \to 0$ cuando $\gamma \to \infty$. Esto prueba el punto 1.

Para demostrar el punto 2 definimos, para $R > r$ números racionales, los conjuntos

$$E_{r,R} = \left\{x \in [a,b] : D^+(F)(x) > R \ \text{ y } \ r > D_-(F)(x)\right\}.$$

Si probamos que $m(E_{r,R}) = 0$ para todo $R > r$ números racionales se concluye que $D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x)$ ctp x.

Supongamos $m(E_{r,R}) > 0$. Como $R/r > 1$ existe O abierto tal que $E_{r,R} \subset O \subset (a,b)$ y $m(O) < m(E_{r,R})R/r$. Escribimos $O = \cup_n I_n$ con I_n intervalos abiertos disjuntos. Fijado n aplicamos el Lema 3.23 a $G(x) = -F(-x) - rx$ en $-I_n$, existen intervalos $(a_k, b_k) \subset I_n$ disjuntos (y por lo tanto $(-b_k, -a_k) \in -I_n$) tal que $G(-b_k) \leq G(-a_k)$ o lo que es lo mismo

$$F(b_k) - F(a_k) \leq r(b_k - a_k). \tag{3.13}$$

En cada (a_k, b_k) aplicamos el Lema 3.23 a $G(x) = F(x) - Rx$ y obtenemos el abierto

$$O_n = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})$$

donde los $(a_{k,j}, b_{k,j})$ son disjuntos y $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ para todo j, además $G(b_{k,j}) \geq G(a_{k,j})$ o lo que es lo mismo

$$F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \geq R(b_{k,j} - a_{k,j})$$

Si combinamos esta última ecuación con (3.13) obtenemos

$$m(O_n) = \sum_{k,j}(b_{k,j} - a_{k,j}) \leq \frac{1}{R}\sum_{k,j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \leq \frac{1}{R}\sum_{k} F(b_k) - F(a_k) \leq \frac{r}{R}\sum_{k}(b_k - a_k) \leq \frac{r}{R}m(I_n),$$

Observar que $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k) \subset I_n$ y por lo tanto $O_n \subset I_n$. Veamos que $E_{r,R} \cap I_n \subset O_n$, sea $x \in E_{r,R}$ entonces $D^+(F)(x) > R$ entonces para h suficientemente chico

$$\frac{F(x + h_x) - F(x)}{h} > R$$

con lo cual $G(x + h_x) \geq G(x)$ y por lo tanto $x \in O_n$. Finalmente, obtenemos una contradicción:

$$m(E_{r,R}) = \sum_n m(E_{r,R} \cap I_n) \leq m(O_n) \leq \frac{r}{R}\sum_n m(I_n) = \frac{r}{R}m(O) < m(E_{r,R}).$$

Lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Si bien ya vimos que una función puede ser no decreciente, continua y existir su derivada para casi todo punto, pero no cumplirse (3.4) (como en el caso de la función de Cantor), el siguiente corolario prueba una desigualdad que siempre se verifica.

Corolario 3.24. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es no decreciente y continua, entonces existe $F'(x)$ ctp x, F' es medible, no negativa, y*

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a),$$

en particular si F es acotada, F' es integrable.

Demostración. Definimos la sucesión de funciones

$$G_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Por el Teorema 3.20 $G_n \xrightarrow{ctp} F'$ lo cual implica en particular que F' es no negativa (ya que F es no decreciente) y medible, por ser límite ctp de funciones medibles. Por el Lema de Fatou

$$\int_a^b F'(x)dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_a^b G_n(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n(x)dx =& \frac{1}{(1/n)}\int_a^b F(x+1/n)dx - \frac{1}{(1/n)}\int_a^b F(x)dx \\ =& \frac{1}{(1/n)}\int_{a+1/n}^{b+1/n} F(x)dx - \frac{1}{(1/n)}\int_a^b F(x)dx \\ =& \frac{1}{(1/n)}\int_b^{b+1/n} F(x)dx - \frac{1}{(1/n)}\int_a^{a+1/n} F(x)dx\end{aligned}$$

Como F es continua, por el teorema del valor medio para integrales el primer sumando tiende a $F(b)$ y el segundo a $F(a)$. □

3.2.2. Funciones absolutamente continuas

Definición 3.25. Una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es **absolutamente continua** si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta \geq 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

y los intervalos $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$ son disjuntos.

El siguiente resultado se demuestra fácilmente, daremos una idea de la demostración de cada paso.

Proposición 3.26. *Si f es absolutamente continua*

1. *es uniformemente continua;*
2. *es de variación acotada, y por lo tanto existe $f'(x)$ ctp x;*
3. *$T_f(a,x)$ es absolutamente continua;*
4. *si descomponemos $f(x) = P_f(a,x) - N_f(a,x)$ entonces P_f y N_f son continuas;*
5. *$F(x) = \int_a^x f(y)dy$ es absolutamente continua (con f integrable).*
6. *$m(f(E)) = 0$ si $m(E) = 0$, por lo tanto si E es medible $f(E)$ es medible.*

Demostración.

3 Se sigue de que como f es continua vale que $T_f(a,b) = T_f(a,x) + T_f(x,b)$ para todo $a < x < b$. Observar que esto último no es cierto en general.

4 Se ve primero que si f y g son absolutamente continuas también lo es $af + bg$ para todo par de constantes a y b. Además $P_f(a,x) = (1/2)(f(x) - f(a) + T_f(a,x))$, de la parte anterior concluye que P_f es absolutamente continua, y $N_f(a,x) = T_f(a,x) - P_f(a,x)$, con lo cual N_f también.

5 Se sigue usando la Proposición 2.35, parte 2.

6 Existen I_1, I_2 intervalos cerrados (se puede suponer que son disjuntos) tal que $E \subset \cup_i I_i$, denotamos $\mathcal{I}_n^k = \cup_{i=n}^k I_i$ con $n \leq k$, $m(\mathcal{I}_1^\infty) < \delta$ (siendo δ el de la continuidad absoluta de f para ϵ.).

$$m(f(E)) \leq m(f(\mathcal{I}_1^n)) + \lim_k m(f(\mathcal{I}_{n+1}^k)) < 2\epsilon.$$

Si E es medible $E = N \cup \cup_j K_j$ con K_j compactos, por lo tanto $\cup_j f(K_j)$ es Borel medible.

□

Vamos a probar ahora algunos lemas que nos permitirán concluir que si F es absolutamente continua y $F'(x) = 0$ ctp x (observar que existe por el punto 2) entonces F es constante ctp.

Definición 3.27. Una colección de bolas $\mathcal{B}$ es un **cubrimiento de Vitali** de $E \subset \mathbb{R}^d$ si para todo $x \in E$ y para todo $\eta > 0$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $m(B) < \eta$

Lema 3.28. *Sea E con $m(E) < \infty$ y $\mathcal{B}$ un cubrimiento de Vitali, para todo $\delta > 0$ existen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ disjuntas tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) \geq m(E) - \delta.$$

Demostración. Vamos a usar el Lema 3.3. Supongamos $m(E) > \delta$ sino el resultado es trivial ya que basta tomar cualquier bola de $\mathcal{B}$ y $n = 1$. Consideremos $K \subset E$, K compacto tal que $m(K) \geq \delta$. Existe un cubrimiento de K con bolas de $\mathcal{B}$ y por lo tanto podemos tomarnos un subcubrimiento finito, para ese cubrimiento aplicamos el Lema 3.3 y obtenemos bolas disjuntas $B_1, \dots, B_{N_1}$ y

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq 3^{-d} m(K) \geq 3^{-d}\delta.$$

Si estas bolas cumplen

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq m(E) - \delta,$$

ya está probado el lema. En caso contrario si

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) < m(E) - \delta,$$

definimos

$$E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}.$$

De

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) + \delta < \mu(E) = m(E_2) + m\Big(E \cap \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}\Big) \leq m(E_2) + m\Big(\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}\Big) \leq m(E_2) + \sum_{i=1}^{N_1} m(B_i)$$

se sigue que $m(E_2) > \delta$. Repetimos el procedimiento y podemos encontrar $K_2 \subset E_2$ compacto tal que $m(K_2) \geq \delta$. Si tomamos $x \in E_2$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y B es una bola disjunta de $B_1, \dots, B_{N_1}$. Por lo tanto las bolas de $\mathcal{B}$ disjuntas de $B_1, \dots, B_{N_1}$ cubren E_2 y por lo tanto cubren K_2. Nuevamente aplicando el Lema 3.3 existe un subcubrimiento finito de K_2 por bolas disjuntas entre si y disjuntas de $B_1, \dots, B_{N_1}$, que denotamos $B_{N_1+1}, \dots, B_{N_2}$, tenemos que

$$\sum_{N_1 < i \leq N_2} m(B_i) \geq 3^{-d}\delta \qquad \text{entonces} \qquad \sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geq 2(3^{-d})\delta.$$

Si repetimos este procedimiento, en el paso k tenemos una unión de N_k bolas con medida total mayor o igual que $k(3^{-d}\delta)$, por lo tanto basta tomar $k \geq 3^d(m(E) - \delta)/\delta$. □

Corolario 3.29. *En las hipótesis del lema anterior, se pueden elegir las bolas de $\mathcal{B}$ tal que*

$$m\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) < 2\delta.$$

Demostración. Sea O abierto tal que $E \subset O$ y $m(E \setminus O) < \delta$. Como $\mathcal{B}$ es un cubrimiento de Vitali podemos suponer que las bolas están contenidas en O. Por lo tanto

$$m\Big(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \leq m(O) - m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \leq m(E) + \delta - (m(E) - \delta) = 2\delta.$$

□

Teorema 3.30. *Si F es absolutamente continua en $[a,b]$ y $F'(x) = 0$ ctp x, entonces F es constante.*

Demostración. Es suficiente ver que $F(a) = F(b)$ ya que si se prueba eso podemos reemplazar $[a,b]$ por cualquier subintervalo. Sea $E = \{x \in (a,b) : F'(x) = 0\}$, $m(E) = b - a$. Sea $\epsilon > 0$ y sea δ el correspondiente a la continuidad absoluta de F para ese ϵ. Para todo $x \in E$,

$$\lim_{h \to 0} \Big| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \Big| = 0. \tag{3.14}$$

Por lo tanto para todo $x \in E$ y para todo η, existe $I = (a_x, b_x) \subset [a,b]$ tal que $|F(b_x) - F(a_x)| \leq \epsilon(b_x - a_x)$ y $b_x - a_x < \eta$. Para vero esto último, sea h' tal que para todo $h < h'$, $|F(x+h) - F(x)| < \epsilon h$ y $|F(x-h) - F(x)| < \epsilon h$. Ahora fijado $\eta > 0$, definimos $h_0 < \min\{h', \eta/2, \min\{|x-a|, |x-b|\}\}$, y $a_x = x - h_0$, $b_x = x + h_0$. Los intervalos (a_x, b_x) que así se obtienen forman un cubrimiento de Vitali de E. Por el Lema 3.28, para todo $\delta > 0$, existen $I_1, \ldots, I_n$ disjuntos 2 a 2, $I_i = (a_i, b_i) \subset [a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) \geq m(E) - \delta = (b-a) - \delta, \tag{3.15}$$

y como $|F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon(b_i - a_i)$,

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| \leq \epsilon(b-a). \tag{3.16}$$

El conjunto $[a,b] \setminus \cup_{i=1}^{n} I_i$ está formado por intervalos cerrados disjuntos $[\alpha_k, \beta_k]$ con $k = 1, \ldots, M$ y por (3.15)

$$\sum_{k=1}^{M} \beta_k - \alpha_k \leq \delta.$$

Por la forma en que tomamos δ,

$$\sum_{k=1}^{M} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \epsilon.$$

Si combinamos esta última ecuación con (3.16) obtenemos

$$|F(b) - F(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| + \sum_{k=1}^{M} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \epsilon(b-a) + \epsilon.$$

Por lo tanto $F(a) = F(b)$. □

Teorema 3.31. *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua entonces existe F' ctp, es integrable, y además*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy \quad \forall x : a \leq x \leq b$$

Recíprocamente si f es integrable en $[a,b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ es absolutamente continua y $F' = f$ ctp.

Demostración. Para demostrar el recíproco definimos $F(x) = \int_a^x f(y)dy$, por el punto 5 de la Proposición 3.26 F es absolutamente continua, y por el punto 2 de esa proposición es derivable ctp x. Que $F'(x) = f(x)$ se sigue del Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Para demostrar el directo, sabemos que F es de variación acotada, y por lo tanto es derivable ctp y además existen F_1, F_2 no decrecientes y continuas tal que $F = F_1 - F_2$. Por el Corolario 3.24 como las F_1, F_2 son acotadas (por ser continuas en $[a, b]$) F_1' y F_2' son integrables, por lo tanto F' es integrable. Sea

$$G(x) = \int_a^x F'(y)dt.$$

G es absolutamente continua (y también lo es $G - F$). Por el Teorema de Diferenciación $F'(x) = G'(x)$ ctp x y por lo tanto $(F - G)' = 0$ ctp. por el Teorema 3.30 $F(x) - G(x) = F(a)$ ctp $\square$

Capítulo 4

Medidas abstractas

Definición 4.1. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en X. Una **medida positiva** $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ es una función que verifica $\mu(\emptyset) = 0$ y que para toda sucesión $E_1, E_2, \ldots$ de conjuntos disjuntos 2 a 2, tal que $E_i \in \mathcal{M}$ para todo i,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{4.1}$$

Llamamos **espacio de medida** a la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Una medida se dice **completa** si $\mathcal{M}$ contiene todos los subconjuntos de un conjunto de μ medida nula.

Observación 4.2. *Se deja como ejercicio verificar la misma demostración que prueba el Teorema 1.19, el cual establece la continuidad de la medida de Lebesgue, es válido para cualquier medida. Este importante resultado será usado en varias de las demostraciones que siguen.*

Ejemplo 4.3. Un ejemplo trivial es $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), m)$ siendo m la medida de Lebesgue. Otro ejemplo trivial es tomar en cualquier conjunto finito o numerable $X = \{x_n\}_n$ la σ-álgebra $\mathcal{M} = 2^{\mathcal{X}}$ y definir $\mu(x_n) = a_n$ siendo $a_1, a_2, \ldots$ números reales no negativos. Si $a_n = 1$ para todo n se obtiene la medida de conteo. Por otra parte si tenemos $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible, no negativa, podemos definir en $\mathcal{L}$ la medida $\mu(A) = \int_A f(x)dx$. Que esto cumple (4.1) se sigue del teorema de convergencia monótona.

Definición 4.4. El espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice σ-finito si $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ con $E_i \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_i) < \infty$ para todo i.

Definición 4.5. Sea X un conjunto, una **medida exterior** μ_* en X es una función $\mu_* : 2^X \to [0, \infty]$ tal que:

1. $\mu_*(\emptyset) = 0$.
2. Si $E_1 \subset E_2$ entonces $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$.
3. Para toda sucesión de conjuntos $E_1, E_2, \ldots$.

$$\mu_*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E_i).$$

Observar que, por los Lemas 1.11 y 1.12 la medida exterior definida en la Definición 1.6 es una medida exterior en el sentido anterior.

Definición 4.6. Dado un conjunto X con una medida exterior μ_* un conjunto $E \subset X$ se dice que es un **conjunto medible** si para todo $A \subset X$

$$\mu_*(A) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c). \tag{4.2}$$

Es inmediato que si E es medible E^c también lo es, y que $\emptyset$ y X son medibles. Por otra parte, (4.2) se verifica si $\mu_*(A) = \infty$ por lo tanto basta ver que se cumple para los $A \subset X$ tal que $\mu_*(A) < \infty$.

Observación 4.7.

- *El punto 3 de la definición de medida exterior implica que para ver que un conjunto E es medible basta probar que para todo $A \subset X$, $\mu_*(A) \geq \mu_*(A \cap E) + \mu_*(E^c \cap A)$.*
- *Si $\mu_*(E) = 0$ entonces E es medible ya que $\mu_*(E \cap A) = 0$ (por la propiedad 2) y $\mu_*(A) \geq \mu_*(A \cap E^c)$ nuevamente por el punto 2, ya que $E^c \cap A \subset A$, esto prueba* (4.2).

Veamos ahora uno de los teoremas mas importantes del curso, que prueba que los conjuntos medibles son una σ-álgebra y la restricción de μ_* a los conjuntos medibles es efectivamente una medida.

Teorema 4.8. *Teorema de Caratheodory.* *Dada una medida exterior μ_* en X, si denotamos $\mathcal{M}$ al subconjunto de 2^X formado por los conjuntos que verifican* (4.2) *entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Además μ_* restricta a $\mathcal{M}$ es una medida completa.*

Demostración. Es claro que $\emptyset$ y X verifican (4.2) y por lo tanto están en $\mathcal{M}$. Veamos primero que la unión de una cantidad finita de conjuntos (no necesariamente disjuntos) en $\mathcal{M}$ pertenece a $\mathcal{M}$. Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$. Como $E_2 \in \mathcal{M}$

$$\mu_*(A) = \mu_*(A \cap E_2) + \mu_*(A \cap E_2^c) \tag{4.3}$$

Como $E_1 \in \mathcal{M}$ el primer sumando en(4.3) es (sustituyendo en (4.2), A por $A \cap E_2$) igual a

$$\mu_*(A \cap E_2 \cap E_1) + \mu_*(A \cap E_2 \cap E_1^c)$$

mientras que el segundo en (4.3) es (sustituyendo en (4.2), A por $A \cap E_2^c$) igual a

$$\mu_*(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu_*(A \cap E_2^c \cap E_1^c).$$

Es decir probamos que

$$\mu_*(A) = \mu_*(A \cap E_2 \cap E_1) + \mu_*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + \mu_*(A \cap E_2^c \cap E_1) + \mu_*(A \cap E_2^c \cap E_1^c)$$

Vamos a acotar inferiormente la suma de los 3 primeros términos, para eso observemos que

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2) \cup (E_2^c \cap E_1),$$

por lo tanto,

$$(E_1 \cup E_2) \cap A = (E_1 \cap E_2 \cap A) \cup (E_1^c \cap E_2 \cap A) \cup (E_2^c \cap E_1 \cap A)$$

y usando la subaditividad de μ_*

$$\mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) \leq \mu_*(E_1 \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_2^c \cap E_1 \cap A).$$

Esto junto con (4.3) prueba

$$\mu_*(A) \geq \mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu_*(A \cap E_2^c \cap E_1^c) = \mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu_*(A \cap (E_2 \cup E_1)^c).$$

Con lo cual $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Razonando por inducción se prueba que cualquier unión finita de elementos de $\mathcal{M}$ está en $\mathcal{M}$. Como el complemento de un conjunto medible es medible la intersección finita de elementos de $\mathcal{M}$ está en $\mathcal{M}$. Por otro lado observemos que si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y si sustituimos en (4.2) A por $E_1 \cup E_2$, como $E_1 \in \mathcal{M}$

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) = \mu_*(E_1 \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_*(E_1^c \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2).$$

Lo cual prueba que μ_* es finitamente aditiva si los conjuntos son disjuntos 2 a 2 y están en $\mathcal{M}$. Si tenemos una unión numerable

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad \text{definimos} \qquad U_1 = E_1 \quad \text{y si } k > 1, \;\; U_k = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$$

Observar que los U_k son medibles (ya que probamos que $\mathcal{M}$ es cerrado por uniones e intersecciones finitas, y por complementos), además son disjuntos y $\cup_k U_k = U$. Por lo tanto para probar que $\mathcal{M}$ es cerrado por uniones numerables basta probar que es cerrado por uniones numerables de conjuntos disjuntos. Sean $E_1, E_2, \dots$ elementos de $\mathcal{M}$ disjuntos 2 a 2. Definimos

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{y} \qquad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Como $E_n \in \mathcal{M}$, si reemplazamos en (4.2) A por $G_n \cap A$, obtenemos

$$\mu_*(G_n \cap A) = \mu_*(E_n \cap (G_n \cap A)) + \mu_*(E_n^c \cap (G_n \cap A))$$

Como $E_n \subset G_n$, $E_n \cap (G_n \cap A) = E_n \cap A$ y como los E_i son disjuntos $E_n^c \cap (G_n \cap A) = G_{n-1} \cap A$. Por lo tanto

$$\mu_*(E_n \cap (G_n \cap A)) + \mu_*(E_n^c \cap (G_n \cap A)) = \mu_*(E_n \cap A) + \mu_*(G_{n-1} \cap A).$$

Si repetimos este procedimiento al conjunto $G_{n-1} \cap A$, obtenemos[1]

$$\mu_*(G_{n-1} \cap A) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_*(E_j \cap A),$$

de donde obtenemos

$$\mu_*(G_n \cap A) = \mu_*(E_n \cap A) + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_*(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_*(E_j \cap A).$$

Como $G_n \in \mathcal{M}$

$$\mu_*(A) = \mu_*(G_n \cap A) + \mu_*(G_n^c \cap A)$$

Por otra parte como $G^c \subset G_n^c$, para todo $n > 0$ tenemos que $\mu_*(G_n^c \cap A) \geq \mu_*(G^c \cap A)$, de donde

$$\mu_*(A) = \mu_*(G_n \cap A) + \mu_*(G_n^c \cap A) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_*(E_j \cap A) + \mu_*(G^c \cap A).$$

Tomando $n \to \infty$ y usando la subaditividad de μ_*,

$$\mu_*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j \cap A) + \mu_*(G^c \cap A) \geq \mu_*(G \cap A) + \mu_*(G^c \cap A) \geq \mu_*(A).$$

Esta ecuación prueba que $G \in \mathcal{M}$, con lo cual $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Si además tomamos $A = G$ en la ecuación anterior obtenemos (4.1) y por lo tanto μ_* restricta a $\mathcal{M}$ es una medida.

Por la observación 4.7 la medida que se obtiene es una medida completa. □

[1] en la ecuación que sigue no podemos usar que μ_* es finitamente aditiva para deducir la igualdad ya que los conjuntos $E_n \cap A$ no pertenecen necesariamente a $\mathcal{M}$

4.1. Medidas en espacios métricos

Si tenemos (X, d) un espacio métrico, denotamos $\mathcal{B}_X$ la σ-álgebra de Borel en (X, d). Si $A, B \subset X$, denotamos

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Definición 4.9. Una medida exterior μ_* en X es una **medida exterior métrica** si para todo A, B con $d(A, B) > 0$,

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B).$$

El Lema 1.14 prueba que la medida de Lebesgue es una medida exterior métrica. El siguiente teorema prueba que la σ-álgebra de los conjuntos medibles de una medida exterior métrica contiene a los borelianos.

Teorema 4.10. *Si μ_* es una medida exterior métrica en (X, d) entonces $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$ siendo $\mathcal{M}$ la σ-álgebra del teorema de extensión de Caratheodory. Además μ_* restricta a $\mathcal{B}_X$ es una medida.*

Demostración. Es suficiente ver que los cerrados son medibles. Sea F cerrado y sea $A \subset X$ tal que $\mu_*(A) < \infty$ (si $\mu_*(A) = \infty$ se cumple trivialmente (4.2)). Denotamos

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : d(x, F) > 1/n\}.$$

Tenemos que $A_n \subset A_{n+1}$ y como F es cerrado $F^c \cap A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, además $d(F \cap A, A_n) \geq 1/n$, ver figura 4.1. Como $(F \cap A) \cup A_n \subset A$ tenemos que

$$\mu_*(A) \geq \mu_*\big((F \cap A) \cup A_n\big) = \mu_*(F \cap A) + \mu_*(A_n). \tag{4.4}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que μ_* es una medida exterior métrica. Si bien $A_n \uparrow F^c \cap A$, no podemos usar la continuidad de la medida μ_* restricta a $\mathcal{M}$ ya que los conjuntos A_n no necesariamente pertenecen a $\mathcal{M}$.[2]

Sea $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$, observar que son disjuntos. Veamos que $d(B_{n+1}, A_n) > 1/(n(n+1))$, para eso sea $x \in B_{n+1}$ e y tal que $d(x, y) < 1/(n(n+1))$. Como $x \in B_{n+1}$ entonces $x \notin A_{n+1}$ con lo cual $d(x, F) \leq 1/(n+1)$. Por lo tanto

$$d(y, F) \leq d(y, x) + d(x, F) < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}$$

con lo cual $y \notin A_n$. Por lo tanto como μ_* es una medida exterior métrica

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_*(B_{2j}) \leq \mu_*(A_{2k+1}) < \mu_*(A) < \infty, \tag{4.5}$$

donde en la primera desigualdad usamos que para todo $j = 1, \ldots, k$, $B_{2j} \subset A_{2k+1}$ y que están a distancia positiva entre si. En la última desigualdad usamos que $A_{2k+1} \subset A$ y $\mu_*(A) < \infty$. De igual manera

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_*(B_{2j-1}) \leq \mu_*(A_{2k}) < \mu_*(A) < \infty. \tag{4.6}$$

Por lo tanto ambas series son convergentes. Por otra parte observemos que, como

$$A_n \subset F^c \cap A \quad \text{y} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=n-1}^{\infty} B_j,$$

[2]observar no obstante que existe y es finito $\lim_n \mu_*(A_n)$, ya que $\mu_*(A_n)$ es no decreciente y está cotado por $\mu_*(F^c \cap A)$.

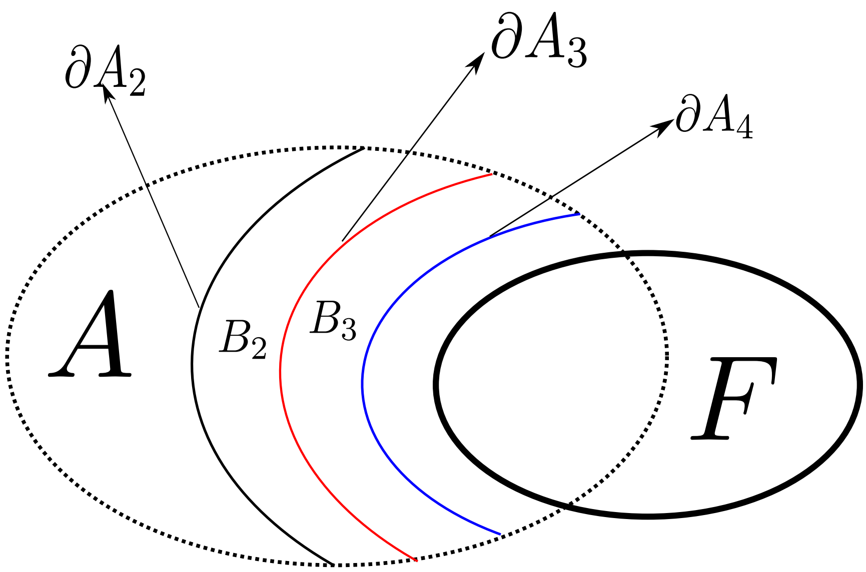

Figura 4.1: $B_2 = A_3 \cap A_2^c$ y $B_3 = A_4 \cap A_3^c$.

para todo n, tenemos que

$$\mu_*(A_n) \leq \mu_*(F^c \cap A) = \mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu_*\Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\Big) = \mu_*\Big(A_n \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} B_j\Big) \leq \mu_*(A_n) + \mu_*\Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} B_j\Big) \leq$$

$$\mu_*(A_n) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu_*(B_j) = \mu_*(A_n) + \sum_{\substack{j \geq n \\ j \text{ par}}} \mu_*(B_j) + \sum_{\substack{j \geq n \\ j \text{ impar}}} \mu_*(B_j)$$

En la última igualdad usamos que es una serie de términos positivos por lo tanto se pueden reordenar. Como ambas series son convergentes, si tomamos límite en la ecuación anterior cuando $n \to \infty$ obtenemos que $\mu_*(A_n) \to \mu_*(F^c \cap A)$. Combinando esto con (4.4) obtenemos que $\mu_*(A) \geq \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A)$ con lo cual $F \in \mathcal{M}$.

$\square$

Proposición 4.11. *Supongamos que μ es una medida de Borel en (X, d) tal que para toda bola B, $\mu(B) < \infty$ entonces para todo boreliano E y para todo $\epsilon > 0$ existe O abierto y F cerrado tal que $F \subset E \subset O$,*

$$\mu(O \setminus E) < \epsilon \qquad y \qquad \mu(E \setminus F) < \epsilon$$

Demostración. Primero veremos que si $F^* = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ es una unión de cerrados existe $F \subset F^*$, F cerrado, tal que $\mu(F^* \setminus F) < \epsilon$. Esto último basta probarlo para uniones crecientes (ya que toda unión se puede transformar en una unión creciente). Sea $x_0 \in X$ y $B_n = B(x_0, n)$.

$$F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})$$

Como los F_k son crecientes a F^* tenemos que, para todo n

$$F_k \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}) \uparrow_k F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}).$$

Usando la continuidad de la medida (ver Observación 4.2), para todo n existe $k = k(n)$ tal que $\mu\big((F^* \setminus F_{k(n)}) \cap (\overline{B}_n \setminus B_{n-1})\big) < \epsilon/2^n$. Definimos

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{k(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}).$$

Observemos que si $x \in F^*$ entonces existe n_0 tal que $x \in \overline{B}_{n_0} \setminus B_{n_0-1}$, si $x \notin F$, entonces para todo n $x \notin F_{k(n)}$ o $x \notin \overline{B}_n \setminus B_{n-1}$, por lo tanto $x \notin F_{k(n_0)}$. Es decir

$$F^* \setminus F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^* \setminus F_{k(n)}) \cap (\overline{B}_n \setminus B_{n-1})$$

y por lo tanto

$$\mu(F^* \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Veamos que F es cerrado, para eso basta probar que $F \cap \overline{B_k}$ es cerrado para todo k (ya que si $x_n \in F$ y $x_n \to x$ entonces existe k tal que $x_n \in B_k$ para todo n). Que $F \cap \overline{B_k}$ es cerrado se sigue de que es una unión finita de cerrados ya que $\overline{B}_k \cap (B_n \setminus B_{n-1}) = \emptyset$ si $n > k$.

Para finalizar la prueba denotemos $\mathcal{C}$ los conjuntos que cumplen la tesis vamos a probar que es una σ-álgebra y que contiene a los abiertos, con lo cual contiene a los borelianos. Es claro que si $E \in \mathcal{C}$, $E^c \in \mathcal{C}$. Sea $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ con $E_k \in \mathcal{C}$. Existe $O_k \supset E_k$, con O_k abiertos, tal que $\mu(O_k \setminus E_k) < \epsilon/2^{k+1}$. Denotamos $O = \cup_{k=1}^{\infty} O_k$ y

$$O \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (O_k \setminus E_k)$$

por lo tanto $\mu(O \setminus E) < \epsilon$. Tomemos $F_k \subset E_k$, F_k cerrado tal que $\mu(E_k \setminus F_k) < \epsilon/2^k$. Denotemos $F^* = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$. Por lo que ya probamos existe $F \subset F^*$, F cerrado, y $\mu(F^* \setminus F) < \epsilon$, con lo cual $\mu(E \setminus F) < 2\epsilon$. Esto último junto con $\mu(O \setminus E) < \epsilon$ prueba que $E \in \mathcal{C}$. Veamos que $\mathcal{C}$ contiene a los abiertos, sea O abierto y $F_k = \{x \in \overline{B}_k : d(x, O^c) \geq 1/k\}$ donde $\overline{B}_k$ es la bola cerrada de centro x_0 y radio k, estos conjuntos son cerrados[3] y $O = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$. Por lo tanto podemos usar lo que probamos al inicio y existe $F \subset O$ tal que $\mu(O \setminus F) < \epsilon$ y por lo tanto $O \in \mathcal{C}$. □

Definición 4.12. Un **álgebra de conjuntos** en X es una familia $\mathcal{A} \subset 2^X$ de conjuntos cerrada por complementos y por uniones finitas.

Es inmediato que un álgebra de conjuntos es cerrada por intersecciones finitas.

Ejemplo 4.13. La familia de rectángulos en $\mathbb{R}^d$ no es un álgebra pero la unión finita de rectángulos es un álgebra.

Definición 4.14. Una **premedida** en un álgebra $\mathcal{A}$ es una función $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
2. Si $E_1, E_2, \ldots$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$, disjuntos 2 a 2, tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\mu_0\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

[3] ya que $d(x, A)$ es Lipschitz: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Observar que la propiedad 1 de la definición junto con la 2 implican que μ_0 es finitamente aditiva. Además es inmediato que si $A \subset B$ con A, B elementos del álgebra $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$.

Lema 4.15. *Sea μ_0 una premedida en un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, si definimos, para $E \subset X$,*

$$\mu_*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \ E_j \in \mathcal{A} \quad \forall j\right\}, \tag{4.7}$$

entonces μ_* es una medida exterior en 2^X y se cumple

1. *$\mu_*(E) = \mu_0(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$*
2. *Los elementos de $\mathcal{A}$ son medibles, es decir $\mu_*(A) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c)$ para todo $A \subset X$, $E \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Veamos que μ_* es una medida exterior. Es claro que $\mu_*(\emptyset) = 0$ porque $\mu_0(\emptyset) = 0$. Si $E_1 \subset E_2$ es claro que $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$ ya que todo cubrimiento de E_2 cubre E_1.

Sean $E_1, E_2, \ldots,$ elementos del álgebra, para todo $\epsilon > 0$ y para cada E_j existen $A_1^j, A_2^j, \ldots$ tal que

$$E_j \subset \bigcup_i A_i^j \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i^j) < \mu_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Por lo tanto

$$\mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j) + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario

$$\mu_*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j).$$

Veamos que μ_* restricta a $\mathcal{A}$ coincide con μ_0. Es claro que $\mu_*(E) \leq \mu_0(E)$. Para probar la otra desigualdad sea $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ tal que $E_j \in \mathcal{A}$ para todo j y $E \in \mathcal{A}$. Sea

$$E'_k = E \cap \Big(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\Big),$$

los E'_k son disjuntos 2 a 2, pertenecen a $\mathcal{A}$ y además $E = \cup_{k=1}^{\infty} E'_k$, por lo tanto

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E'_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k),$$

donde en la segunda desigualdad usamos que $E'_k \subset E_k$ y que μ_0 es monótona, tomando ínfimo, $\mu_0(E) \leq \mu_*(E)$.

Veamos que los elementos de $\mathcal{A}$ son μ_* medibles, sea $A \subset X$ y $E \in \mathcal{A}$. Para todo $\epsilon > 0$ existen $E_1, E_2, \ldots$ elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \leq \mu_*(A) + \epsilon. \tag{4.8}$$

Como μ_0 es finitamente aditiva, para todo j $\mu_0(E_j) = \mu_0(E_j \cap E) + \mu_0(E_j \cap E^c)$ por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j \cap E) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j \cap E^c).$$

Observemos que $E_j \cap E \in \mathcal{A}$ y $E^c \cap E_j \in \mathcal{A}$ y ya probamos que μ_0 coincide con μ_* en $\mathcal{A}$ por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j \cap E) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E^c \cap E_j).$$

Por otra parte

$$\mu_*(A \cap E) \leq \mu_*\Big(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E \cap E_j),$$

y

$$\mu_*(A \cap E^c) \leq \mu_*\Big(E^c \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E^c \cap E_j).$$

Finalmente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \geq \mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c).$$

Si combinamos esto último con (4.8) obtenemos que, para todo $\epsilon > 0$, $\mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c) \leq \mu_*(A) + \epsilon$, y por lo tanto $\mu_*(A \cap E) + \mu_*(A \cap E^c) \leq \mu_*(A)$ como queríamos □

Teorema 4.16. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en X, denotemos $\mathcal{M}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Sea μ_0 una premedida en $\mathcal{A}$ entonces existe una medida μ que extiende μ_0 a $\mathcal{M}$ y además es única si es σ-finita.*

Demostración. μ_0 permite definir una medida exterior como en (4.7). Por el Teorema de Caratheodory, los subconjuntos medibles respecto de μ_* forman una σ-álgebra que, por el lema anterior, contiene a $\mathcal{A}$ y por lo tanto, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, es decir contiene a $\mathcal{M}$ (en general los conjuntos medibles respecto de μ_* son más que $\mathcal{M}$). Por el Teorema de Carathedory sabemos además que μ_* restricto a $\mathcal{M}$ es una medida, que denotaremos μ, veamos que si μ es σ-finita es única. Sea ν otra medida en $\mathcal{M}$ tal que ν restricta a $\mathcal{A}$ coincide con μ_0. Veamos que $\mu(F) = \nu(F)$. Si $F \subset \cup_j E_j$ con $E_j \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\nu(F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j),$$

ya que μ_0 y ν coinciden en $\mathcal{A}$, por lo tanto tomando ínfimo a la derecha de la expresión anterior, en los cubrimientos de F, $\nu(F) \leq \mu(F)$. [4] Para demostrar la otra desigualdad supongamos que $E = \cup_j E_j$ es una unión de elementos de $\mathcal{A}$, tenemos que $\cup_{j=1}^n E_j \uparrow E$, observar que $\cup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$, entonces

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \mu(E).$$

Sea $F \in \mathcal{M}$ de medida μ finita (y por lo tanto de medida ν finita). Supongamos nuevamente que $F \subset E$, tomemos los E_j tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \mu(F) + \epsilon.$$

Entonces $\mu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \mu(F) + \epsilon$. Como $\mu(F) < \infty$ se sigue de la ecuación anterior $\mu(E) < \infty$ y por lo tanto $\mu(E \setminus F) < \epsilon$, de donde

$$\mu(F) \leq \mu(E) = \nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F) \leq \mu(F) + \mu(E \setminus F) \leq \mu(F) + \epsilon$$

[4] esta desigualdad prueba que en general cualquier medida ν que coincida con μ_0 en $\mathcal{A}$ está acotada por arriba por μ, la medida que se obtiene de aplicar el Teorema de Caratheodory a la medida exterior μ_* definida por μ_0 mediante (4.7)

donde hemos usado que $\nu \leq \mu$. Esto prueba que $\mu(F) = \nu(F)$ siempre que $F \in \mathcal{M}$ y $\mu(F) < \infty$. Es decir, siempre coinciden en conjuntos de medida μ finita.

Veamos que si μ es σ-finita $\nu = \mu$. Sea $X = \cup_j E_j$ con $\mu(E_j) < \infty$ y $E_j \in \mathcal{M}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los E_j son disjuntos 2 a 2. Para todo $F \in \mathcal{M}$ $\mu(F) = \sum_j \mu(E_j \cap F) = \sum_j \nu(E_j \cap F) = \nu(F)$, donde en la segunda igualdad usamos que μ y ν coinciden en conjuntos de medida finita. □

Observación 4.17. *La medida anterior, definida en $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$, no necesariamente es completa, ya que $\mathcal{M}$ no tiene porqué contener todos los subconjuntos de un conjunto de medida nula. No obstante, se puede probar que la completación de $\mathcal{M}$ (es decir incluir en $\mathcal{M}$ todos los subconjuntos de los conjuntos de medida nula), da la σ-álgebra del Teorema de Caratheodory.*

Ejemplo 4.18. Un ejemplo interesante donde la unicidad de la extensión no se cumple es el siguiente: consideremos en $2^{\mathbb{R}}$ la medida de conteo que denotamos ν (es decir $\nu(E) = \#A$). Consideremos ahora $\mathcal{A}$ el álgebra generada por las uniones finitas de intervalos de la forma $(a, b]$ con $a < b$, donde a puede ser $-\infty$ o $b = \infty$. Sea μ_0 la premedida en $\mathcal{A}$ que vale $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu_0(A) = \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$, con $A \neq \emptyset$, esto permite definir la medida de Cartheodory, que llamamos μ generada por μ_0, observar que la sigma álgebra de los μ-medibles contiene a los borelianos . Si bien ν y μ coinciden en $\mathcal{A}$, no coinciden en los borelianos ya que en esta sigma álgebra están los puntos $\{x\}$ y $\nu(\{x\}) = 1$ pero $\mu(\{x\}) = \infty$. Es fácil ver que $\mu(A) = \infty$ para todo $A \neq \emptyset$, por lo tanto se cumple $\nu \leq \mu$, y además coinciden en los conjuntos de medida finita respecto de μ (que es únicamente el vacío).
Observar que si en vez de definir μ_0 en el álgebra anterior la hubiéramos definido en el álgebra formado por las uniones finitas de intervalos de la forma $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ con $a < b$ (donde puede ser $a = -\infty$ o $b = \infty$), no coincide con ν en esta nueva álgebra (ya que esta álgebra contiene los puntos).

Definición 4.19. Dada un álgebra $\mathcal{A}$ definimos $\mathcal{A}_\sigma$ a la familia de conjuntos que se obtienen como uniones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}$. Definimos también $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ los conjuntos que se obtienen como intersección numerable de conjuntos de $\mathcal{A}_\sigma$.

Se deja como ejercicio la siguiente proposición:

Proposición 4.20. *Para todo conjunto E y para todo $\varepsilon > 0$ existe $E_1 \in \mathcal{A}_\sigma$ y $E_2 \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset E_1$, $E \subset E_2$, $\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E) + \varepsilon$ y $\mu_*(E_2) = \mu_*(E)$.*

4.2. Integración en espacios de medida abstractos

En esta sección daremos la definición de integral de Lebesgue para espacios de medida abstractos, la mayoría de las demostraciones son totalmente análogas a las que se hicieron para la medida de Lebesgue y se omiten. Supondremos que tenemos un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ donde μ se asume σ-finita. Vamos a empezar definiendo las funciones medibles y las funciones simples. Recordemos que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Al igual que antes, decimos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(\infty) \in \mathcal{M}$. Cuando decimos que dos funciones son iguales ctp o que una igualdad entre conjuntos es ctp nos referimos a que se da en todo punto salvo un conjunto de medida μ nula. De forma totalmente análoga a lo hecho para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ se prueba que si f_n es una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$ entonces f es medible. Definimos, para $E_1, \ldots, E_n$ medibles de medida finita, y $a_1, \ldots, a_n$ números reales, las funciones simples como

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j},$$

nuevamente podemos suponer sin pérdida de generalidad que los a_j son todos no nulos, distintos, y los E_j son disjuntos 2 a 2, lo cual nos da unicidad en la representación anterior para φ_n.

Al igual que antes tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.21.

1. *Sea $f \geq 0$, medible en $(X, \mathcal{M}, \mu)$, existe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ una sucesión creciente de funciones simples tal que, para todo x*
$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x).$$
2. *Sea f medible en $(X, \mathcal{M}, \mu)$, existe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ una sucesión de funciones medibles tal que $|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$ para todo x, y*
$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x).$$
3. ***Egorov**. Si $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones medibles en $E \subset X$ con $\mu(E) < \infty$ tal que $f_k \xrightarrow{ctp} f$ en E, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subset E$ y $\mu(A_\epsilon \setminus E) < \epsilon$ y $f_k \rightrightarrows f$ en A_ϵ.*

Demostración. Para el punto 1 la misma función introducida en el Teorema 2.11 sirve. La prueba es totalmente análoga, excepto que al final, en lugar de tomar una sucesión de cubos crecientes, se usa que X es σ-finito. El punto 2 se prueba de forma totalmente análoga al Teorema 2.12 y lo mismo para el Teorema de Egorov. □

Si bien hay una versión del teorema de Lusin para el caso de medidas abstractas, requiere de algunos resultados topológicos como el Lema de Urysohn (ver el comentario que le sigue a la prueba del Teorema 2.15), y la omitiremos en este capítulo, se verá en el capítulo siguiente.

Definición 4.22. La integral de Lebesgue de una función f medible cualquiera, $\int_X f(x) d\mu(x)$, definida en un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ (el cual asumimos que es σ-finito) se define primero para funciones simples. Luego para funciones acotadas, luego para funciones positivas y finalmente para cualquier función medible, igual que como se hizo en el Capítulo 2.

Teorema 4.23.

1. ***Lema de Fatou.** Si $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones medibles y positivas*
$$\int \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int f_n d\mu.$$
2. ***Convergencia Monótona.** Si $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones medibles y positivas tal que $f_n(x) \uparrow f(x)$ ctp entonces $\int f_n d\mu \to_n \int f$.*
3. ***Convergencia Dominada.** Si $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{ctp} f$ y existe g integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ ctp x entonces*
$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \quad y \quad \int f_n \to \int f.$$

4.2.1. Espacios L^p

Al igual que antes podemos definir el espacio $L^1(X, \mu)$ como el espacio vectorial de funciones[5] $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles, integrables, cocientado por la relación de equivalencia $\sim$ con $f \sim g$ si $f = g$ ctp, y con la norma
$$\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f(x)| d\mu(x).$$

[5]que es cerrado por sumas se sigue de la desigualdad $|f + g|^p \leq [2 \max\{|f|, |g|\}]^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ para $p \geq 1$.

El espacio L^1 es un espacio de Banach (es decir es un espacio normado y completo). La demostración de la completitud es totalmente análoga a la vista en el Teorema 2.39.

El espacio $L^2(X,\mu)$ es el espacio de funciones medibles cocientado por la relación de equivalencia mencionada antes, y formado por aquellas clases de equivalencia de funciones que cumplen $\int_X f^2(x)d\mu(x) < \infty$. En $L^2(X,\mu)$ definimos

$$\|f\|_{L^2(X,\mu)} = \Big(\int_X f(x)^2 d\mu(x)\Big)^{1/2}.$$

De la desigualdad de Minkowski (que se enuncia mas adelante) se sigue que esto define una norma. Además L^2 es un espacio con un producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

Se puede probar que L^2 es un espacio de Hilbert, es decir es completo.

En general se pueden definir los espacios $L^p(X,\mu)$ para $1 \leq p < \infty$ como el espacio de clases de equivalencia de funciones (con la relación de equivalencia dada anteriormente), y con la norma (nuevamente que es una norma se sigue de la Desigualdad de Minkowski)

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\Big)^{1/p}.$$

Se puede probar que es un espacio de Banach. En general para simplificar, la norma en $L^p(X,\mu)$ de una función f se suele denotar simplemente $\|f\|_p$. El caso $p = \infty$ también tiene interés, en este caso se define la norma

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

El espacio L^∞ es un espacio de Banach.

Algunas desigualdades importantes en estos espacios son:

Teorema 4.24.

- ***Desigualdad de Hölder:*** *Sean p y q tal que $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, y $(1/p) + (1/q) = 1$, si $\|f\|^p < \infty$ y $\|g\|^q < \infty$ entonces $\|fg\|_1 < \infty$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{4.9}$$

  en particular si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ entonces $fg \in L^1$, y la igualdad en (4.9) se da si y sólo si $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$ ctp x (respecto de μ) para algunas constantes $\alpha\beta \neq 0$.
  Si f, g son medibles $f \in L^\infty$ y $g \in L^1$ entonces $fg \in L^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

- ***Desigualdad de Minkowski:*** *Si $\|f\|_p < \infty$ y $\|g\|_p < \infty$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $\|f+g\|_p < \infty$ y*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Antes de demostrar el Teorema (4.24) vamos a demostrar un lema:

Lema 4.25. *Sea $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $0 < \lambda < 1$ entonces*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b,$$

y la igualdad vale si y sólo si $a = b$.

Demostración. El resultado es trivial si $b = 0$, en caso contrario si definimos $t = a/b$ tenemos que mostrar que
$$t^\lambda \leq \lambda t + (1 - \lambda)$$
y la igualdad se da si y sólo si $t = 1$. La función $t^\lambda - \lambda t$ es estrictamente creciente hasta $t = 1$, vale $1 - \lambda$ si $t = 1$ y estrictamente decreciente si $t > 1$. Por lo tanto su máximo se da en $t = 1$. Esto prueba el Lema. $\square$

Demostración de la desigualdad de Hölder. Es claro que (4.9) es cierta si $\|f\|_p = 0$ o $\|g\|_q = 0$ (ya que en estos casos $f = 0$ ctp o $g = 0$ ctp), también es cierta si $\|f\|_p = \infty$ o $\|g\|_q = \infty$. Supongamos que no estamos en estos casos triviales, vamos a aplicar el lema anterior para cada x definiendo
$$a = \Big|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\Big|^p \qquad b = \Big|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\Big|^q \qquad \lambda = \frac{1}{p}$$
y obtenemos
$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int |f|^p d\mu} + \frac{|g(x)|^q}{q\int |g|^q d\mu}, \tag{4.10}$$
si integramos a ambos lados de la desigualdad anterior se obtiene
$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Esto prueba la desigualdad. Observar que la igualdad se da si y sólo si en (4.10) se da la igualdad ctp x (respecto de μ) pero esto por el lema anterior se da si y sólo si para casi todo x, $\|g\|_q^q|f(x)|^p = \|f\|_p^p|g(x)|^q$.

Para demostrar el caso $p = \infty$, observemos primero que
$$\|f\|_\infty = \text{mín}\{a > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$
ya que si $a_n \downarrow \|f\|_\infty$, entonces $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \cup_n\{x : |f(x)| > a_n\}$, y esta es una unión de conjuntos de medida 0. Por lo tanto $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Por otra parte
$$\int |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_\infty \int |g(x)|d\mu + \int_{\{x:|f(x)|>\|f\|_\infty\}} |f(x)g(x)|d\mu(x) = \|f\|_\infty\|g\|_1,$$
donde hemos usado que $0\infty = 0$ por definición. $\square$

Un corolario interesante de esta desigualdad es la inclusión $L^q \subset L^p$ si $0 < p < q < \infty$, para espacios de medida finita.

Corolario 4.26. *Sea μ una medida en $(X, \mathcal{M})$, si $\mu(X) < \infty$ y $0 < p < q < \infty$ entonces $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ y $\|f\|_p \leq \|f\|_q\mu(X)^{1/p-1/q}$.*

Demostración. Vamos a usar la desigualdad con $p := q/p$, $q := q/(q - p)$, $f = |f|^p$ y $g = 1$.
$$\|f\|_p^p = \int 1|f|^p \leq \||f|^p\|_{q/p}\|1\|_{q/(q-p)}$$
$$\||f|^p\|_{q/p} = \Big(\int |f|^{p\frac{q}{p}}\Big)^{p/q} = \|f\|_q^p$$
$\square$

Demostración de la desigualdad de Minkowski. El resultado para $p = 1$ se sigue de la desigualdad triangular del valor absoluto. Por otra parte es trivial si $f + g = 0$ ctp. En caso contrario escribimos

$$|f + g|^p = |f + g|(|f + g|^{p-1}) \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1},$$

si integramos en esta ecuación

$$\int |f + g|^p \leq \int |f||f + g|^{p-1} + \int |g||f + g|^{p-1}.$$

Vamos a usar la desigualdad de Hölder en ambas integrales y obtenemos

$$\int |f||f + g|^{p-1} \leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q$$

y

$$\int |g||f + g|^{p-1} \leq \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q.$$

Si $1/p + 1/q = 1$, entonces $(p + q) = pq$ y $(p - 1)q = p$, con lo cual

$$\||f + g|^{p-1}\|_q = \Big(\int |f + g|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} = \Big(\int |f + g|^p\Big)^{1/q}$$

Finalmente hemos probado que

$$\int |f + g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int |f + g|^p\Big)^{1/q}$$

y la desigualdad de Minkowski se sigue simplemente de que $1 - 1/q = p$, al pasar dividiendo la integral de la derecha. □

Observación 4.27. *La desigualdad de Hölder prueba que el espacio L^q es isomorfo al dual (continuo) del espacio L^p (siempre que $1 < p < \infty$ y $(1/p) + (1/q) = 1$). Esto significa que hay una biyección lineal y continua entre L^q y el dual continuo de L^p. Recordar que el dual (continuo) de L^p es el espacio de las transformaciones lineales continuas de L^p en $\mathbb{R}$. Un funcional T en este espacio tiene la norma*

$$\|T\| = \sup_{g \in L^p, \|g\|_p \leq 1} |T(g)|.$$

La biyección es simplemente considerar para $g \in L^q$ la transformación lineal y continua k_g definida en L^p a valores en $\mathbb{R}$ que hace que $k_g(f) = \int fgd\mu$. Por la desigualdad de Hölder es inmediato que k_g es continua, es decir $\sup_{g \in L^q, \|g\| \leq 1} \|k_g\| < \infty$, donde

$$\|k_g\| = \sup_{f \in L^p, \|f\| \leq 1} \int fgd\mu.$$

4.3. Medida Producto

Sean $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ dos espacios de medida, queremos definir $\mu_1 \times \mu_2$ en $X_1 \times X_2$. Asumimos que ambas medidas son completas y σ-finitas.

Definición 4.28. Un rectángulo medible es $A \times B \in X_1 \times X_2$ tal que $A \in \mathcal{M}_1$ y $B \in \mathcal{M}_2$. Denotamos $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los subconjuntos de $X_1 \times X_2$ que son uniones finitas de rectángulos medibles *disjuntos*. Se deja como ejercicio verificar que $\mathcal{A}$ es un álgebra[6]. Definimos para un rectángulo $A \times B$

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

Por otra parte si $E = \cup_{j=1}^n A_j \times B_j$ donde los $A_j \times B_j$ son rectángulos disjuntos dos a dos, definimos

$$\mu_1 \times \mu_2(E) = \sum_{j=1}^n \mu_1(A_j)\mu_2(B_j). \tag{4.11}$$

Veamos que $\mu_1 \times \mu_2$ así definida es una premedida en $\mathcal{A}$, para eso supongamos que tenemos un rectángulo que es unión finita o numerable de rectángulos disjuntos

$$A \times B = \bigcup_j A_j \times B_j$$

con $A_j \times B_j$ rectángulos medibles y disjuntos. Veamos primero que

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \sum_j \mu_1 \times \mu_2(A_j \times B_j). \tag{4.12}$$

Si $x \in A$ y $y \in B$, tenemos que (x, y) está en un único $A_j \times B_j$ ya que son disjuntos, ver figura 4.2. De esto se sigue que para todo $x \in A$,

$$B = \bigcup_{\{j: x \in A_j\}} B_j$$

donde la unión anterior es disjunta. Por lo tanto

$$\mathbb{I}_A(x)\mu_2(B) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{I}_{A_j}(x)\mu_2(B_j).$$

Si usamos el teorema de convergencia monótona integrando respecto de μ_1

$$\int \mathbb{I}_A(x)\mu_2(B)d\mu_1(x) = \mu_1(A)\mu_2(B) = \int \Big(\sum_{j=1}^\infty \mathbb{I}_{A_j}(x)\mu_2(B_j)\Big) d\mu_1(x) =$$

$$\sum_{j=1}^\infty \int \mathbb{I}_{A_j}(x)\mu_2(B_j)d\mu_1(x) = \sum_{j=1}^\infty \mu_1(A_j)\mu_2(B_j),$$

Por otra parte, por definición de $\mu_1 \times \mu_2$

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \sum_{j=1}^\infty \mu_1 \times \mu_2(A_j \times B_j)$$

esto prueba (4.12).

Si tenemos $E_1, E_2, \dots$ elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos 2 a 2 tal que $\cup_j E_j \in \mathcal{A}$ entonces

$$\bigcup_j E_j = R_1 \cup \cdots \cup R_n,$$

[6]Por ejemplo $(A \times B)^c$ es la unión de los rectángulos disjuntos $A \times B^c$ y $A^c \times X_2$

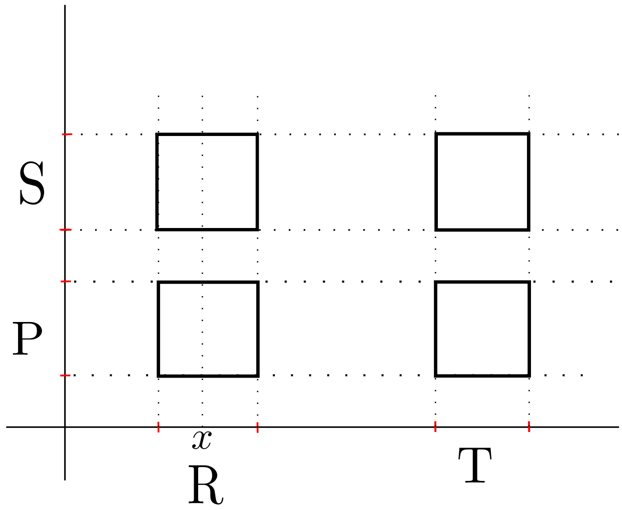

Figura 4.2: En la figura $A = R \cup T$ y $B = S \cup P$, $A \times B$ es el rectángulo que se puede escribir como la unión de 4 rectángulos disjuntos $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_2$ $A_3 \times B_3$ y $A_4 \times B_4$ donde por ejemplo $A_1 = A_2 = R$ y $B_1 = B_3 = P$ y $A_3 = A_4 = T$, $B_2 = B_4 = S$

donde los R_i son rectángulos disjuntos. Por lo tanto, por definición

$$\mu_1 \times \mu_2\Big(\bigcup_j E_j\Big) = \mu_1 \times \mu_2(R_1) + \cdots + \mu_1 \times \mu_2(R_n).$$

Los conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ se pueden escribir cada uno de ellos como unión finita de rectángulos. De cada una de estas uniones finitas tomamos E_j^i los rectángulos que forman el R_i, es decir $R_i = \cup_j E_j^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ donde los E_j^i son rectángulos, disjuntos de los rectángulos E_j^r si $i \neq r$ y cada E_j^i está incluido en alguno de los E_i. Por lo que ya probamos vale (4.12) para cada R_i, prueba que vale el punto 2 de la definición de premedida (ver Definición (4.14)).

Como $\mu_1 \times \mu_2$ es una premedida en $\mathcal{A}$, por el Teorema 4.16 se puede extender a una medida, en una σ-álgebra que denotamos $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ (generada por $\mathcal{A}$). Dado $E \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ con $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ definimos, para $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$,

$$E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in E\} \qquad \text{y} \qquad E^{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

Vamos a probar el siguiente teorema.

Teorema 4.29. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. entonces las funciones $x \to \nu(E_x)$ y $y \to \mu(E^y)$ son medibles en X e Y respectivamente y*

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Para eso vamos a necesitar introducir el concepto de clase monótona y probar un lema técnico.

Definición 4.30. Clase monótona. Una clase monótona en un conjunto X es un subcojunto $\mathcal{C}$ de las partes de X cerrado por uniones numerables crecientes y por intersecciones numerables decrecientes y contiene al vacío. Es inmediato que una σ-álgebra en X es una clase monótona. Además, la intersección de cualquier familia de clases monótonas es una clase monótona, esto permite definir para cualquier $\mathcal{E} \subset 2^X$, la clase monótona generada por $\mathcal{E}$, como la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{E}$.

Lema 4.31. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos, la clase monótona $\mathcal{C}$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{A}$.*

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es una clase monótona tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. Para probar la otra inclusión veremos primero que $\mathcal{C}$ es un álgebra, para lo cual basta ver que para todo $E, F \in \mathcal{C}$, $E \setminus F$, $E \cap F$, están en $\mathcal{C}$, esto se debe a que por hipótesis $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ por lo tanto $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, con lo cual para todo $E \in \mathcal{C}$, $X \setminus E = E^c$ está en $\mathcal{C}$ si probamos que $E \setminus F \in \mathcal{C}$ para todo $E, F \in \mathcal{C}$. Que $\mathcal{C}$ es cerrado por intersecciones finitas se sigue de que $E \cap F$ está $\mathcal{C}$.

Luego veremos que $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones numerables, con lo cual $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ y por lo tanto a $\mathcal{M}$.

Para $E \in \mathcal{C}$ definimos

$$\mathcal{C}(E) = \Big\{F \in \mathcal{C} : E \setminus F, F \setminus E, \text{ y } E \cap F \text{ pertenecen a } \mathcal{C}\Big\}$$

- $E, \emptyset \in \mathcal{C}(E)$, $E \in \mathcal{C}(F)$ si y sólo si $F \in \mathcal{C}(E)$.
- $\mathcal{C}(E)$ es una clase monótona: si E_j es una familia creciente de conjuntos en $\mathcal{C}$, $E \setminus \cup_j E_j = \cap_j (E \setminus E_j)$ es una intersección decreciente de conjuntos en E. Por otra parte, $(\cup_j E_j) \setminus E = \cup_j (E_j \setminus E)$ es una unión creciente de conjuntos que están en $\mathcal{C}$ por lo tanto está en $\mathcal{C}$. Análogamente para intersecciones decrecientes.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$ para todo $F \in \mathcal{C}$: como $\mathcal{A}$ es un álgebra, si $E \in \mathcal{A}$ entonces para todo $F \in \mathcal{A}$ se tiene que $F \in \mathcal{C}(E)$, por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$ y como $\mathcal{C}$ es la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}(E)$ es una clase monótona tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$. De esto último se sigue que si $F \in \mathcal{C}$ entonces $F \in \mathcal{C}(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$ pero ya vimos que esto es equivalente a $E \in \mathcal{C}(F)$ para todo $E \in \mathcal{A}$ por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$ de donde se sigue que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(F)$.
- $\mathcal{C}$ es un álgebra: del punto anterior se concluye que para todo $E, F \in \mathcal{C}$, $E \setminus F$ y $F \cap E$ están en $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones numerables: cualquier unión numerable $\cup_j E_j$ se puede escribir como una unión creciente de conjuntos F_n donde $F_n = \cup_{j=1}^n E_j$. Observar que como $\mathcal{C}$ es un álgebra los conjuntos F_n están en $\mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones crecientes $\cup_n F_n$ está en $\mathcal{C}$.

□

Demostración del Teorema 4.29. Supongamos primero que μ y ν son finitas. Sea $\mathcal{C}$ la familia de conjuntos $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ para los cuales vale la tesis del teorema. Si $E = A \times B$ entonces $\nu(E_x) = \mathbb{I}_A(x)\nu(B)$ y $\mu(E^y) = \mu(A)\mathbb{I}_B(y)$ por lo tanto $E \in \mathcal{C}$. De la linealidad de la integral es fácil ver que la unión finita de rectángulos disjuntos está en $\mathcal{C}$ por lo tanto por el lema anterior basta probar que $\mathcal{C}$ es una clase monótona. Si $E_1, E_2, \ldots$ es una familia creciente de conjuntos en $\mathcal{C}$ y $E = \cup_n E_n$ entonces las funciones $f_n(y) = \mu(E_n^y)$ son medibles y crecen puntualmente a $f(y) = \mu(E^y)$ por lo tanto f es medible y por el teorema de convergencia monótona

$$\int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = \lim \int_Y \mu(E_n^y) d\nu(y) = \lim \mu \times \nu(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Donde en la segunda igualdad usamos que vale el teorema para los conjuntos E_n y en la última la continuidad de la medida $\mu \times \nu$. Análogamente se prueba

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Por lo tanto $E \in \mathcal{C}$. Para ver que $\mathcal{C}$ es cerrado por intersecciones decrecientes numerables sea $E_{n+1} \subset E_n$ y $E = \cap_n E_n$ con $E_n \in \mathcal{C}$, como $\mu(E_1^y) \leq \mu(X) < \infty$ $\mu(E_n^y) \to \mu(E^y)$ para todo y. Definimos la sucesión de funciones $f_n(y) = \mu(E_n^y)$, tenemos que $f_n(y) \leq f_1(E^y) \leq \mu(X) < \infty$ y f_n convergen puntualmente a $f(y) = \mu(E^y)$, por lo tanto podemos usar el teorema de convergencia dominada[7] y obtenemos,

$$\mu \times \nu(E_n) = \int_Y f_n(y) d\nu(y) = \int_Y \mu(E_n^y) d\nu(y) \to \int_Y f(y) d\nu(y) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y),$$

además $\mu \times \nu(E_n) \to \mu \times \nu(E)$ ya que $\mu \times \nu(E_1) \leq \mu \times \nu(X \times Y) = \mu(X) \times \nu(Y) < \infty$, de donde se sigue que

$$\mu \times \nu(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Análogamente $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)$, y concluimos que $E \in \mathcal{C}$.

Finalmente supongamos que μ y ν son σ-finitas, podemos escribir $X \times Y$ como una unión creciente de rectángulos $X_j \times Y_j$ de medida finita. Si $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$

$$\mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_X \mathbb{I}_{X_j}(x) \nu(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int_Y \mathbb{I}_{Y_j}(y) \mu(E^y \cap X_j) d\nu(y).$$

Usando la continuidad de la medida $\mu \times \nu$ tenemos que

$$\mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) \to \mu \times \nu(E) \quad \text{cuando } j \to \infty,$$

Por otra parte observar que, para todo x, $\mathbb{I}_{X_j}(x)\nu(E_x \cap Y_j)$ crece a $\nu(E_x)$, y se concluye usando el teorema de convergencia monótona.

□

Vamos a enunciar ahora el Teorema de Fubini para un espacio producto $X_1 \times X_2$. Asumimos que cada espacio está en las hipótesis dadas al comienzo de la sección (completas y σ-finitas).

Teorema 4.32. *Supongamos que $f(x_1, x_2)$ es integrable en $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$.*

1. *Para casi todo $x_2 \in X_2$, $f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ es integrable en (X_1, μ_1).*

2. *La función*
$$F(x_2) = \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1),$$
es integrable en X_2, y

3. $$\int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f^{x_2}(x_1) d\mu_1(x_1) \Big) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d\mu_1 \times \mu_2(x_1, x_2)$$

Demostración. La demostración sigue la misma linea que hicimos en $\mathbb{R}^d$, primero se demuestra para $f(x) = \mathbb{I}_E(x)$ con E medible (esto se sigue del Teorema 4.29), por lo tanto vale para funciones simples, por el Teorema de Convergencia Monótona vale para funciones no negativas. Finalmente se descompone $f = f^+ - f^-$. □

[7] aquí sea usa que $\nu(Y) < \infty$

4.4. Continuidad Absoluta de Medidas

Supongamos que tenemos dos medidas μ_1 y μ_2 en $(X, \mathcal{M})$, queremos ver bajo que hipótesis podemos escribir $\mu_1(E) = \int_E f(x)d\mu_2$ para alguna función medible f. Primero vamos a extender el concepto de medida para incluir medidas que puedan ser negativas..

Definición 4.33. Una **medida signada** ν en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ es una función $\nu : \mathcal{M} \to (-\infty, \infty]$ [8] tal que $\nu(\emptyset) = 0$ y si $E_1, E_2, \dots$ son disjuntos

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Es importante observar que para que esto último tenga sentido la suma anterior no puede depender de la reordenación, lo cual implica que, si en particular $\nu(\cup_j E_j) < \infty$, la suma es absolutamente convergente.

Para las medidas signadas no necesariamente es cierto que si $A \subset B$, $\nu(A) \leq \nu(B)$. Se deja como ejercicio verificar no obstante, que vale la continuidad de la medida (con la misma demostración que en el Teorema 1.19)

Definición 4.34. Si μ y ν son dos medidas signadas a valores en $(-\infty, \infty)$ para todo par de números reales a,b, $a\mu+b\nu$ es una medida signada a valores en $(-\infty, \infty)$. Esto hace que el espacio de las medidas signadas a valores en $(-\infty, \infty)$ definidas en un conjunto X, que denotamos $SF(X)$, sea un espacio vectorial. Veremos que en este espacio podemos definir una norma.

Ejemplo 4.35. Si tenemos $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y f medible tal que $\int f^- d\mu < \infty$, entonces $\nu(E) = \int_E f d\mu$ es una medida signada.

Dada una medida signada ν en $\mathcal{M}$ queremos encontrar una medida positiva μ en $\mathcal{M}$ tal que $\nu(E) \leq \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$ y que μ sea la "más chica" que verifica eso. Para eso definimos

Definición 4.36. Definimos la **variación total** de una medida signada ν en E como

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)|$$

donde el supremo es en la familia de particiones numerables medibles de E, es decir $\{E_i\}_i$ tal que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $E_i \in \mathcal{M}$ para todo i, y $\cup_i E_i = E$.

Observación 4.37. *Una observación inmediata de la definición es que $|\nu|(E) = 0$ si y sólo si $\nu(A) = 0$ para todo $A \subset E$, $A \in \mathcal{M}$.*

Proposición 4.38.

1. *La variación total $|\nu|$ de una medida signada es una medida positiva que cumple $-|\nu| \leq \nu \leq |\nu|$.*
2. *Si μ y ν son medidas signadas en $SF(X)$, $|\nu + \mu| \leq |\nu| + |\mu|$.*
3. *La función que asigna para $\nu \in SF(X)$ el valor $\|\nu\| = |\nu|(X)$ es una norma.*

Demostración.

[8]en algunos libros, por ejemplo el de G. Folland, se pide que sea una función $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ con la restricción de que pueda tomar uno sólo de dichos infinitos

1. Que $\nu \leq |\nu|$ se sigue de que para todo $E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) \leq |\nu(E)| \leq |\nu|(E)$. Además es claro que $|\nu| = |-\nu| \geq -\nu$. Para ver que $|\nu|$ es una medida es suficiente probar que si $E_1, E_2, \ldots$ es una familia numerable de subconjuntos en $\mathcal{M}$, disjuntos, y denotamos $E = \cup_j E_j$ entonces
$$\sum_j |\nu|(E_j) \leq \nu(E) \tag{4.13}$$
y
$$|\nu|(E) \leq \sum_j |\nu|(E_j). \tag{4.14}$$
Sea α_j números reales tal que $\alpha_j \leq |\nu|(E_j)$ para todo j, existen $F_{i,j}$ disjuntos para todo $i \neq j$, tal que $E_j = \cup_i F_{i,j}$ y $\alpha_j \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(F_{i,j})|$. Por lo tanto
$$\sum_j \alpha_j \leq \sum_j \sum_i |\nu(F_{i,j})| \leq |\nu|(E),$$
donde la segunda desigualdad se debe a que $\{F_{i,j}\}_{i,j}$ es una partición disjunta de E por elementos de $\mathcal{M}$. Tomando supremo en los α_j se sigue (4.13). Para probar la desigualdad (4.14) sea $F_1, F_2, \ldots$ una partición cualquiera de E por conjuntos medibles y disjuntos, fijado k los conjuntos $\{F_k \cap E_j\}_j$ forman una partición de F_k, de donde usando la σ-aditividad de la medida ν, $\nu(F_k) = \sum_j \nu(F_k \cap E_j)$, y usando la desigualdad triangular del valor absoluto,
$$\sum_k |\nu(F_k)| = \sum_k \Big| \sum_j \nu(F_k \cap E_j) \Big| \leq \sum_k \sum_j |\nu(F_k \cap E_j)| \leq \sum_j \sum_k |\nu(F_k \cap E_j)| \leq \sum_j |\nu|(E_j),$$
donde la última desigualdad se sigue de la definición de $|\nu|(E_j)$. Tomando supremo en la partición $F_1, F_2, \ldots$ se obtiene (4.14).

2. Sea $E \in \mathcal{M}$ y E_j una partición de E,
$$\sum_{j=1}^{\infty} |(\mu + \nu)(E_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| + \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| \leq |\mu|(E) + |\nu|(E)$$
tomando supremo a la izquierda en las particiones de E se obtiene $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$.

3. La desigualdad triangular se sigue del punto anterior. En inmediato también que para todo número real λ, $\|\lambda\nu\| = |\lambda\nu|(X) = |\lambda||\nu|(X)$. Además, si $|\nu|(X) = 0$, para todo $E \subset X$, $E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| = 0$, por lo tanto $\nu = 0$.

□

Definición 4.39. Definimos la **variación positiva** y la **variación negativa** de una medida signada ν como
$$\nu^+ = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) \qquad \text{y} \qquad \nu^- = \frac{1}{2}(|\nu| - \nu).$$
Si $\nu(E) = \infty$ entonces $|\nu(E)| = \infty$ y en ese caso definimos $\nu^-(E) = 0$.

Decimos que ν es σ-finita si $|\nu|$ es σ-finita (en cuyo caso ν^+ y ν^- lo son).

Observación 4.40. *Verificar que $\nu = \nu^+ - \nu^-$, y $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Como $\nu \leq |\nu|$ se sigue ν^- es una medida positiva. Además $-\nu^- = (1/2)(\nu - |\nu|) \leq \nu$ ya que $-|\nu| \leq \nu$, por lo tanto $\nu + \nu^- \geq 0$, es decir ν^+ es una medida positiva.*

Definición 4.41. Una medida ν signada definida en $\mathcal{M}$ tiene **soporte** $A \in \mathcal{M}$ si para todo $E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) = \nu(E \cap A)$.

En lo que sigue veremos que las medidas ν^+ y ν^- tienen soportes disjuntos y son únicas (a menos de conjuntos de ν medida nula). Esta descomposición de ν se llama descomposición de Jordan.

4.4.1. Continuidad y singularidad de medidas

Definición 4.42. Dos medidas μ y ν definidas en $\mathcal{M}$ son **mutuamente singulares** si tienen soportes A y B disjuntos, es decir,

$$\nu(E) = \nu(A \cap E) \qquad \text{y} \qquad \mu(E) = \mu(E \cap B) \qquad \forall E \in \mathcal{M}, \quad A \cap B = \emptyset,$$

se denota $\nu \perp \mu$.

Definición 4.43. Si ν es una medida signada y μ una medida positiva se dice que ν es **absolutamente continua** respecto de μ, y se denota $\nu \ll \mu$ si $\nu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) = 0$.

La siguiente proposición se deja como ejercicio

Proposición 4.44.

1. *Sean ν y μ signadas, $\nu \perp \mu$ si y sólo si $|\nu| \perp \mu$ si y sólo si $\nu^+ \perp \mu$ y $\nu^- \perp \mu$.*

2. *Sea ν signada y μ positiva, $\nu \ll \mu$ si y sólo si $|\nu| \ll \mu$ si y sólo si $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$.*

Ejemplo 4.45. Si $f \in L^1(X, \mu)$ o f es integrable en sentido extendido (es decir $\int f^- < \infty$ pero $\int f^+ = \infty$) y definimos $\nu(E) = \int_E f d\mu$ se cumple que $\nu \ll \mu$. En este caso se denota

$$\frac{d\nu}{d\mu} = f.$$

Proposición 4.46.

1. *Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $\mu(E) < \delta$ se cumple $|\nu(E)| < \epsilon$, entonces $\nu \ll \mu$.*

2. *Si la medida $|\nu|$ es finita y $\nu \ll \mu$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $\mu(E) < \delta$ se cumple $|\nu(E)| < \epsilon$.*

Demostración. El punto 1 es inmediato ya que si $\mu(E) = 0$ podemos tomar $\epsilon = 1/n$ y $\nu(E) < 1/n$. Para demostrar 2, observemos que es suficiente probarlo para el caso en que ν es positiva ya que, $\nu \ll \mu$ si y sólo si $|\nu| \ll \mu$, y $|\nu|$ es una medida positiva y $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$. Además como estamos suponiendo $|\nu|$ finita, podemos suponer ν finita. Supongamos que no se cumple la tesis entonces existe $\epsilon > 0$ para el cual podemos encontrar una sucesión de conjuntos E_n tal que $\mu(E_n) < 1/2^n$ pero $\nu(E_n) \geq \epsilon$. Consideremos

$$E^* = \overline{\lim} \, E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^*$$

con $E_n^* = \cup_{k \geq n} E_k$, E_n^* es una sucesión decreciente de conjuntos y $\mu(E_1^*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k < \infty$ por lo tanto $\mu(E^*) = \lim \mu(E_n^*) = 0$ pero $\nu(E_n^*) \geq \nu(E_n) \geq \epsilon$ (observar que aquí se usa que ν es positiva). Nuevamente como E_n^* es una familia decreciente de conjuntos y como ν es finita $\nu(E^*) = \lim_n \nu(E_n) \geq \epsilon$, lo cual contradice que $\nu \ll \mu$. $\square$

Ejemplo 4.47. En general no es cierto que dadas dos medidas uno pueda encontrar f tal que $\nu = \int f d\mu$ o $\mu = \int f d\nu$. Por ejemplo si δ es la medida de Dirac en $\mathbb{R}$ ($\delta(E) = 1$ si y sólo si $0 \in E$) y m es la medida de Lebesgue. Tampoco es cierto que si $\nu \ll \mu$ existe f tal que $\nu = \int f d\mu$, basta tomar μ la medida de conteo y ν la medida de Lebesgue.

4.4.2. Descomposición de Hahn

Definición 4.48. Dada una medida signada ν en $\mathcal{M}$ decimos que $P \in \mathcal{M}$ es **positivo** si $\nu(E) \geq 0$ para todo $E \subset P$, $E \in \mathcal{M}$. Análogamente decimos que $N \in \mathcal{M}$ es **negativo** si $\nu(E) \leq 0$ para todo $E \subset N$, $E \in \mathcal{M}$. Finalmente, decimos que $S \in \mathcal{M}$ es **nulo** si $\nu(E) = 0$ para todo $E \subset S$.

Lema 4.49. *Si P_n es positivo para todo n entonces $\cup P_n = P$ es positivo.*

Demostración. Definimos $Q_1 = P_1$ y $Q_n = P_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} P_j$, los conjuntos Q_n son disjuntos y $Q_n \subset P_n$. Si $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} P_n$ entonces $\nu(E \cap Q_n) \geq 0$ para todo n y vale [9]

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_n) \geq 0.$$

□

Lema 4.50. *Sea $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de medida con $\nu \in SF(X)$. Para todo $A \in \mathcal{M}$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $B \subset A$ tal que $\nu(B) \geq \nu(A)$ y $\nu(E) > -\epsilon$ para todo $E \subset B$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}$, definimos $A_1 = A$, si $\nu(E) > -\epsilon$ para todo $E \subset A$ entonces tomamos $B = A$. Sino existe $E_1 \subset A_1$ tal que $\nu(E_1) \leq -\epsilon$. Definimos $A_2 = A_1 \setminus E_1$. Como $-\infty < \nu(E_1) < 0$ $\nu(A_2) \geq \nu(A_1)$. Si $\nu(E) > -\epsilon$ para todo $E \subset A_2$ tomamos $B = A_2$. Sino existe $E_2 \subset A_2$ tal que $\nu(E_2) \leq -\epsilon$. Tomo $A_3 = A_2 \setminus E_2$. Si repetimos este procedimiento, o bien en algún momento encontramos el conjunto B o se construye una sucesión de conjuntos E_n disjuntos, incluidos en A tal que $\nu(E_n) \leq -\epsilon$ para todo n. Pero

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{k\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \nu(E_n) \leq \lim_{k\to\infty} -k\epsilon = -\infty$$

lo cual es imposible ya que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ y por definición $\nu(E) > -\infty$ para todo $E \in \mathcal{M}$. □

Lema 4.51. *Sea $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de medida con $\nu \in SF(X)$. Sea $A \in \mathcal{M}$, existe $P \subset A$ tal que $\nu(P) \geq \nu(A)$ y P es positivo.*

Demostración. Por el lema anterior podemos tomar $P_1 \subset A$ tal que $\nu(P_1) \geq \nu(A)$ y $\nu(E) > -1$ para todo $E \subset P_1$. Nuevamente aplicando el lema anterior existe $P_2 \subset P_1$ tal que $\nu(P_2) \geq \nu(P_1) \geq \nu(A)$ y $\nu(E) > -1/2$ para todo $E \subset P_2$. Definimos así $P_n \subset P_{n-1}$ y $\nu(P_n) \geq \nu(P_{n-1})$ y $\nu(E) \geq -1/n$ para todo $E \subset P_n$. Definimos $P = \cap_n P_n$. Como $P_1 \subset A$, por hipótesis $\nu(P_1) < \infty$ entonces $\nu(P_n) \to \nu(P)$ y $\nu(P_n) \geq \nu(A)$, por lo tanto $\nu(P) \geq A$. Si $E \subset P$ entonces $\nu(E) \geq -1/n$ para todo n con lo cual $\nu(E) \geq 0$. □

Teorema 4.52. ***Teorema de descomposición de Hahn*** . *Sea $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de medida con $\nu \in SF(X)$,*

1. *Existe una partición $\{P, N\}$ de X tal que P es positivo y N es negativo,*

2. *si $\{P', N'\}$ es otra partición que cumpla eso $P \triangle P' = N \triangle N'$ y $\nu(P \triangle P') = \nu(N \triangle N') = 0$.*

Demostración. Sea $a = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{M}\} \geq 0$. Existe $A_n \in \mathcal{M}$ una sucesión tal que $\nu(A_n) \to a$. Por el Lema 4.51, para todo n existe $P_n \subset A_n$ tal que $\nu(P_n) \geq \nu(A_n)$ y P_n es positivo, por lo tanto $\nu(P_n) \to a$. Definimos $P = \cup P_n$, por el Lema 4.49 P es positivo de donde se sigue que $\nu(P) \geq \nu(P_n)$ para todo n (ya que $\nu(P \setminus P_n) \geq 0$), por lo tanto $\nu(P) = a$. Definimos $N = P^c$. Es claro que N es negativo ya que si $E \subset N$ con $\nu(E) > 0$ sería $\nu(P \cup E) = \nu(P) + \nu(E) > \nu(P)$.

[9] observar que son términos positivos y por lo tanto la suma es independiente de la reordenación

Para demostrar el punto 2 sea $\{P', N'\}$ otra partición que cumple el teorema. Por un lado $P \setminus P' \subset P$ y es positivo porque P es positivo, pero $P \setminus P' \subset N'$ que es negativo. Por lo tanto $\nu(P \setminus P') = 0$. De manera análoga se prueba que $\nu(P' \setminus P) = 0$.

$\square$

Corolario 4.53. *Si $\nu \in SF(X)$, entonces es acotada, y además $\nu(N) \leq \nu(E) \leq \nu(P)$ para todo $E \in \mathcal{M}$ siendo $\{P, N\}$ la partición dada por el teorema anterior.*

El teorema de descomposición de Hahn permite obtener las medidas ν^+ y ν^- que definimos antes, de una manera mas constructiva. El siguiente teorema prueba que la descomposición de $\nu = \nu^+ - \nu^-$ es única ctp, y que ambas son positivas y tienen soporte disjunto.

Teorema 4.54. *Si $\nu \in SF(X)$ existen medidas positivas ν^+ y ν^- tal que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y $\nu^+ \perp \nu^-$. Además ν^+ y ν^- son únicas ctp.*

Demostración. Sea $X = P \cup N$ la partición de Hahn de ν. Definimos ν^+ tal que $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$ y $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$. Claramente estas medidas cumplen las propiedades deseadas. Supongamos que tenemos otra descomposición $\nu = \mu^+ - \mu^-$ con $\mu^+ \perp \mu^-$. Tomamos E y F los soportes de μ^+ y μ^- respectivamente, es claro que $X = E \cup F$ es una descomposición de Hahn, por el Teorema 4.52, $\nu(P \triangle E) = 0$. Si escribimos

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(E \cap A) = \nu(E \cap P \cap A) + \nu(E \cap P^c \cap A),$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\mu^-(A \cap E) = 0$. Por otra parte $\nu(E \cap P \cap A) + \nu(E^c \cap P \cap A) = \nu(P \cap A)$ pero $\nu(E^c \cap P \cap A) = 0$ ya que $\nu(P \triangle E) = 0$. Por lo tanto $\nu(E \cap P \cap A) = \nu(P \cap A)$. Además $0 \leq \nu(E \cap P^c \cap A) \leq \nu(E \cap P^c) = 0$ [10]. Finalmente,

$$\mu^+(A) = \nu(P \cap A) = \nu^+(A)$$

para todo $A \in \mathcal{M}$. De igual manera se prueba que $\nu^- = \mu^-$ ctp ν. $\square$

Ejercicio 4.55. Se deja como ejercicio verificar que

1. Si $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$ entonces $\nu = 0$.
2. Si $\nu_j \perp \mu$ para todo $j \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_j \nu_j \perp \mu$.
3. Si $\nu_j \ll \mu$ para todo $j \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_j \nu_j \ll \mu$.

Definición 4.56. La integral de una función medible f respecto de una medida signada ν se define como

$$\int f d\nu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^-.$$

Donde ν^+ y ν^- son las descomposiciones dadas en el Teorema 4.54. El espacio $L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-)$. Además,

$$\Big| \int f d\nu \Big| \leq \Big| \int f d\nu^+ \Big| + \Big| \int f d\nu^- \Big| \leq \int |f| d\nu^+ + \int |f| d\nu^- = \int |f| d|\nu|.$$

[10] observar que aquí se usa que E es positivo y por lo tanto vale la monotonía

4.4.3. Teorema de Radon-Nikodym

Antes de demostrar el teorema vamos a demostrar un lema necesario para la demostración del Teorema de Radon-Nikodym

Lema 4.57. *Sean ν y μ medidas en $(X, \mathcal{M})$ positivas y finitas entonces o bien $\nu \perp \mu$ o existe $E \in \mathcal{M}$ y $\epsilon > 0$ tal que $\mu(E) > 0$ y E es positivo para $\nu - \epsilon\mu$, es decir $\nu(A) \geq \epsilon\mu(A)$ para todo $A \subset E$. Observar que son condiciones excluyentes.*

Demostración. Para ver que son excluyentes, supongamos que $\nu \perp \mu$ por lo tanto existen P y Q disjuntos, donde P es el soporte de ν y Q el de μ. Si existiera el conjunto E tal que $\nu - \epsilon\mu$ es positivo en E, se tendría que $0 = \nu(E \cap Q) \geq \epsilon\mu(E \cap Q)$, por lo tanto $\mu(E \cap Q) = 0$, lo cual implica que $\mu(E) > 0$ ya que $\mu(E \cap Q^c) = 0$, y esto contradice que $\mu(E) = 0$. Si ahora suponemos que existe el conjunto E y $\epsilon > 0$, con $\mu(E) > 0$ y E positivo para $\nu - \epsilon\mu$, y que son mutuamente singulares se llega a la misma contradicción.

Consideremos las medidas $\nu - (1/n)\mu$ y $\{P_n, N_n\}$ su descomposición de Hahn, sea $\{P', N'\}$ la descomposición de Hahn de μ. Sea $P = \cup_n P_n$ y $N = \cap_n N_n = P^c$. Veamos que N es nulo para ν, con lo cual si $\mu(P) = 0$ entonces $\nu \perp \mu$, por el contrario si $\mu(P) > 0$ existe m tal que $\mu(P_m) > 0$ y en este caso tomamos $E = P_m$ y $\epsilon = 1/m$. Si $A \subset N_n$ entonces $\nu(A) \leq (1/n)\mu(A)$. Observar que $N_n \supset N_{n+1}$. Sea $B \subset N$, como ν es finita

$$\nu(B) = \lim \nu(B \cap N_n) \leq \lim \frac{1}{n}\mu(B \cap N_n) = 0 \tag{4.15}$$

donde el límite a la derecha es 0 porque $\mu(N') \leq \mu(B \cap N_n) \leq \mu(P') < \infty$. (4.15) prueba que N es nulo para ν. $\square$

Teorema 4.58. ***Teorema de Radon-Nikodym.*** *Sea ν una medida signada en $(X, \mathcal{M})$ y μ una medida positiva en $(X, \mathcal{M})$ ambas σ-finitas. Entonces:*

1. *existen medidas signadas λ y ρ tal que $\nu = \lambda + \rho$, $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$*
2. *existe f medible, integrable (extendida) respecto de μ y*

$$\rho(E) = \int_E f d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

3. *λ, f, ρ son únicas ctp μ.*

Demostración. Supongamos primero que ν y μ son finitas y positivas. Sea

$$\mathfrak{F} = \Big\{ f : X \to [0, \infty] : \quad \int_E f d\mu \leq \nu(E) \qquad \forall E \in \mathcal{M} \Big\}.$$

Veamos primero que si $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$ entonces $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \in \mathfrak{F}$ ya que

$$\int_E g d\mu \leq \int_{E \cap \{f_1 > f_2\}} f_1 d\mu + \int_{E \cap \{f_2 \geq f_1\}} f_2 d\mu \leq \nu(E \cap \{f_1 > f_2\}) + \nu(E \cap \{f_2 \geq f_1\}) = \nu(E).$$

Definimos

$$a = \sup \Big\{ \int_X f d\mu : \ f \in \mathfrak{F} \Big\},$$

observar que $a \leq \nu(X) < \infty$. Sea $f_n \in \mathfrak{F}$ tal que $\int_X f_n d\mu \to a$, definimos

$$g_n(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\},$$

como vimos antes $g_n \in \mathfrak{F}$ y $g_n \geq f_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ por lo tanto $\int_X g_n d\mu \to a$, además g_n es una sucesión creciente de funciones medibles entonces existe f medible tal que $g_n(x) \to f(x)$. Por el teorema de convergencia monótona

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = a,$$

además $f \in \mathfrak{F}$ ya que

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leq \nu(E) \qquad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Definimos la medida ρ en $\mathcal{M}$ como $\rho(E) = \int_E f d\mu$, es claro que se cumple que $\rho \ll \mu$. Observar que $\nu - \rho \geq 0$ por definición de $\mathfrak{F}$. Veamos que $\nu - \rho \perp \mu$. Por el Lema 4.57 si no se cumple $\nu - \rho \perp \mu$ existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que $\nu - \rho \geq \epsilon\mu$ en E. Veamos que con esto último se llega a una contradicción, por un lado

$$\int_X (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu = \int_X f d\mu + \epsilon\mu(E) > a, \tag{4.16}$$

Veremos que $f + \epsilon\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$. Si $A \subset E$

$$\int_A (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu \leq \int_A f d\mu + \epsilon\mu(A) \leq \int_A f d\mu + \nu(A) - \rho(A) = \nu(A). \tag{4.17}$$

Si $A \in \mathcal{M}$

$$\int_A (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu \leq \int_{A\cap E} (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu + \int_{A\cap E^c} (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu$$

La primera de estas integrales la podemos acotar usando (4.17)

$$\int_{A\cap E} (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu \leq \nu(A \cap E)$$

por otra parte, la segunda la acotamos:

$$\int_{A\cap E^c} (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu = \int_{A\cap E^c} f d\mu + \int_{A\cap E^c} \epsilon \mathbb{I}_E d\mu = \int_{A\cap E^c} f d\mu \leq \nu(A \cap E^c)$$

Donde en la última desigualdad usamos que $f \in \mathfrak{F}$. Finalmente,

$$\int_A (f + \epsilon \mathbb{I}_E) d\mu \leq \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) = \nu(A)$$

Esto prueba que $f + \epsilon\mathbb{I}_E \in \mathfrak{F}$ lo cual es absurdo por (4.16) y la definición de a. Hemos probado entonces que $\nu - \rho \perp \mu$. Definimos $\lambda = \nu - \rho$. Veamos que la descomposición es única, si tuviéramos $\nu = \lambda' + \rho'$ con $\lambda' \perp \mu$ y $\rho' \ll \mu$ entonces $\lambda - \lambda' = \rho - \rho'$ pero $\rho - \rho' \ll \mu$ mientras que $\lambda - \lambda' \perp \mu$ con lo cual, por el punto 1 del Ejercicio 4.55 $\rho = \rho'$ y $\lambda = \lambda'$.

Si ν y μ son positivas y σ-finitas existe A_n una sucesión de conjuntos de medida μ y ν finita tal que $X = \cup_n A_n$, podemos asumir que son disjuntos 2 a 2. Definimos las medidas ν_n y μ_n tal como $\nu_n(E) = \nu(E \cap A_n)$ y $\mu_n(E) = \mu(E \cap A_n)$. Son positivas y finitas y por lo tanto existen λ_n y ρ_n tal que $\nu_n = \lambda_n + \rho_n$, $\lambda_n \perp \mu_n$ y $\rho_n \ll \mu_n$, y $d\rho_n = f_n d\mu_n$. Definimos

$$\lambda = \sum_n \lambda_n \qquad \rho = \sum_n \rho_n \qquad f = \sum_n f_n.$$

Por el punto 2 y 3 del ejercicio 4.55 se concluye que $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$.

Si ν es signada usamos la descomposición de Jordan de ν y escribimos $\nu = \nu^+ - \nu^-$ donde ν^+ y ν^- son positivas. Por lo tanto existen medidas λ^+ y ρ^+ tal que $\nu^+ = \lambda^+ + \rho^+$, $\lambda^+ \perp \mu$ y $\rho^+ \ll \mu$. Y medidas $\lambda^- \perp \mu$ y $\rho^- \ll \mu$ tal que $\nu^- = \lambda^- + \rho^-$. Finalmente, $\nu = \lambda^+ - \lambda^- + \rho^+ - \rho^-$. □

Definición 4.59. La función f dada por el teorema anterior se llama la **derivada de Radon-Nikodym** de ρ respecto de μ y de denota $d\rho/d\mu$.

Teorema 4.60. *Sea ν una medida σ-finita y signada, definida en $(X, \mathcal{M})$. Sean μ y λ σ-finitas y positivas, definidas en $\mathcal{M}$, tal que $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \lambda$ entonces*

1. Si $g \in L^1(\nu)$ entonces $g(d\nu/d\mu) \in L^1(\mu)$ y

$$\int g d\nu = \int g\Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big) d\mu \tag{4.18}$$

2. $\nu \ll \lambda$ y además

$$\frac{d\nu}{d\lambda}(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)\frac{d\mu}{d\lambda}(x), \tag{4.19}$$

donde esta igualdad vale para todo x salvo un conjunto de medida nula respecto de λ.

Demostración. Considerando ν^+ y ν^- basta probarlo para $\nu \geq 0$. Para demostrar 1, como $\nu \ll \mu$, existe $d\nu/d\mu$, tomemos primero $g = \mathbb{I}_E$ con $E \in \mathcal{M}$, vale (4.18) para g ya que:

$$\int_X g d\nu = \int_E d\nu = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_X \mathbb{I}_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Además esta igualdad prueba que en este caso $g(d\nu/d\mu) \in L^1(\mu)$, ya que $d\nu/d\mu(x) \geq 0$ ctp x respecto de μ y además $\mathbb{I}_E \in L^1(\nu)$ es equivalente a $\nu(E) < \infty$. Por linealidad vale para las funciones simples. Sea $S_n \uparrow g$ simples, con $g \in L^1(\nu)$,

$$\int g d\nu = \int \lim S_n d\nu = \lim \int S_n d\nu = \lim \int S_n \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int \lim S_n \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

donde hemos usado el teorema de convergencia monótona dos veces, y que lo probamos para las funciones simples S_n. Esto prueba la parte 1.

Para demostrar la parte 2, observemos que como $\nu \ll \mu$, para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_X \mathbb{I}_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

tomemos $g = \mathbb{I}_E d\nu/d\mu$ y aplicamos la parte 1 usando que $\mu \ll \lambda$

$$\int_X \mathbb{I}_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_X \mathbb{I}_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

si usamos ahora que $\nu \ll \lambda$,

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda,$$

por lo tanto hemos probado que para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \nu(E),$$

como $d\nu/d\lambda$ es única (ctp λ) obtenemos (4.19). ∎

Corolario 4.61. *Si $\lambda \ll \mu$ y $\mu \ll \lambda$ entonces*

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \Big(\frac{d\mu}{d\lambda}\Big)^{-1}.$$

Como $\nu \ll |\nu|$ existe $d\nu/d|\nu|$ y es igual a $\mathbb{I}_P(x) - \mathbb{I}_N(x)$ donde $\{P, N\}$ es la descomposición de Hahn de ν, en particular $|d\nu/d|\nu|(x)| = 1$ ctp $|\nu|$.

4.4.4. Sobre la derivabilidad de las funciones monótonas.

Vamos a demostrar, usando el Teorema de Radón Nikodym, el Teorema 3.20 que establece que las funciones continuas y monótonas son derivables ctp respecto de la medida de Lebesgue. Con una demostración similar se prueba que las funciones monótonas, no necesariamente continuas, también son derivables ctp.

Teorema 4.62. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y monótona entonces F es derivable ctp.*

Demostración. Primero observemos que existe una única medida positiva μ_F tal que $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ (esto se puede hacer por medio del Teorema 4.16), que se puede definir en la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Como F es monótona es σ-finita. Por el Teorema 4.58 (con $\nu = \mu_F$ y $\mu = m$) existe $\lambda \perp m$ y f tal que

$$\mu_F(E) = \lambda(E) + \int_E f dm.$$

Sea $E_r = (x + r]$. Veamos primero que $\lambda(E_r)/m(E_r) \to 0$.

$$\Big|\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)}\Big| \le \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \le \frac{|\lambda|(B(x,r))}{m(E_r)} = \frac{|\lambda|(B(x,r))}{(1/2)m(B(x,r))}.$$

Por lo tanto podemos suponer $\lambda \ge 0$ ya que $|\lambda| \perp \mu$ es equivalente a $\lambda \perp \mu$. Como $\lambda \perp m$ existe A Boreliano tal que $\lambda(A) = m(A^c) = 0$, definimos

$$F_k = \Big\{x \in A : \overline{\lim_{r\to 0}} \ \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(r,x))} > 1/k\Big\}.$$

Veamos que $m(F_k) = 0$ para todo k. Se deja como ejercicio verificar que para todo $\varepsilon > 0$ existe U_ε abierto tal que $A \subset U_\varepsilon$ y $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$[11]. Cada $x \in F_k$ es centro de una bola $B_x \subset U_\varepsilon$ tal que $\lambda(B_x) > k^{-1} m(B_x)$. Si

$$V_\varepsilon = \bigcup_{x \in F_k} B_x$$

y $c < m(V_\varepsilon)$, por el Lema 3.28, existen $x_1, \dots, x_J$ y bolas $B_{x_1}, \dots, B_{x_J}$ disjuntas tal que

$$c < 3\sum_{j=1}^{J} m(B_{x_j}) \le 3k \sum_{j=1}^{J} \lambda(B_{x_j}) \le 3k\lambda(V_\epsilon) \le 3k\lambda(U_\epsilon) \le 3k\epsilon$$

por lo tanto $m(V_\epsilon) \le 3k\epsilon$ y como $F_k \subset V_\varepsilon$, y ε es arbitrario $m(F_k) = 0$ para todo k. Por lo tanto $m(A^c \cup (\cup_k F_k)) = 0$, y si $x \notin \cup_k F_k$,

$$0 \le \overline{\lim_{r\to 0}} \ \frac{\lambda(B(x,r))}{m(B(r,x))} = 0.$$

Vamos a aplicar el Corolario 3.14 a la familia de conjuntos $E_r = (x + r]$, para eso observemos primero que esta familia se contrae de forma regular a x (ver Definición 3.12). Por lo tanto, para casi todo x.

$$\frac{\mu(E_r)}{m(E_r)} = \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y) dm \to f(x) \qquad \text{cuando } r \to 0.$$

Esto prueba que, para casi todo x,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mu(E_r)}{m(E_r)} = f(x).$$

[11] para eso se usa que $d\lambda = d\mu_F - df dm$, y se aplica la Proposición 4.11 para μ_F y fdm

Si tomamos $E_r = (x - r, x]$ se concluye que, para casi todo x ctp m.

$$f(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)} = \lim_{r \to 0^+} \frac{F(x) - F(x-r)}{r} = \lim_{r \to 0^-} \frac{F(x+r) - F(x)}{r}$$

Por lo tanto F es derivable ctp. □

Capítulo 5

Medidas de Radon y Teorema de Riesz

El objetivo de este capítulo es estudiar el conjunto de las medidas signadas abstractas definidas en un espacio topológico X localmente compacto y Hausdorff (este tipo de espacios los denotaremos como espacios LCH), [1] con la σ-álgebra de Borel que denotaremos $\mathcal{B}_X$. En particular estudiaremos aquellas medidas (llamadas medidas de Radon, ver Definición 5.5) que tienen ciertas propiedades de regularidad que tiene la medida de Lebesgue. Al final del capítulo probaremos que $C_0(X)^*$ es isométrico al espacio vectorial de las medidas signadas finitas de Radon en X con la norma de la variación total[2]. Este importante resultado se conoce como Teorema de Representación de Riesz. Primero lo estudiaremos para el caso de funcionales lineales positivos. Si bien se pueden extender estos resultados a funcionales a valores complejos, nos limitaremos a funcionales (continuos) a valores reales.

5.1. Funcionales positivos en $C_c(X)$

Definición 5.1. Un funcional lineal I en $C_c(X)$[3] es un **funcional lineal positivo** si $I(f) \geq 0$ para toda $f \geq 0$.

Es inmediato que si μ es una medida (positiva) en $\mathcal{B}_X$, tal que $\mu(K) < \infty$ para todo K compacto, el funcional $I(f) = \int_X f\mu$ definido en $C_c(X)$ es positivo. Veremos que todo funcional lineal positivo es de esta forma para alguna μ. Si imponemos algunas restricciones extra en μ veremos que además existe una única medida μ para la cual esto vale. Antes de eso vamos a probar una proposición.

Proposición 5.2. *Si I es un funcional lineal positivo en $C_c(X)$, para cada $K \subset X$ compacto existe C_K una constante tal que $|I(f)| \leq C_K \|f\|_\infty$, para toda $f \in C_c(X)$ tal que $sop(f) \subset X$.*

Demostración. Por el Lema de Uryshon (ver Lema A.2 en el apéndice), dado K compacto existe φ continua a valores en $[0,1]$, con soporte compacto y tal que $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$ por lo tanto si $sop(f) \subset K$, $|f(x)| \leq \|f\|\varphi(x)$. Esto implica que

$$\|f\|_\infty \varphi(x) - f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \|f\|_\infty \varphi(x) + f(x) \geq 0.$$

Por lo tanto como I es lineal y positivo.

[1] Se recomienda para su lectura repasar algunas definiciones que se encuentran en el apéndice

[2] Recordar que ya probamos que el espacio $SF(X)$ es un espacio vectorial normado

[3] En lo que sigue tomamos como definición de soporte la que dimos en el apéndice: $sop(f) = \overline{(f^{-1}(0))^c}$

$$\|f\|_\infty I(\varphi) - I(f) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \|f\|_\infty I(\varphi) + I(f) \geq 0,$$

o lo que es lo mismo $|I(f)| \leq I(\varphi)\|f\|_\infty$. $\square$

Observación 5.3. *Un funcional lineal positivo en $C_c(X)$ no tiene por qué ser acotado (es decir que exista C tal que para todo f, $|T(f)| \leq C\|f\|_\infty$), para eso basta pensar el funcional en $C_c(X)$ que es la integral de Lebesgue. Es decir $I(f) = \int_{\mathbb{R}} f dm$. Este funcional no se puede extender a $C_0(X)$ (ya que hay funciones positivas en $C_0(X)$ que integran infinito). Como $C_0(X)$ es la completación de $C_c(X)$ (ver apéndice) con la distancia uniforme, si un funcional lineal está definido en $C_c(X)$ y es acotado, se puede extender (por continuidad) a $C_0(X)$. Se puede probar también que los funcionales lineales definidos en todo $C_0(X)$ son acotados.*

Definición 5.4. Sea μ una medida de Borel en X y E un boreliano de X,

- Se dice que μ es **regular exterior** en E si

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : E \subset U, \quad U \ \text{ abierto}\}$$

- Se dice que μ es **regular interior** en E si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, \quad K \ \text{ compacto}\} \tag{5.1}$$

- Si μ es regular exterior e interior en todo boreliano E se dice que es **regular**.

Definición 5.5. Se dice que μ es una **medida de Radon** en X si es finita en compactos, regular exterior en todo $\mathcal{B}_X$ y regular interior en abiertos.

Vamos a demostrar ahora el teorema de representación de Riesz para el caso particular de funcionales positivos en $C_c(X)$. Antes de eso introducimos algo de notación,

Definición 5.6. Si U es un abierto de X y $f \in C_c(X)$ decimos que f se subordina a U y denotamos $f \prec U$ si $0 \leq f \leq 1$ y *sop*$(f) \subset U$.

Teorema 5.7. ***Teorema de Representación de Riesz para funcionales positivos.*** *Si I es un funcional lineal positivo en $C_c(X)$ existe una única medida de Radon μ en X tal que*

$$I(f) = \int f d\mu \qquad \forall f \in C_c(X)$$

además μ verifica que

1. $$\mu(U) = \sup\left\{I(f) : f \in C_c(X) \ y \ f \prec U\right\} \qquad \textit{para todo abierto } U \tag{5.2}$$

2. $$\mu(K) = \text{ínf}\left\{I(f) : f \in C_c(X) \ y \ f \geq \mathbb{I}_K\right\} \qquad \textit{para todo compacto } K \tag{5.3}$$

Demostración. Vamos a probar primero la unicidad. Si μ es una medida de Radon tal que $I(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in C_c(X)$, y $U \subset X$ es un abierto, es claro que $I(f) \leq \mu(U)$ si $f \prec U$. Si $K \subset U$ es un compacto, por el Lema de Urysohn existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in K$. Por lo tanto

$$\mu(K) = \int \mathbb{I}_K d\mu \leq \int f d\mu = I(f).$$

Como μ es regular interior en U, tomando supremo en la ecuación anterior, en todos los compactos $K \subset U$ obtenemos que
$$\mu(U) \leq I(f),$$
esto junto con $I(f) \leq \mu(U)$ prueban que la medida μ esta unívocamente determinada por I en todos los abiertos, y como es regular exterior, lo está en todo $\mathcal{B}_X$. Esto prueba la unicidad. Para probar la existencia definimos
$$\mu(U) = \sup \left\{ I(f) : f \in C_c(X) \text{ y } f \prec U \right\} \tag{5.4}$$
para todo abierto U, y definimos
$$\mu^*(E) = \text{ínf} \left\{ \mu(U) : E \subset U, \quad U \text{ abierto} \right\}. \tag{5.5}$$

Como $0 \leq f \leq 1$ y $sop(f) \subset U$, $\mu(U) \leq \mu(V)$ si $U \subset V$. Por lo tanto $\mu(U) = \mu^*(U)$ si U es abierto. Probaremos que

1) μ^* es una medida exterior

2) Todo abierto es μ^* medible. Por lo tanto por el teorema de Caratheodory todo boreliano es μ^* medible y μ^* resctricta a $\mathcal{B}_X$ es una medida (que denotamos μ). Por definición μ es regular exterior y cumple (5.2).

3) μ cumple (5.3). Esto implica que μ es finita en compactos (ya que $I(f) \in \mathbb{R}$). Veamos que es regular interior en abiertos: sea U abierto y $\alpha < \mu(U)$, por (5.4), existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ y $I(f) > \alpha$, sea $K = sop(f)$. Si $g \in C_c(X)$ y $g \geq \mathbb{I}_K$ entonces $g \geq f$ y como I es positivo $I(g) \geq I(f) > \alpha$. Como en estamos asumiendo (5.3) tenemos que $\mu(K) > \alpha$. Por lo tanto μ es regular interior en U (ver (5.1)).

4) $I(f) = \int f d\mu$, para toda $f \in C_c(X)$.

Vamos a demostrar estos puntos 1 a 4

1) Es suficiente probar que si $\{U_j\}_j$ es una sucesión de abiertos y $U = \cup_{j=1}^{\infty} U_j$ entonces $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$. Ya que si se cumple eso veremos que
$$\mu^*(E) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) : U_j \text{ abierto y } \quad E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \right\} := \mu_0^*(E) \tag{5.6}$$
y ya vimos que μ_0^* define una medida exterior. Para ver (5.6) (asumiendo $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$). Es claro que $\mu^* \geq \mu_0^*$ ya que si U es un abierto tal que $E \subset U$ (como en (5.5)) entonces $E \subset \cup_j U_j$ con $U_j = U$) y por lo tanto están considerados en (5.6). Para probar la otra desigualdad basta observar que si $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} U_j = U$
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j) \geq \mu(U) \geq \mu^*(E)$$
y tomando ínfimo a la izquierda de esta ecuación se obtiene que $\mu_0^*(E) \geq \mu^*(E)$. Veamos que $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$. Sea $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec U$ y sea $K = sop(f)$. Como K es compacto $K \subset \cup_{j=1}^{n} U_j$ para algún n. Por lo tanto por el Lema A.4 existen $g_1, \ldots, g_n \in C_c(X)$ tal que $g_j \prec U_j$ y $\sum_{j=1}^{n} g_j = 1$ en K. Por lo tanto
$$f = \sum_{j=1}^{n} f g_j,$$

y $fg_j \prec U_j$ entonces $I(fg_j) \leq \mu(U_j)$ por (5.4), y por lo tanto

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} I(fg_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j).$$

Como esto vale para todo $f \prec U$, tomando supremo a la izquierda, por (5.4), $\mu(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$.

2) Tenemos que mostrar que si U es abierto y E es cualquier subconjunto de X tal que $\mu^*(E) < \infty$ entonces

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U).$$

Supongamos primero que E es abierto, por lo tanto $E \cap U$ es abierto. Por (5.4), dado $\epsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \prec E \cap U$ y $I(f) > \mu(E \cap U) - \epsilon$. Además $E \setminus sop(f)$ es abierto[4]. Nuevamente por (5.4) existe $g \in C_c(X)$ tal que $g \prec E \setminus sop(f)$ y $I(g) > \mu(E \setminus sop(f)) - \epsilon$. Como $f + g \prec E$,

$$\mu(E) \geq I(f) + I(g) > \mu(E \cap U) + \mu(E \setminus sop(f)) - 2\epsilon \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U) - 2\epsilon,$$

como $\epsilon \to 0$ se obtiene la desigualdad que queríamos. Para el caso general (no necesariamente E abierto), si $\mu^*(E) < \infty$ existe V abierto tal que $E \subset V$ y $\mu^*(V) < \mu^*(E) + \epsilon$, por lo tanto

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \mu(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \setminus U),$$

y tomamos $\epsilon \to 0$.

3) Si K es compacto y $f \in C_c(X)$ y $f \geq \mathbb{I}_K$, sea $U_\epsilon = \{x : f(x) > 1 - \epsilon\}$, U_ϵ es abierto y $K \subset U_\epsilon$. Si $g \prec U_\epsilon$ como $0 \leq g \leq 1$, tenemos que $g \leq (1-\epsilon)^{-1} f$, por lo tanto $I(g) \leq (1-\epsilon)^{-1} I(f)$. Como $K \subset U_\epsilon$ $\mu(K) \leq \mu(U_\epsilon) \leq (1-\epsilon)^{-1} I(f)$, por lo tanto tomando $\epsilon \to 0$, $\mu(K) \leq I(f)$. Observar que para todo abierto $U \subset K$, por el lema de Urysohn existe $f \in C_c(X)$ tal que $f \geq \mathbb{I}_K$ y $f \prec U$, por lo tanto por (5.4) $I(f) \leq \mu(U)$. Como μ es regular exterior (ya que coincide con μ^* en $\mathcal{B}_X$, y μ^* es regular exterior por definición), podemos tomar U tal que $\mu(U) \leq \mu(K) + \epsilon$ y esto prueba (5.3).

4. Es suficiente mostrar que $I(f) = \int f d\mu$ para toda $f : X \to [0,1]$ ya que toda función de $C_c(X)$ se puede obtener como combinación lineal de estas funciones. Dado un número natural N, para $1 \leq j \leq N$ definimos

$$K_j = \left\{x : f(x) \geq \frac{j}{N}\right\} \qquad K_0 = sop(f).$$

Definimos también $f_1, \ldots, f_N \in C_c(X)$ como

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin K_{j-1} \\ f(x) - \frac{j-1}{N} & \text{si } x \in K_{j-1} \setminus K_j \\ \frac{1}{N} & \text{si } x \in K_j \end{cases}$$

Observar que $\sum_{j=1}^{N} f_j = f$, además

$$\frac{1}{N}\mathbb{I}_{K_j} \leq f_j \leq \frac{1}{N}\mathbb{I}_{K_{j-1}},$$

de donde

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leq \int f_j d\mu \leq \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}).$$

[4]recordar que en este capítulo adoptamos la definición $sop(f) = \overline{f^{-1}(0)}$

Como μ satisface (5.4) y $f_j \in C_c(X)$, si U es un abierto que contiene a K_{j-1} tenemos que $Nf_j \prec U$ y por lo tanto $I(f_j) \leq N^{-1}\mu(U)$. De esto último junto con la regularidad exterior $I(f_j) \leq \mu(K_{j-1}$, si usamos ahora (5.3)

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leq I(f_j) \leq \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}).$$

Como $\sum_{j=1}^{N} f_j = f$, sumando en j en las ecuaciones anteriores

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leq \int f d\mu \leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j)$$

y

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(K_j) \leq I(f) \leq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mu(K_j)$$

combinando estas dos últimas desigualdades obtenemos que

$$\left|I(f) - \int f d\mu\right| \leq \frac{1}{N}\Big[\mu(K_0) - \mu(K_N)\Big] \leq \frac{1}{N}\mu(sop(f))$$

como $\mu(sop(f)) < \infty$ (ya que μ es finita sobre compacto) obtenemos que $I(f) = \int f d\mu$.

□

5.2. Regularidad de las medidas de Radon

Vamos a probar algunas propiedades de regularidad de la medida de Radon que obviamente las comparte la medida de Lebesgue.

Proposición 5.8. *Si μ es una medida de Radon en X entonces es regular interior en todos los subconjuntos σ-finitos. En particular toda medida de Radon σ-finita es regular.*

Demostración. Supongamos primero que $\mu(E) < \infty$ vamos a probar que μ es regular interior en E, como μ es regular exterior (por ser de Radon) podemos elegir U abierto tal que $E \subset U$ y $\mu(U) < \mu(E) - \epsilon$. Además, como es regular interior en abiertos existe $F \subset U$, F compacto tal que $\mu(F) > \mu(U) - \epsilon$. Por lo tanto $\mu(E) \leq \mu(U) < \mu(F) + \epsilon$. Como $\mu(U \setminus E) < \epsilon$ nuevamente usando que μ es regular exterior existe V abierto tal que $U \setminus E \subset V$ y $\mu(V) < \epsilon$. Sea $K = F \setminus V$, observar que K es compacto (ya que es un subconjunto cerrado de un compacto) y $K \subset E$, usando que $(F \cap V) \cup F \setminus V = F$ y acotando $\mu(F \cap V) \leq \mu(V)$,

$$\mu(K) = \mu(F) - \mu(F \cap V) > \mu(E) - \epsilon - \mu(V) > \mu(E) - 2\epsilon.$$

Por lo tanto μ es regular interior. Por otra parte si E es σ-finito pero $\mu(E) = \infty$ entonces existen subconjuntos $\{E_j\}_j$, de medida finita E_j crecientes a E por lo tanto $\mu(E_j) \to \mu(E)$ y en estos conjuntos podemos tomar compactos $K_j \subset E_j$ tal que $\mu(K_j) > \mu(E_j) - \epsilon$, por lo tanto $\mu(K_j) \to \infty$ y esto prueba que μ es regular interior en E. □

El siguiente resultado se prueba de manera similar al Teorema (1.20)

Proposición 5.9. *Sea μ una medida σ-finita en X y $E \in \mathcal{B}_X$. Para todo $\epsilon > 0$ existe U abierto y F cerrado tal que $F \subset E \subset U$ y*

Proposición 5.10. *Si μ es una medida de Radon en X, $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Como las funciones simples son densas en L^p es suficiente mostrar que si $\mu(E) < \infty$, $\mathbb{I}_E$ se puede aproximar en la norma L^p por una función en $C_c(X)$. Dado $\epsilon > 0$, por la Proposición (5.8) existe K compacto tal que $K \subset E$ y $\mu(E \setminus K) < \epsilon$, además como μ es regular exterior existe y U abierto tal que $E \subset U$ y $\mu(U \setminus E) < \epsilon$, por lo tanto $\mu(U \setminus K) < 2\epsilon$. Por el Lema de Urysohn podemos tomar $f \in C_c(X)$ tal que $\mathbb{I}_K \leq f \leq \mathbb{I}_U$. Entonces

$$\|\mathbb{I}_E - f\|_p \leq \Big(\int (\mathbb{I}_U - \mathbb{I}_K)^p d\mu \Big)^{1/p} \leq \mu(U \setminus K)^{1/p} < (2\epsilon)^{1/p}.$$

□

Para terminar esta sección vamos a dar una demostración del Teorema de Lusin que vimos para la medida de Lebesgue, pero para espacios LCH y medidas de Radon, que nos servirá para probar el teorema de representación de Riesz

Teorema 5.11. ***Teorema de Lusin.*** *Sea μ una medida de Radon en un espacio LCH X, sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $m(E) < \infty$ donde $E = f^{-1}(0)^c$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in C_c(X)$ tal que*

$$m\Big(\Big\{x : f(x) \neq \varphi(x)\Big\}\Big) < \epsilon,$$

si f es acotada φ se puede elegir para que $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Demostración. Supongamos primero que f es acotada, entonces $f \in L^1(\mu)$, por la proposición anterior existe una sucesión $g_n \in C_c(X)$ que converge en L^1 a f. Por el Corolario 2.40 (se deja como ejercicio ver que tanto ese corolario como el teorema anterior valen en $L^1(\mu)$), existe una subsucesión de g_n que seguiremos denotando g_n que converge ctp a f. Por el Teorema de Egorov existe $A \subset E$ tal que $\mu(A \setminus E) < \epsilon/3$ y $g_n \rightrightarrows f$ en A. Como μ es regular interior en abiertos existe $B \subset A$ compacto tal que $\mu(A \setminus B) < \epsilon < /3$, y como es regular exterior existe U abierto tal que $\mu(U \setminus E) < \epsilon/3$. Como $g \rightrightarrows f$ en B, por el Teorema de extensión de Tietze A.5, existe $g \in C_c(X)$ tal que $g = f$ en B y $sop(f) \subset U$. Observemos que $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset U \setminus B$ y $\mu(U \setminus B) < \epsilon$. Vamos a elegir φ para que $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, para eso consideremos $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\beta(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq \|f\|_\infty \\ \|f\|_\infty \text{signo}(x) & \text{si } |x| > \|f\|_\infty \end{cases},$$

ahora definimos $\varphi = \beta \circ g$, es claro que $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y en el conjunto de los x tal que $g(x) = f(x)$, $\varphi(x) = f(x)$.

Si f no es acotada, sea $A_n = \{x : |f(x)| \leq n\}$. $A_n \uparrow E$ entonces para n suficientemente grande $\mu(E \setminus A_n) < \epsilon/2$. Razonando como antes existe $\varphi \in C_c(X)$ tal que $\varphi = f\mathbb{I}_{A_n}$, salvo en un conjunto de medida menor que $\epsilon/2$. Por lo tanto $\varphi = f$ salvo un conjunto de medida menor que ϵ. □

5.3. El dual continuo de $C_0(X)$

Como $C_0(X)$ es la clausura (con la norma del supremo) de $C_c(X)$, si μ es una medida de Radón en un espacio LCH X, un funcional $I(f) = \int f d\mu$ es acotado en $C_c(X)$ se extiende de manera continua a su clausura $C_0(X)$. Por otra parte si un funcional de esta forma se extiende de manera continua a todo $C_0(X)$, tiene que ser $\mu(X) < \infty$ ya que

$$\mu(X) = \sup\Big\{ \int f d\mu : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1\Big\}.$$

Como ya hemos probado que los funcionales positivos en $C_c(X)$ tienen la forma $\int f d\mu$, esto prueba que los funcionales positivos y continuos en $C_0(X)$ son integrales respecto de medidas de Radon. Lo que haremos ahora es ver como es el resto de los funcionales continuos en $C_0(X)$, que denotamos $C_0(X)^*$. Para eso primero probamos que todo funcional en $C_0(X)$ se puede descomponer como resta de dos funcionales positivos:

Lema 5.12. *Si $I \in C_0(X)^*$ existen funcionales positivos I^+ y I^- en $C_0(X)^*$ tal que $I = I^+ - I^-$.*

Demostración. Si $f \in C_0(X)$ y $f \geq 0$, definimos,

$$I^+(f) = \sup\{I(g) : g \in C_(X), 0 \leq g \leq f\}.$$

Como $|I(g)| \leq \|I\|\|g\|_\infty \leq \|I\|\|f\|_\infty$ para $0 \leq g \leq f$ obtenemos que $I^+(f)$ es finito y está acotado por $\|I\|\|f\|_\infty$. Veamos que I^+ es la restricción a las funciones no negativas de $C_0(X)$ de un funcional lineal. Obviamente $I^+(cf) = cI^+(f)$ si $c \in [0, \infty)$. Además si $0 \leq g_1 \leq f$ y $0 \leq g_2 \leq f$ entonces $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ y por lo tanto por definición de I^+

$$I^+(f_1 + f_2) \geq I(g_1 + g_2) = I(g_1) + I(g_2).$$

por lo tanto $I^+(f_1 + f_2) \geq I^+(f_1) + I^+(f_2)$. Por otra parte si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ definimos $g_1 = \text{mín}(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$ entonces $0 \leq g_1 \leq f_1$ y $0 \leq g_2 \leq f_2$, por lo tanto

$$I(g) = I(g_1) + I(g_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$$

por lo tanto tomando supremo en g, $I^+(f_1 + f_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$. Esto prueba que I^+ es lineal en las funciones positivas de $C_0(X)$. Si tenemos $f \in C_0(X)$ (no necesariamente positiva) escribimos $f = f^+ - f^-$ y definimos $I^+(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$. Para ver que no depende de la descomposición basta tomar $g, h \geq 0$ tal que $f = g - h$ con lo cual $g + f^- = h + f^+$ y como I^+ es lineal en las funciones positivas

$$I^+(g) + I^+(f^-) = I^+(h) + I^+(f^+).$$

Por lo tanto $I^+(f) = I^+(g) - I^+(h)$. Además

$$|I^+(f)| \leq \text{máx}(I^+(f^+), I^+(f^-)) \leq \|I\| \, \text{máx}(\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty) = \|I\|\|f\|_\infty.$$

En general definimos $I^- = I^+ - I$, es inmediato que esto define un funcional lineal positivo y acotado. $\square$

Definición 5.13. Una medida signada finita ν se dice que es una medida signada de Radon si su parte positiva y negativa son medidas de Radon finitas. Denotamos $M(X)$ al conjunto de todas las medidas finitas signadas de Radon en X[5], en este espacio podemos definir $\|\mu\| = |\mu|(X)$ donde $|\mu|$ es la variación total de μ. Se puede ver que $M(X)$ es un espacio vectorial y $\|\mu\|$ define una norma. Se puede demostrar además que μ es de Radon si y sólo si $|\mu|$ es de Radon.

Teorema 5.14. ***Teorema de Representación de Riesz.*** *Sea X un espacio LCH, dada $\mu \in M(X)$ el mapa que asigna a μ el funcional I_μ definido en $C_0(X)$ como $I_\mu(f) = \int f d\mu$, es un isomorfismo isométrico entre $M(X)$ y $C_0(X)^*$.*

Teorema 5.15. *Por el Lema 5.12 todo funcional $I \in C_0(X)^*$ se escribe como $I(f) = I^+(f) - I^-(f) = \int f d\mu$ donde $\mu = \mu^+ - \mu^-$, siendo μ^+ y μ^- las medidas de Radon correspondientes a I^+ e I^-*[6] *Recíprocamente si $\mu \in M(X)$,*

$$\Big| f d\mu \Big| = \Big| \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- \Big| \leq \int |f| d|\mu| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|.$$

[5] es decir $-\infty < \nu(E) < \infty$ para todo medible E

[6] Se deja como ejercicio verificar que la parte positiva de μ es efectivamente la medida correspondiente a I^+ y la parte negativa es la correspondiente a I^-.

Esto prueba que $I_\mu \in C_0(X)^*$ *y* $\|I\|_\mu \leq \|\mu\|$. *Para probar la otra desigualdad, como* $\mu \ll |\mu|$ *existe* $h = d\mu/d|\mu|$, *además* $|h(x)| = 1$ *ctp* x *respecto de* $|\mu|$ *(ver Corolario 4.61). Sea* $\epsilon > 0$, *por el Teorema de Lusin existe* $f \in C_c(X)$ *tal que* $\|f\|_\infty \leq 1$ *y* $f = h$ *excepto en un conjunto* E *con* $|\mu|(E) < \epsilon/2$ *Entonces, usando que* $hd|\mu| = d\mu$ *y* $h^2 = 1$,

$$\|\mu\| = |\mu|(X) = \int |h|^2 d|\mu| = \int h^2 d|\mu| = \int h d\mu,$$

observar que esta última integral es positiva ya que $h = \mathbb{I}_P - \mathbb{I}_N$, *entonces*

$$\int h d\mu = \Big| \int h d\mu \Big| = \Big| \int (h-f) d\mu \Big| + \Big| \int f d\mu \Big|,$$

ahora acotamos

$$\Big| \int (h-f) d\mu \Big| + \Big| \leq \int |h-f| d|\mu| \leq 2 \int_E d|\mu| \leq 2|\mu|(E) < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\|\mu\| \leq \Big| \int f d\mu \Big| + \epsilon \leq \sup_{f:\|f\|=1} |I_\mu(f)| + \epsilon.$$

Esto prueba que $\|\mu\| \leq \|I_\mu\|$.

Apéndice A

Apéndice

Aquí incluiremos algunas definiciones y resultados (la mayoría de ellos se dejan como ejercicios), relacionados al conjunto de cantor, la función de cantor, así como algunos ejemplos curiosos de la teoría del a medida.

A.1. Algunas definiciones y resultados

Definición A.1.

- Un espacio topológico X es **Hausdorff** si dados $x \neq y$ en X existen V_x y V_y entornos de x e y respectivamente tal que $V_x \cap V_y = \emptyset$[1]
- Un espacio topológico X es **localmente compacto** si para todo x existe U abierto y K compacto tal que $x \in U \subset K$.
- Un subconjunto X de un espacio topológico es **perfecto** si es cerrado y no tiene puntos aislados.
- Un subconjunto X de un espacio topológico es **totalmente disconexo** si sus únicas componentes conexas son los puntos de X

Lema A.2. ***Lema de Urysohn****. Si X es un espacio topológico y $K \subset U \subset X$ donde K es compacto y U es abierto existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in K$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in U^c$*

En lo que sigue $sop(f) = \overline{(f^{-1}(0))^c}$ lo cual es ligeramente distinto a la definición que dimos para funciones medibles.

Definición A.3. Vamos a definir algunos espacios de funciones en X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff.

$C(X)$ es el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en X a valores reales o complejos

$C_c(X)$ es el subespacio vectorial de $C(X)$ formado por las funciones continuas con soporte compacto.

$C_0(X)$ es el subespacio vectorial de $C(X)$ de funciones que se anulan en infinito. Esto quiere decir que para todo $\epsilon > 0$

$$\{x : |f(x)| > \epsilon\}$$

es compacto.

[1]Recordar que V es un entorno de x si existe U abierto tal que $x \in U \subset V$

Es inmediato verificar que $C_c(X) \subset C_0(X)$, observar que en $C_0(X)$ (y por lo tanto también en $C_c(X)$) podemos definir $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$, se deja como ejercicio verificar que esto es una norma. Se puede probar también que la clausura de $C_c(X)$ con la métrica uniforme es el espacio $C_0(X)$. Veamos algunos elementos básicos de análisis funcional que nos servirán en el capítulo 5.

El siguiente resultado se prueba a partir del Lema de Urysohn (una demostración del mismo se puede encontrar en [2], Proposición 4.41) para eso definimos $f \prec U$ si $0 \leq f \leq 1$ y $sop(f) \subset U$.

Lema A.4. *Sea X LCH, y $K \subset X$ compacto, sea $U_1, \ldots, U_n$ un cubrimiento finito de K, existen $g_1, \ldots, g_n \in C_c(X)$ tal que $g_j \prec U_j$ y*

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

Teorema A.5. ***Teorema de extensión de Tietze.*** *Sea X un espacio LCH y $K \subset X$ compacto, si $f \in C(K)$ existe $F \in C(X)$ tal que F restricta a K es igual a f y además F se puede elegir para que sea nula fuera de un compacto.*

Definición A.6. Una transformación lineal $T : U \to V$ entre dos espacios vectoriales normados se dice acotada si existe una constante C tal que para todo $x \in U$, $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ [2] Se puede demostrar fácilmente que una transformación lineal es acotada si y sólo si es continua. En el espacio de todas las transformaciones lineales y acotadas (continuas) de U a V (que usualmente de denota $L(U, V)$) se puede definir la norma

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}. \tag{A.1}$$

Se puede demostrar fácilmente que si V es completo también lo es $L(U, V)$. Se dice que T es una isometría si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in U$.

Definición A.7. Dado un espacio vectorial normado V denotamos V^* a su dual continuo, es decir al espacio vectorial de todas las transformaciones lineales y continuas definidas en V a valores reales. Es un espacio vectorial normado y completo, con la norma definida en (A.1)

A.2. Conjunto de Cantor

A.2.1. Con Medida Nula

Definimos una sucesión de subconjuntos de $[0, 1]$ de la siguiente manera:

$C_0 = [0, 1]$ y para $k > 0, C_k$ es el conjunto que se obtiene quitando de cada componente de C_{k-1} el intervalo central abierto de proporción[3] $\xi = 1/3$.
Definimos el conjunto de cantor de los tercios centrales como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Algunas de sus propiedades son:

1. Es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

2. C^c es una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos, cuya suma de longitudes es 1.

[2] Aquí hay un pequeño abuso de notación ya que la norma a la izquierda de la desigualdad es en V y a la derecha es en U

[3] Si I es un intervalo, el intervalo central abierto de proporción ξ en I es el intervalo abierto I' centrado en el punto medio de I tal que $|I'| = \xi \cdot |I|$.

3. $x \in C$ si y sólo si x tiene una expansión ternaria donde no aparece el dígito 1.[4]
4. Es no numerable.

A.2.2. Con medida positiva

Construiremos ahora un conjunto $\hat{C}$ con el mismo procedimiento que el conjunto de Cantor, es decir, retirando intervalos centrales en cada etapa, pero ahora en el k-ésimo paso la longitud de los intervalos que se retiran es l_k, donde la sucesión l_k cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$.

1. Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$, entonces $m_*(\hat{C}^c) = \lambda$.
2. Si $x \in \hat{C}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin \hat{C}$ pero $x_n \to x$ y $x_n \in I_n$, donde I_n es un subintervalo en el complemento de $\hat{C}$ con $|I_n| \to 0$.
3. $\hat{C}$ es perfecto y no contiene intervalos abiertos y es no numerable

A.3. Función de Cantor

Definimos primero una función $F : C \to [0,1]$ donde C es el conjunto de cantor de medida nula (de los tercios centrales) como

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}},$$

donde $b_k = a_k/2$ y $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ es una expansión ternaria de x tal que $a_k \in \{0,2\}$ para todo k. Así definida se puede probar que F es continua, sobreyectiva, creciente, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, y se puede extender a todo $[0,1]$ de modo de que resulte continua y no decreciente (definiendola constante en las componentes conexas de C^c). La función que resulta de esta extensión (que la llamaremos F) tiene derivada 0 ctp x, y por lo tanto no es absolutamente continua. Si definimos en $[0,1]$ (por medio del Teorema de Caratheodory) la medida μ_F que se obtiene de extender la pre medida $\mu_G([a,b]) = F(b) - F(a)$ con $0 \le a \le b \le 1$. El soporte de esta medida es el conjunto de Cantor y por lo tanto $\mu_F \perp m$.

[4]Todo real $x \in [0,1]$ tiene una expansión ternaria de la forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ donde $a_k \in \{0,1,2\}$ para todo k (observar que esta expansión no es única. Por ejemplo, $1/3 = \sum_{k=2}^{\infty} 2/3^k$).

Índice alfabético

Bibliografía

[1] N. Fava. *Medida e Integración de Lebesgue.* Fasículo 4, editado por la Universidad de Buenos Aires, 2013.

[2] G. Folland. *Real Analysis: Modern techniques and their applications.* Wiley., 1999.

[3] J. Heinonen. *Lectures on Analysis on Metric Spaces.* 2005.

[4] W. Rudin. *Real and Complex Analysis. 3d ed.* 1986.

[5] Wise y Hall. *Counterexamples in probability and real analysis.* New York Oxford, 1993.

[6] Stein y Shakarchi. *Real analysis, measure theory, integration, and Hilbert Spaces.* Universitext. Springer-Verlag, 2001.