Introducción a los Sistemas Dinámicos

Martín Sambarino

Índice general

Capítulo 1

Dinámica Topológica

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico (de Hausdorff, métrico, completo, etc). Un *sistema dinámico discreto* en M es una $F : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua tal que:

1. $F(0, \cdot) = id$
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in M$.

Observación 1.1.1. Si definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $F_n : M \to M$ por $F_n(x) = F(n, x)$, tenemos que $F_n \circ F_m = F_{n+m}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$. En particular, $f = F_1$ es un homeomorfismo (su inversa es $f^{-1} = F_{-1}$) y se cumple que $F_n = f^n$. Por esto, un sistema dinámico discreto está generado por un homeo $f : M \to M$.

Definición 1.1.2. Un *sistema dinámico continuo* o *flujo* es una $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ continua tal que

1. $\varphi(0, \cdot) = id_M$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in M$.

Observación 1.1.2. Igual que en el caso continuo, si para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_t : M \to M$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.3. Sea $x \in M$.

1. Si $f : M \to M$ homeo, la *órbita* de x es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$.
   La *órbita futura* de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : \ n \geq 0\}$.
   La *órbita pasada* de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : \ n \leq 0\}$.

2. Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ flujo, la *órbita* de x es $\mathcal{O}(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \in \mathbb{R}\}$.
   La *órbita futura* de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \geq 0\}$.
   La *órbita pasada* de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{\varphi(t,x) : \ t \leq 0\}$.

Ejemplos:

1. $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La identificación está dada por $exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, con $exp(t) = e^{2\pi i t}$.
   Definimos la *rotación de ángulo* α por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$ o, equivalentemente, $R_\alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+\alpha)}$.

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es C^1 tal que $\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\| < \infty$.
   Consideramos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. (1)
   Tenemos que $\varphi(t,x) = \varphi(t,0,x) =$ tiempo t de la solución de (1) que en 0 pasa por x es un flujo en Ω.

3. Sea M una variedad compacta y $X : M \to TM$ un campo de vectores tangentes de clase C^1. Usando cartas locales, encontramos que por cada $x \in M$, $\exists\, !\ \varphi_x : \mathbb{R} \to M$ tal que $\varphi_x(0) = x$ y $\dfrac{\partial \varphi_x(t)}{\partial t} = X(\varphi_x(t))$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
   Si definimos $\varphi(t,x) = \varphi_x(t)$ tenemos un flujo en M.

4. Sea $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección canónica. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de vectores tal que $X((x,y) + (n,m)) = X(x,y)$, $\forall\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ (X define un campo de vectores en $\mathbb{T}^2$). Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el flujo asociado a X en $\mathbb{R}^2$. Entonces, se cumple que $\varphi_t((x,y) + (n,m)) = \varphi_t(x,y) + (n,m)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathbb{R}^2, (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, ya que si definimos $\psi(t) = \varphi_t(x,y) + (n,m) \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}(t) = X(\psi(t)) \\ \psi(0) = (x,y) + (n,m) \end{cases}$
   Luego, $\varphi_t(x,y) + (n,m) = \varphi_t((x,y) + (n,m))$. Entonces $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\widetilde{\varphi}(t, \pi(x,y)) = \pi(\varphi(t,(x,y)))$ es un flujo en $\mathbb{T}^2$.
   Un caso particular muy importante es cuando $X = \text{cte} = (1,\alpha)$, donde $\varphi(t,x) = x + t(1,\alpha)$ y luego $\widetilde{\varphi}(t, \pi(x)) = \pi(\varphi(t,x))$ se llama *flujo lineal de pendiente* α en T^2.

Definición 1.1.4. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto.

- Un punto $p \in M$ se dice *fijo* si $f(p) = p$.
- Un punto $p \in M$ se dice *periódico* si existe $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. Se llama *período* de p al $\text{mín}\{k \geq 1 : \ f^k(p) = p\}$.

La definición para flujos es:

- Un punto $p \in M$ se dice *punto de equilibrio* (o *singularidad*) si $\varphi_t(p) = p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.
- La órbita por $p \in M$ se dice *periódica* si existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$, para algún $t > 0$. Se llama *período* de p al $\text{mín}\{t > 0 : \ \varphi_t(p) = p\}$.

Definición 1.1.5. Si $f : M \to M$ es un sistema dinámico discreto y $x \in M$, definimos el ω*-límite* de x como

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \ \exists\, n_k \longrightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \longrightarrow y\}.$$

Análogamente, definimos el α*-límite* de x como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \ \exists\, n_k \longrightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \longrightarrow y\}.$$

Observación 1.1.3. $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$.

Las definiciones para flujos son:

$$\omega(x) = \{y \in M : \ \exists\, t_k \longrightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\} \text{ y}$$

$$\alpha(x) = \{y \in M : \ \exists\, t_k \longrightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\}$$

Observamos que

1. Si $f : M \to M$ y p es un punto periódico, entonces, $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo creciente y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\omega(x) = \emptyset$ o $\omega(x)$ es un punto fijo.

Definición 1.1.6. Un subconjunto $A \subset M$ se dice *invariante* si

$$\begin{cases} f(A) = A \text{ (caso s.d.d.)} \\ \varphi_t(A) = A, \ \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ (caso flujo).} \end{cases}$$

Observación 1.1.4. Si A es invariante, entonces $f^m(A) = A$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.1.1. *$\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son conjuntos cerrados e invariantes.*

Demostración. Lo hacemos en el caso $f : M \to M$.
Observemos que $\omega(x) = \bigcap_{k\geq 1} \overline{\{f^n(x) : \ n \geq k\}}$. Luego, $\omega(x)$ es cerrado.
Si $y \in \omega(x) \Longrightarrow \exists \ n_k \longrightarrow +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \longrightarrow y$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $f^{n_k+m}(x) \longrightarrow f^m(y) \Longrightarrow f^m(y) \in \omega(x)$.
La demostración para el caso de flujos es análoga. □

Proposición 1.1.2. *Sea φ flujo y $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ compacto. Entonces, $\omega(x)$ es conexo.*

Demostración. $\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\{\varphi(t,x) : \ t \geq 0\}}$ es una intersección decreciente de compactos conexos. Luego, es conexa. □

Proposición 1.1.3. *Si $f : M \to M$ (con M espacio regular) y $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ es compacta, entonces $\omega(x)$ no se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados, no vacíos, disjuntos e invariantes. Es decir, si $\omega(x) = A \cup B$, con A, B cerrados e invariantes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que podemos escribir a $\omega(x) = A \cup B$, con $f(A) = A$ y $f(B) = B$, A y B cerrados, no vacíos y disjuntos. Sean U_1 y V_1 abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. Sea, $U = f^{-1}(U_1) \cap U_1$, $V = f^{-1}(V_1) \cap V_1$. Ambos son abiertos y disjuntos, $A \subset U$, $B \subset V$. Si $y \in U \Longrightarrow f(y) \in U_1$, y si $y \in V \Longrightarrow f(y) \in V_1$. Como $A \subset \omega(x) \Longrightarrow \exists \ n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$. Sea $m_1 = \min\{m > n_1 : \ f^m(x) \notin U\}$ (existe pues $B \subset \omega(x)$). Se verifica que $f^{m_1}(x) \notin V$ (ya que $f^{m_1}(x) \in U_1$). Análogamente, $\exists \ n_2 > m_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in U$. Sea $m_2 = \min\{m > n_2 : \ f^m(x) \notin U\}$. En general, dado $n_k > m_{k-1}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U$, construimos que $m_k = \min\{m > n_k : \ f^m(x) \notin U\}$.
Se verifica que: $\left\{ \begin{array}{c} m_k \longrightarrow +\infty \\ f^{m_k}(x) \in A^c \\ \overline{\mathcal{O}^+(x)} \text{ es compacto} \end{array} \right. \Longrightarrow \omega(x) \cap (U^c \cap V^c) \neq \emptyset$, y esto es un absurdo. □

Definición 1.1.7. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Un punto $x \in M$ es *no-errante* si $\forall \ U$ entorno de x, se tiene que $\exists \ n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un flujo, decimos que $x \in M$ es *no-errante* si $\forall \ U$ entorno de x, $\exists \ t \geq 1$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Notamos $\Omega(f) = \{x \in M : \ x \text{ es no errante}\}$, y lo llamamos *conjunto no errante*.

Observación 1.1.5.

- $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.
- Si p es periódico $\Longrightarrow p \in \Omega(f)$.
- Si $x \in M \Longrightarrow \begin{cases} \omega(x) \subset \Omega(f) \\ \alpha(x) \subset \Omega(f) \end{cases}$

Definición 1.1.8. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Definimos el conjunto límite de f como

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))}.$$

Observación 1.1.6. $Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$. (ver ejercicio **??**)

Dinámica de la Rotación: Consideremos $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$. Distinguimos dos casos:

1. Caso $\alpha \in \mathbb{Q}$: sea $\alpha = \dfrac{p}{q}$, con $(p,q) = 1 \Longrightarrow R_\alpha^q(x) = x + p \equiv x \pmod 1$.

   Entonces, x es periódico (y de período q !). Luego, $\Omega(f) = S^1$ y todo punto es periódico con el mismo período.

2. Caso $\alpha \notin \mathbb{Q}$: primero observemos que R_α no tiene puntos periódicos: si $R_\alpha^n(x) = x \Longrightarrow x + n\alpha \equiv x \pmod 1 \Longrightarrow n\alpha \equiv 0 \pmod 1 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$. Sea $x \in S^1 \Longrightarrow \omega(x) \subset S^1$ compacto e invariante. Supongamos que $\omega(x) \subsetneq S^1 \Longrightarrow S^1 \backslash \omega(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, donde cada I_j es una componente conexa de $S^1 \backslash \omega(x)$. Observemos que como R_α es un homeo, tenemos que $R_\alpha(I_n) = I_{n'}$ con $n \neq n'$. Más aún: $R_\alpha^n(I_j) \cap R_\alpha^m(I_j) = \emptyset$, $\forall\ n, m$ tales que $n \neq m$ (de lo contrario, existiría un punto periódico). Sin embargo, $|R_\alpha^n(I_j)| = |R_\alpha^m(I_j)|$, ya que R_α es un movimiento rígido.

   Conclusión: $\omega(x) = S^1$, $\forall\ x \in S^1$. Es decir, $\Omega(R_\alpha) = S^1$ y toda órbita (futura) es densa.

Dinámica del Flujo Lineal en $\mathbb{T}^2$: Tenemos el campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $X_\alpha(x) = (1, \alpha)$. Luego, $\varphi_t^\alpha = x + t(1, \alpha)$ es el flujo de X_α en el plano. Sea $\tilde{\varphi}_t^\alpha(x) = \pi(\varphi_t^\alpha)$ el flujo lineal en $\mathbb{T}^2$.
Observamos que $\{0\} \times S^1$ es transversal al flujo (i.e., todas las órbitas cortan (transversalmente) a $\{0\} \times S^1$. Si $x \in \{0\} \times S^1$, fijémonos en el "primer retorno", es decir, la primera vez (en el futuro) en que la órbita por x corta a $\{0\} \times S^1$.

Vemos que $\varphi_1(0,x) = (0,x)+(1,\alpha) = (1, x+\alpha)$. Luego, $R(x) = (x+\alpha) \pmod 1$. Es decir, el retorno es la rotación de ángulo α.
Conclusión:

1. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\widetilde{\varphi_t^\alpha}$ son periódicas. $\Omega(\widetilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x)$.

2. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\widetilde{\varphi_t^\alpha}$ son densas. $\Omega(\widetilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathbb{T}^2$, $\forall\, x$.

Corolario 1.1.1. *Si r es una recta de pendiente irracional en $\mathbb{R}^2$, entonces $\pi(r)$, su proyección en T^2, es densa.*

Definición 1.1.9. $x \in M$ se dice *recurrente* en el $\begin{cases} \textit{futuro} \\ \textit{pasado} \end{cases}$ si $\begin{cases} x \in \omega(x) \\ x \in \alpha(x) \end{cases}$.
Si x es recurrente en el futuro y en el pasado, decimos que x es *recurrente*.

Ejemplos:

1. Si p es periódico $\Longrightarrow$ p es recurrente.

2. Todo punto es recurrente según la rotación R_α, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Todo punto es recurrente según el flujo lineal $\widetilde{\varphi}^\alpha$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. **Flujo lineal reparametrizado con una única singularidad:**
   Si tenemos un campo X en M y $a : M \to \mathbb{R}$ es una función positiva, entonces el flujo determinado por $Y(x) = a(x)X(x)$ tiene las mismas órbitas que X (pero recorridas con diferente velocidad). Si $a : M \to \mathbb{R}$, con $a(x) \geq 0$ y $a(x) = 0$ sólo en $x = x_0$, tenemos que $Y(x) = a(x)X(x)$ presenta una singularidad en x_0. La órbita de X que pasa por x_0 se divide ahora en tres órbitas según Y: $\begin{cases} \{\varphi_t^X(x_0) :\ t < 0\} \\ x_0 \\ \{\varphi_t^X(x_0) :\ t > 0\} \end{cases}$. Sean $X = (1, \alpha)$ y $p \in \mathbb{T}^2$. Sea $a : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $a(x) \geq 0$ y $a(x) = 0$ sii $x = p$ y consideramos $Y(x) = a(x)(1,\alpha) = a(x)X(x)$. Denotamos por ψ^α el flujo de Y en $\mathbb{T}^2$ y sea φ^α el flujo lineal en $\mathbb{T}^2$. Distinguimos dos casos:
   Caso 1: $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces:

   a) Si $p \notin \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x)$, y luego x tiene órbita periódica según Y, i.e., $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \mathcal{O}_Y(x)$.

b) Si $x \in \mathcal{O}_X(p)$ y $x \neq p \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(p) \backslash \{p\}$. Concluimos que $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \{p\}$.

c) $\mathcal{O}_Y(p) = \{p\}$

Conclusión 1.1.1. $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$ (ya que $\Omega(\psi^\alpha)$ es cerrado y contiene las órbitas periódicas, que son densas). Sin embargo, hay puntos que no son recurrentes ni en el pasado ni en el futuro.

Caso 2: $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces:

a) Si $p \notin \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x) \Longrightarrow \omega_Y(x) = \alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$.

b) Si $x = \varphi_t^\alpha(p)$ para algún $t > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : \ t > 0\}$ y además $\alpha_Y(x) = \{p\}$ y $\omega_Y(x) = \mathbb{T}^2$.

c) $x = \varphi_t^\alpha(p)$ para algún $t < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : \ t < 0\}$ y además $\alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$ y $\omega_Y(x) = \{p\}$.

Conclusión 1.1.2. $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$. Hay puntos recurrentes en el futuro que no lo son en el pasado y hay puntos recurrentes en el pasado que no lo son en el futuro.

1.2. Conjuntos minimales

Definición 1.2.1. Consideremos un s.d en M. Un subconjunto $G \subset M$ es *minimal* (según el s.d) si:

1. G es cerrado e invariante

2. G no contiene ningún subconjunto propio no vacío que sea cerrado e invariante (i.e. si $A \subset G$, $A \neq \emptyset$, A cerrado e invariante $\Longrightarrow A = G$).

Proposición 1.2.1. *$G \subset M$ es minimal $\Longleftrightarrow \overline{\mathcal{O}(x)} = G$, $\forall\, x \in G$.*

Demostración. $(\Longrightarrow)\overline{\mathcal{O}(x)}$ es cerrado e invariante y $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset G \Longrightarrow \overline{\mathcal{O}(x)} = G$.
$(\Longleftarrow)$ Sea $A \subset G$ cerrado e invariante y no vacío. Sea $x \in A$. Entonces $G = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset A \subset G \Longrightarrow A = G$.

□

Proposición 1.2.2. *Sea $G \subset M$ subconjunto compacto. Entonces, G minimal $\Longleftrightarrow \omega(x) = G$, $\forall\, x \in G \Longleftrightarrow \alpha(x) = G$, $\forall\, x \in G$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si $x \in G$ con G compacto, entonces $\omega(x) \neq \emptyset \Longrightarrow \omega(x)$ es cerrado, invariante y $\omega(x) \subset G$. Luego, $\omega(x) = G$.
($\Longleftarrow$) Sea $A \subset G$ cerrado e invariante y no vacío, y sea $x \in A$. Entonces, $G = \omega(x) \subset A \subset G \Longrightarrow A = G$. □

Ejemplos:

1. Si x es periódico $\Longrightarrow \mathcal{O}(x)$ es minimal.
2. $R_\alpha : S^1 \to S^1$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $G \subset S^1$ minimal $\Longrightarrow G = \mathcal{O}(x)$, órbita periódica.
3. $R_\alpha : S^1 \to S^1$, con $\alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow S^1$ es minimal (y es el único).
4. Si $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un flujo lineal con $\alpha \in \mathbb{Q}$, y $G \subset \mathbb{T}^2$ es minimal $\Longrightarrow G = \mathcal{O}(x)$ órbita periódica.
5. Si $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es un flujo lineal con $\alpha \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \mathbb{T}^2$ es minimal.
6. Si $\psi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es el flujo lineal reparametrizado con una singularidad en p y $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces el único minimal es $\{p\}$.

Observación 1.2.1. Si G es minimal no compacto, no es válida la proposición anterior. Si ψ_t^α es como en 6. y consideramos $M = T^2 \backslash \{p\} \Longrightarrow M$ es minimal (todas las órbitas son densas) pero hay puntos tales que $\omega(x) = \emptyset$.

Corolario 1.2.1. *Si G es minimal compacto, entonces toda órbita de $x \in G$ es recurrente.*

Proposición 1.2.3. *Sea M un espacio topológico compacto y sea $f : M \to M$ un s.d. en M. Entonces, existe algún punto recurrente.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset M : \ F \text{ es cerrado e invariante}, F \neq \emptyset\}$. Como $M \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ordenamos parcialmente a $\mathcal{F}$ así: $F_1 \leq F_2 \Longleftrightarrow F_1 \supset F_2$. Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una cadena $\Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$ y es cerrado e invariante. Luego, por el lema de Zorn, $\exists\, G$ elemento maximal. Por definición del orden, G es un conjunto minimal compacto. Luego, toda órbita de G es recurrente. □

Definición 1.2.2. Un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ se dice *relativamente denso* (o *sindético*) si existe $m > 0$ tal que $[n, n+m] \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Análogamente, definimos conjunto relativamente denso en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.3. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto y sea $p \in M$. Decimos que p es *fuertemente recurrente* si dado $U(p)$ entorno de p se tiene que $\{n \in \mathbb{Z} : \ f^n(p) \in U(p)\}$ es relativamente denso. (Análogamente para flujos.)

Observación 1.2.2. Si p es fuertemente recurrente, entonces p es recurrente.

Teorema 1.2.1. ***(Birkhoff)*** *Sea M un espacio topológico (regular). Sea $p \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(p)}$ compacto. Entonces p es fuertemente recurrente $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathcal{O}(p)}$ es minimal (compacto).*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$ es minimal (compacto). Sea $U(p)$ entorno de p y sea $x \in G \Longrightarrow \exists\ n(x)$ tal que $f^{n(x)}(x) \in U(p)$. Por continuidad, $\exists\ V(x)$ tal que si $y \in V(x) \Longrightarrow f^{n(x)}(y) \in U(p) \Longrightarrow G \subset \bigcup\limits_{x \in G} V(x)$. Como G es compacto, entonces $G \subset \bigcup\limits_{1}^{n} V(x_i)$, para ciertos $x_1, ..., x_n$. Sea $m = \max\{n(x_i) :\ 1 \leq i \leq n\}$. Luego, si $x \in G \Longrightarrow \exists\ n(x)$, con $0 \leq n(x) \leq m$ tal que $f^{n(x)}(x) \in U(p)$. Luego, $\{n :\ f^n(p) \in U(p)\}$ es relativamente denso.

($\Longrightarrow$) Sea $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$ y supongamos que G no es minimal. Sea $A \subset G$ cerrado, invariante y no vacío tal que $A \subsetneq G \Longrightarrow p \notin A$. Sea $U(p)$ entorno de p y V abierto, $A \subset V$ tal que $U(p) \cap V = \emptyset$. Como p es fuertemente recurrente $\Longrightarrow\ \exists\ m$ tal que para cualquier $j \in \mathbb{Z}$, $\exists\ n$ con $j \leq n \leq j + m$ tal que $f^n(p) \in U$. Sea $V_1 = f^{-m}(V) \cap f^{-(m-1)}(V) \cap \ldots \cap V$. Luego, V_1 es un abierto que contiene a A. Por otra parte, si $x \in V_1 \Longrightarrow x, f(x), \ldots, f^m(x) \in V$. Como $A \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$, $\exists\ j$ tal que $f^j(p) \in V_1$. Luego $f^j(p), f^{j+1}(p), \ldots, f^{j+m}(p) \in V \Longrightarrow f^j(p), f^{j+1}(p), \ldots, f^{j+m}(p) \notin U(p)$. Absurdo. $\square$

Definición 1.2.4. Sean M un espacio métrico y $f : M \to M$ un s.d. Un punto $p \in M$ se llama *casi-periódico* si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ S \subset \mathbb{Z}$ relativamente denso tal que si $s \in S \Longrightarrow d(f^n(p), f^{n+s}(p)) < \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.
(Para flujos se define de manera análoga.)

Definición 1.2.5. Sean M un espacio métrico y $G \subset M$ un subconjunto invariante. Decimos que f es *estable (estable en el futuro, estable en el pasado) según Lyapunov* en G si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x, y \in G$; $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ ($\forall\ n \geq 0$, $\forall\ n \leq 0$).

Observación 1.2.3. No confundir con la estabilidad de Lyapunov para un conjunto: Un subconjunto invariante G es estable Lyapunov (en el futuro) si dado un entorno U de G existe un entorno V de G tal que $f^n(V) \subset U$ para todo $n \geq 0$.

Proposición 1.2.4. *Sea $f : M \to M$ s.d y G minimal compacto. Entonces, f es estable Lyapunov en $G \iff p$ es casi-periódico, $\forall\, p \in G$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \delta(\varepsilon)$ de la estabilidad. Como G es minimal compacto $\Longrightarrow p$ es fuertemente recurrente. Luego $S = \{n :\ f^n(p) \in B(p, \delta)\}$ es relativamente denso. Sea $s \in S \Longrightarrow d(f^s(p), p) < \delta \Longrightarrow d(f^{n+s}(p), f^n(p)) < \varepsilon$, $\forall\, n \in Z$ (esto último es por la estabilidad). Luego, p es casi-periódico.

($\Longleftarrow$) Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in G$ casi periódico. Entonces, $\exists\, S \subset \mathbb{Z}$ relativamente denso tal que si $s \in S \Longrightarrow d(f^{n+s}(p), f^n(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, p es fuertemente recurrente y G es minimal. Sea $q \in G \Longrightarrow \exists\, n_j \longrightarrow +\infty$ tal que $f^{n_j}(p) \longrightarrow q$. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y $s \in S$. Entonces, $f^{n_j+n+s}(p) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f^{n+s}(q) \Longrightarrow f^{n_j+n}(p) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f^n(q) \Longrightarrow d(f^{n+s}(q), f^n(q)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, s \in S$.

Como S es relativamente denso, $\exists\, m$ tal que $[n, n+m] \cap S \neq \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Sea $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(f^i(x), f^i(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ si $0 \leq i \leq m$. Ahora, tomemos x, y tales que $d(x, y) < \delta$ y $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow n = s + k$ para algún $s \in S$ y $0 \leq k \leq m \Longrightarrow d(f^n(x), f^n(y)) = d(f^{s+k}(x), f^{s+k}(y)) \leq d(f^{s+k}(x), f^k) + d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^{s+k}(y)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Longrightarrow f$ es estable Lyapunov en G. $\square$

1.3. Transitividad

Definición 1.3.1. Sean M espacio topológico y $f : M \to M$ un s.d. Decimos que f es *transitivo* si $\exists\, x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

Observación 1.3.1. Si M no es discreto, entonces f es transitivo $\iff \exists\, x$ tal que $\omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Obvio.
($\Longrightarrow$) Como M no es discreto y $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$, concluimos que $x \in \omega(x)$ o $x \in \alpha(x)$. Entonces, $\mathcal{O}(x) \subset \omega(x)$ o $\mathcal{O}(x) \subset \alpha(x)$. $\square$

Proposición 1.3.1. *Sean M espacio métrico completo (separable) sin puntos aislados y $f : M \to M$ un s.d. Son equivalentes:*

1. *f es transitivo*

2. *dados A y B abiertos $\exists\, n \geq 0$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*

3. *$\exists\, R_1$ residual tal que $\omega(x) = M$, $\forall\, x \in R_1$.*

4. *$\exists\, R_2$ residual tal que $\alpha(x) = M$, $\forall\, x \in R_2$.*

Demostración. 1) $\Longrightarrow$ 2) Sea $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M \Longrightarrow \omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$. Supongamos que $\alpha(x) = M \Longrightarrow \exists\, n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in B$ y $\exists\, n_2$, con $n_2 < n_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in A \Longrightarrow f^{n_1 - n_2}(A) \cap B = \emptyset$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $\{B_n :\ n \geq 1\}$ una base numerable de la topología. Definimos $A_n = \{y \in M :\ f^m(y) \in B_n$ para algún $m \geq 0\}$. Luego, A_n es abierto y denso (por 2)). Tenemos que $R_1 = \bigcap\limits_n A_n$ es residual. Sea $x \in R_1$ y sea U abierto $\Longrightarrow \exists\, n$ tal que $B_n \subset U$. Luego, como $x \in A_n$, $\forall\, n$ tenemos que $\exists\, m$ tal que $f^m(x) \in B_n \subset U \Longrightarrow \omega(x) = M$.

3) $\Longrightarrow$ 1) obvio.

La equivalencia con 4) es $1), 2), 3)$ con $g = f^{-1}$. □

Corolario 1.3.1. *$f : M \to M$ es transitivo $\Longleftrightarrow$ si $A \subset M$ es abierto, transitivo e invariante entonces $\overline{A} = M$.*

Observación 1.3.2. Si $f : M \to M$ es transitivo y $\varphi : M \to M$ continua es tal que $\varphi \circ f = \varphi \Longrightarrow \varphi = cte$.

Demostración. Sea x_0 tal que $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = M \Longrightarrow \varphi(f^n(x_0)) = \varphi(x_0)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$ φ es constante en un conjunto denso $\Longrightarrow \varphi = cte$. □

Proposición 1.3.2. *Sea $\mathrm{T} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $\mathrm{T}(x, y) = (x+\alpha, y+\beta)$ (mod $\mathbb{Z}^2$). Entonces T es transitivo $\Longleftrightarrow$ $\alpha, \beta, 1$ son racionalmente independientes, i.e. $\nexists\, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tal que $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$. (ver ejercicio* **??***!)*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tal que $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$. Sea $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = \sin(2\pi(k_1 x + k_2 y))$. Luego, φ es continua y no constante. Ahora, $\varphi \circ \mathrm{T}(x, y) = \varphi(x + \alpha, y + \beta) =$

$\sin(2\pi(k_1x+k_2y+k_1\alpha+k_2\beta)) = \sin(2\pi(k_1x+k_2y)+2\pi k) = \sin(2\pi(k_1x+k_2y)) = \varphi(x,y) \Longrightarrow$ T no es transitivo.

($\Longleftarrow$) Sea U abierto e invariante y desarrollamos la función característica de U en serie de Fourier:

$$\chi_U(x_1,x_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1x_1+k_2x_2)) \text{ ctp.}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\chi_U(T(x_1,x_2)) &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1x_1+k_2x_2+k_1\alpha+k_2\beta)) \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1k_2} \exp(2\pi i(k_1\alpha+k_2\beta)\exp(2\pi i(k_1x_1+k_2x_2)).\end{aligned}$$

Como $\chi_U \circ \mathrm{T} = \chi_U$ por ser U invariante y por la unicidad de la serie de Fourier concluimos que $\alpha_{k_1k_2}\exp(2\pi i(k_1\alpha+k_2\beta) = \alpha_{k_1k_2}$, $\forall\ (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$. Como $k_1\alpha+k_2\beta\notin\mathbb{Z}$, $\forall\ (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$, concluimos que $\alpha_{k_1k_2}=0$, $\forall\ (k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$. Luego $\chi_U(x_1,x_2)=\alpha_{00}$, i.e. $\chi_U = cte$ (ctp) $\Longrightarrow \overline{U} = T^2 \Longrightarrow$ T es transitivo. □

1.4. Equivalencia dinámica

Terminamos este capítulo definiendo cuando dos sistemas dinámicos son ïguales”.

Definición 1.4.1. Sean $f,g: M\to M$ dos sistemas dinámicos. Decimos que son conjugados si existe un homeomorfismo $h: M\to M$ tal que $h\circ f = g\circ h$.

Para el caso de flujos tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.4.2. Sean ϕ_t,ψ_t dos flujos en M. Decimos que son conjugados si existe $h: M\to M$ homeomorfismo tal que $h\circ\phi_t = \psi_t\circ h$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Se dice que los flujos ϕ_t,ψ_t son orbitalmente equivalentes si existe $h: M\to M$ tal que $h(\mathcal{O}_{\phi_t}(x)) = \mathcal{O}_{\psi_t}(h(x))$.

La conjugación entre sistemas dinámicos preserva todas las propiedades dinámicas que se vieron en este capítulo:

Teorema 1.4.1. *Sea M compacto y sean $f : M \to M$ y $g : M \to M$ dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo $h : M \to M$ Entonces:*

1. *p es periódico por f sii $h(p)$ es periódico por g.*
2. *p es recurrente por f sii $h(p)$ es recurrente por g.*
3. *$h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$.*
4. *G es minimal por f sii $h(G)$ es minimal por g.*
5. *$h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.*
6. *f es transitivo sii g es transitivo.*
7. *f es topológicamente mixing sii g es topológicamente mixing.*

Demostración. ver lista de ejercicios. □

1.5. Práctico 1

1. Describir la dinámica de un flujo en S^1.

2. * Sea M un espacio métrico compacto. Sean $f : M \to M$ y $g : M \to M$ dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo $h : M \to M$ (esto es, $h \circ f = g \circ h$). Probar que:

   a) p es periódico por f sii $h(p)$ es periódico por g.

   b) p es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por f sii $h(p)$ es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por g.

   c) G es minimal por f sii $h(G)$ es minimal por g.

   d) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

   e) Se define el conjunto estable de un punto x como $W^s(x, f) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\}$ y el inestable como $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$. Mostrar que $h(W^s(x, f)) = W^s(h(x), g)$ y analogamente para el conjunto inestable.

3. Sea M un espacio métrico compacto. Sean $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ y $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$ dos flujos. Se dicen que son equivalentes si existe un homeomorfismo

$h : M \to M$ que lleva órbitas de un flujo en órbitas del otro, esto es $h(\mathcal{O}(x, \phi)) = \mathcal{O}(h(x), \psi)$. Si ademas se cumple que $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h \ \forall t \in \mathbb{R}$ se dicen que son conjugados. Cuáles de las propiedades del ejercicio anterior se conservan para flujos equivalentes y cuáles para flujos conjugados?

4. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo. Mostrar que $\Phi_{/\mathbb{Z} \times M}$ es un sistema dinámico discreto ($f = \Phi_1$ se llama "tiempo 1" del flujo).

   b) Demostrar que si $f : M \to M$ es el tiempo 1 de un flujo entonces es isotópico a la identidad (dos homeos f_0, f_1 de M son isotópicos si existe $F : M \times [0, 1] \to M$ continua tal que $F(., 0) = f_0, F(., 1) = f_1$ y $F(., t) : M \to M$ es un homeo para cualquier $t \in [0, 1]$.

   c) Encontrar un ejemplo de un sistema dinámico discreto que no sea el tiempo 1 de ningún flujo.

5. * Sea M un espacio topológico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo. En $M \times \mathbb{R}$ se considera el flujo $\Phi : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ dado por $\Phi(t, (x, s)) = (x, t + s)$. En $M \times \mathbb{R}$ se considera la siguiente relación:

$$(x, s_1) \sim (y, s_2) \Longleftrightarrow s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } f^{s_1 - s_2}(x) = y.$$

   a) Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Sea $\tilde{M} = M \times \mathbb{R} / \sim$ y $\Pi : M \times \mathbb{R} \to \tilde{M}$ la proyección canónica. Se considera $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{M} \to \tilde{M}$ dada por $\tilde{\Phi}(t, \Pi(x, s)) = \Pi(\Phi(t, (x, s))$. Mostrar que $\tilde{\Phi}$ esta bien definida y que es un flujo en $\tilde{M}$. (este flujo se llama flujo suspensión de f.)

   c) Mostrar que $\tilde{M}_t = \Pi(M \times \{t\})$ es homeomorfo a M y que $\tilde{\Phi}_1$ deja invariante $\tilde{M}_t$ y es conjugado a $f : M \to M$.

   d) Si $M = S^1$ y $f : M \to M$ es la rotación de angulo α, R_α, identificar $\tilde{M}$ y $\tilde{\Phi}$.

   e) Si $M = S^1$ y $f : S^1 \to S^1$ es $f(x) = -x(mod 1)$, identificar $\tilde{M}$.

6. *a*) Sea G un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Probar que G es discreto ($G = d\mathbb{Z}$) o que G es denso en $\mathbb{R}$. (sug: considerar $d = \inf\{g \in G : g > 0\}$)

   b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G_\alpha = \{n\alpha + m; n, m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que G_α es discreto sii $\alpha \in \mathbb{Q}$.

c) Sea $R_\alpha : S^1 \to S^1, R_\alpha(x) = x + \alpha (mod 1)$. Verificar que la órbita de x por R_α es $\Pi(x + G_\alpha)$ donde $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la proyección canónica. Deducir de aqui la dinámica de R_α.

7. Encontrar ejemplos de:

   a) Puntos no errantes que no sean recurrentes.

   b) Puntos recurrentes que no sean fuertemente recurrentes.

8. * Sea M espacio métrico compacto y $f : M \to M$ homeo. Una ϵ-cadena de x a y es una conjunto finito $x_0 = x, x_1, \dots X_n = y$ tal que $dist(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para $i = 0, ..., n-1$. Decimos que x es recurrente por cadenas si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena de x a x. Denotamos por $\mathcal{R}(f)$ el conjunto de los puntos recurrentes por cadenas.

   a) Probar que $\mathcal{R}(f)$ es cerrado e invariante.

   b) Probar que $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$.

   c) Probar que $\mathcal{R}(f_{/\mathcal{R}(f)}) = \mathcal{R}(f)$.

9. Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Definimos los conjuntos $L^+(f) = \overline{\cup_{x \in M} \omega(x)}$, $L^-(f) = \overline{\cup_{x \in M} \alpha(x)}$ y $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$. Denotamos por $Per(f)$ es conjunto de los puntos periódicos de f. Demostrar que $Per(f) \subset L^+(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$. Encontrar ejemplos donde estas inclusiones sean estrictas.

10. *a*) Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Probar que si $\mathcal{O}(x)$ es compacto entonces x es periódico. (sug: si x no es aislado en $\mathcal{O}(x)$ entonces $\mathcal{O}(x)$ es perfecto.)

    b) Probar resultado análogo para flujos (sug: si la órbita por x no es fija ni periódica encontrar q_n, ϵ_n y $t_n \to \infty$ tales que $B(q_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subset B(q_n, \epsilon_n)$ y $\overline{B(q_n, \epsilon_n)} \cap \{\Phi_t(x) : -t_n \leq t \leq t_n\} = \emptyset$.

11. Sea M un espacio métrico completo y sea $f : M \to M$ un homeo. Un punto $p \in M$ se dice que es uniformemente fuertemente recurrente si dado $\epsilon > 0$ existe L tal que el conjunto $\{m \in \mathbb{Z} : d(f^m(p), q) < \epsilon\}$ es L-relativamente denso cualquiera sea q en la orbita de p.

a) Probar que si la órbita de un punto p tiene clausura compacta, entonces p es fuertemente recurrente sii es uniformemente fuertemente recurrente.

b) Si p es uniformemente fuertemente recurrente, entonces la órbita de p es un conjunto totalmente acotado.

c) Probar que p es uniformemente fuertemente recurrente sii la clausura de la órbita de p es un minimal compacto.

d) Si p es casi-periódico entonces p es uniformemente fuertemente recurrente.

12. *a*) Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de período 1. Probar que $\int_s^{s+1} \Phi(t)dt = \int_0^1 \Phi(t)dt$.

b) Considere $R_\alpha : S^1 \to S^1$ rotación con α irracional y sea $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}$ continua. Probar que Φ_n definida por

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi(R_\alpha^j(x))$$

converge uniformemente a una constante (sug: usar Arzela-Ascoli y que las integrales de Φ_n son todas iguales).

13. * *El C^0 closing lemma:*

a) Sea $\epsilon > 0$. Probar que si $y \in \mathbb{R}^n$ satisface $\|y\| < \epsilon$ entonces existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeo tal que:

- $h(0) = y$
- $h(x) = x$ si $\|x\| \geq \epsilon$.
- $\|h(x) - x\| \leq \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Consider $\phi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ dada por $\phi(t) = 1 - t$ si $0 \leq t \leq 1$ y $\phi(t) = 0$ si $t \geq 1$ y definir $h(x) = x + \phi\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right) y$.

b) Sea M una variedad compacta y sea $f : M \to M$ homeo y x un punto recurrente. Dado $\epsilon > 0$ probar que existe $g : M \to M$ homeo tal que $dist(g(z), f(z)) < \epsilon$ para todo $z \in M$ y tal que x es periódico para g. Probar un resultado análogo si $x \in \Omega(f)$.

14. Decimos que G es un grupo topológico si es un espacio topológico y a la vez un grupo donde las operaciones del grupo (multiplicación e inverso) son funciones continuas. Sea $g \in G$ un elemento y considere la multiplicación a izquierda $L_g : G \to G,\ L_g(g') = gg'$.

    a) Probar que L_g es transitivo sii G es minimal por L_g.

    b) Si G es compacto, probar que todo punto es recurrente.

15. * Sea $f : T^2 \to T^2$ dado por $f(z, w) = (z + \alpha, z + w)$ con α irracional. Probar que T^2 es minimal.

16. Sea N un espacio topológico, $f : N \to N$ un homeo, K un grupo topológico compacto y $\phi : N \to K$ una aplicación continua. Definimos un sistema dinámico (llamado "skew product") en $M = N \times K$ dado por $F(y, k) = (f(y), \phi(y)k)$.

    a) Si definimos $R_g : M \to M$ por $R_g(y, k) = (y, kg)$ probar que $R_g \circ F = F \circ R_g$. Concluir que si $(y, k) \in \omega(y_0, k_0)$ entonces $(y, kg) \in \omega(y_0, k_0 g)$.

    b) Probar que si $y_0 \in N$ es recurrente por f entonces (y_0, k) es recurrente por F para todo $k \in K$. (Sug: probarlo primero para la identidad).

    c) Si N es minimal para f, es M minimal para F.?

    d) Considere $F : T^2 \to T^2$ dado por $F(z, w) = (z + \alpha, w + 2z + \alpha)$. Mostrar que $(0, 0)$ es recurrente y concluir que para todo número real α y $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofantina $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$.

    e) Si $p(x)$ es un polinomio real con $p(0) = 0$, mostrar que para todo $\epsilon > 0$ hay solución de la ecuación diofantina $|p(n) - m| < \epsilon$. (sug: si d es el grado de p considerar $F : T^d \to T^d, F(z_1, ..., z_d) = (z_1 + \alpha, z_2 + z_1, ..., z_d + z_{d-1})$ y los polinomios $p_d = p, p_{i-1}(x) = p_i(x+1) - p_i(x)$. Quién es $F^n(p_1(0), ..., p_d(0))$.?

Capítulo 2

Dinámica en S^1

Definimos el círculo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\pi(x) = x$ (mod 1) la proyección canónica. Identificamos el círclo con $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Trabajaremos con ambas nociones indistintamente.

Proposición 2.0.1. *Sean $f : S^1 \to S^1$ continua, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \pi^{-1}(f(\pi(x_0)))$. Entonces, existe una única $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que:*

1. $F(x_0) = y_0$
2. $\pi \circ F = f \circ \pi$

Definición 2.0.1. Una $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica $\pi \circ F = f \circ \pi$ se llama *levantamiento* de f.

Observación 2.0.1. Si F_1 y F_2 son dos levantamientos de f, entonces $F_1(x) = F_2(x) + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. $F_1 - F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es continua. □

Observación 2.0.2. Sea F levantamiento de f. Entonces de $\pi \circ F = f \circ \pi$ se deduce que $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+1) = F(x) + m$. Este m no depende del levantamiento.

Definición 2.0.2. Llamamos $deg(f)$ al entero m tal que $F(x+1) = F(x) + m$, donde F es un levantamiento de f.

Observación 2.0.3. Si $f : S^1 \to S^1$ es un homeo que preserva orientación (que denotaremos por $f \in Hom_+(S^1)$) y F es un levantamiento de f. Entonces:

1. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeo creciente
2. $deg(f) = 1$
3. $F - id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de período 1.

Teorema 2.0.1 (Poincaré)**.** *Sean $f \in Hom_+(S^1)$ y F un levantamiento. Entonces, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F^n(x) - x}{n}$ y es independiente de x.*

Demostración. 1. independencia de x:

Basta observar que si $|x - y| \leq k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow |F^n(x) - F^n(y)| \leq k$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Luego, $\left|\dfrac{F^n(x)}{n} - \dfrac{F^n(y)}{n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. existencia del límite:

Para $m \in \mathbb{Z}$ afirmamos que $\forall\, m \Longrightarrow \exists\, p_m \in \mathbb{Z}$ tal que $p_m \leq F^m(x) - x \leq p_m + 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.[1] Como $F^m - Id$ es periódica de período 1 basta verificar lo anterior para $x \in [0, 1]$. Sea $k = \min\{n \in Z : n \geq F^m(1)\}$. Sea $p_m = k - 3$. Ahora para $x \in [0, 1]$ tenemos que

$$F^m(x) - x \leq F^m(1) - 0 \leq p_m + 3 \text{ y } F^m(x) - x \geq F^m(0) - 1 \geq k - 2 - 1 = p_m.$$

$$\begin{array}{llcc}
\text{Tomamos} & x = 0 & \longrightarrow & p_m \leq F^m(0) \leq p_m + 3 \\
 & x = F^m(0) & \longrightarrow & p_m \leq F^{2m}(0) - F^m(0) \leq p_m + 3 \\
\text{Luego,} & \vdots & & \vdots \\
 & x = F^{(n-1)m} & \longrightarrow & p_m \leq F^{nm}(0) - F^{(n-1)m}(0) \leq p_m + 3 \\
\text{sumamos} & & \longrightarrow & np_m \leq F^{nm}(0) \leq n(p_m + 3)
\end{array}$$

Luego,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^{nm}(0)}{nm} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m}.$$

Como además,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^m(0)}{m} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m},$$

entonces

$$\left|\frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^m(0)}{m}\right| \leq \frac{3}{m}.$$

[1] En realidad existe $p_m \in \mathbb{Z}$ tal que $p_m < F^m(x) - x < p_m + 2$ ya que se puede probar que $(F^m - id)(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Z}$ consiste a lo sumo de un solo punto (ejercicio).

Intercambiando los roles de m y n, obtenemos:

$$\left|\frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n}\right| \leq \frac{3}{n},$$

de donde

$$\left|\frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n}\right| \leq \frac{3}{m} + \frac{3}{n}.$$

Luego, $\left\{\frac{F^n(0)}{n}\right\}$ es una sucesión de Cauchy $\Longrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(0)}{n}$.

□

Definición 2.0.3. Sea F un levantamiento de $f \in Hom_+(S^1)$. Definimos el *número de traslación del levantamiento* F como $\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$.

Observación:

1. Si F_1 es otro levantamiento de f, entonces $F_1(x) = F(x) + k$, para algún $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \rho(F_1) = \rho(F) + k$.

2. $\rho(F^m) = m\rho(F)$.

Definición 2.0.4. Sea $f \in Hom_+(S^1)$. Llamamos *número de rotación* de f a $\rho(f) = \rho(F) \pmod 1$, donde F es un levantamiento de f.

Proposición 2.0.2. *El número de rotación es invariante por conjugaciones. Es decir, si $f, g \in Hom_+(S^1)$, donde $g = h^{-1} \circ f \circ h$, para cierta $h \in Hom(S^1)$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

Demostración. Sea F levantamiento de f y H levantamiento de h. Luego, H^{-1} es un levantamiento de h^{-1} y $G = H^{-1} \circ F \circ H$ es un levantamiento de g. Ahora, existe M tal que $|H^{-1}(y) - y| < M$, $\forall\, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow |G^n(x) - F^n(H(x))| \leq M$, $\forall\, n \Longrightarrow \rho(G) = \lim_n \frac{G^n(x)}{n} = \lim_n \frac{H^{-1}(F^n(H(x))) - F^n(H(x))}{n} + \frac{F^n(H(x))}{n} = \lim_n \frac{F^n(H(x))}{n} = \rho(F) \Longrightarrow \rho(g) = \rho(f)$. □

Observación 2.0.4. $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

2.1. Número de rotación racional

Proposición 2.1.1. *Sea $f \in Hom(S^1)$. Entonces*

$$\rho(f) \in \mathbb{Q}(mod 1) \Longleftrightarrow f \textit{ tiene puntos periódicos.}$$

En este caso, si $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$, *con* $(p,q) = 1$, *todos los puntos periódicos tienen período* q.

Demostración. Veamos primero el reciproco. Sea F levantamiento de f. Como f tiene un punto periodico $\pi(x)$ (digamos de período q) entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $F^q(x) = x + p$. Luego, $F^{nq}(x) = x + np$ y por lo tanto

$$\lim_n \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_n \frac{x + np}{nq} = p/q$$

y por lo tanto $\rho(f) = \frac{p}{q}(mod 1)$.

Veamos el directo:

Por propiedad del número de rotación:

$$\rho(f^m) = m\rho(f) \text{ (mod 1)}.$$

Si $\rho(f) = \dfrac{p}{q} \Longrightarrow \rho(f^q) = 0$. Basta demostrar que si $\rho(f) = 0$, entonces f tiene puntos fijos. Sea F tal que $\rho(F) = 0$. Si F no tiene puntos fijos, como $F - Id$ es periódica, $\exists\ \delta$ tal que $|F(x) - x| \geq \delta$. Por otra parte $F(x) > x, \forall\ x$ (*) o $F(x) < x, \forall\ x$ (**). Supongamos (*) (el otro caso es análogo). Entonces $F(0) > \delta$, $F^2(0) > F(0) + \delta > 2\delta$, $\ldots F^n(0) > n\delta$. Entonces $\delta < \dfrac{F^n(0)}{n} \longrightarrow 0$.

Finalmente supongamos que $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ y veamos que todos los puntos periódicos tiene periódo q. Sea F un levantamiento de f tal que $\rho(F) = \dfrac{p}{q}$ y sea $\pi(x)$ periódico por f. Entonces, existen r, s tales que $F^r(x) = x + s$. Ahora

$$\rho(f) = \frac{p}{q} = \lim_{r \to \infty} \frac{F^{rs}(x)}{rs} = \frac{s}{r},$$

entonces $s = mp$ y $r = mq$ para algún m. Supongamos $F^q(x) - p > x$, entonces

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x.$$

Entonces $x < F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s$, lo cual es absurdo. Análogamente si $F^q(x) - p < x$ llegamos a una contradicción. Así, $\pi(x)$ es periódico por f si y sólo si $F^q(x) = x + p$. Luego todos los puntos periódicos de f tienen período q. $\square$

Observación 2.1.1. Veamos otra forma para la demostración anterior. Sea $\pi(x)$ periódico de f de período q. Entonces $S^1 \backslash \mathcal{O}(\pi(x)) = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ son q intervalos disjuntos que son permutados por f, y $f^j(I_i) = I_i$ si y sólo si $j = q$. Luego

$f^q(I_1) = I_1$ es un homeo del intervalo I_1. Si $\pi(y)$ es un punto periódico de f, tenemos que $\mathcal{O}(\pi(y)) \cap I_1 \neq \emptyset$. Supongamos que $\pi(y) \in I_1$. Ahora

$$\Omega(f^q|_{I_1}) = \{\text{puntos fijos}\} \Longrightarrow f^q(\pi(y)) = \pi(y).$$

Luego $\pi(y)$ es periódico de período q.

Corolario 2.1.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Entonces $\Omega(f) = Per(f)$.*

Proposición 2.1.2. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$ y sea $\pi(x)$ un punto periódico de f. Entonces el orden de $\{\pi(x), f(\pi(x)), \ldots, f^{q-1}(\pi(x))\}$ en S^1 es el mismo que una órbita según $R_{\frac{p}{q}}$, i.e., es el mismo que*

$$\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}.$$

Demostración. Sea F un levantamiento de f tal que $F^q(x) = x + p$. Consideremos $\pi^{-1}(\mathcal{O}(\pi(x))) = A$. Entonces A divide a $[x, x+p]$ en $p.q$ intervalos. Por otra parte $x < F(x) < \ldots < F^{q-1}(x) < F^q(x) = x + p$. Tenemos entonces q intervalos en $[x, x+p]$:

$$[x, F(x)], [F(x), F^2(x)], \ldots, [F^{q-1}(x), F^q(x)].$$

De ahí que como A es invariante por F, tenemos que $\#A \cap [x, F(x)] = p + 1$. Sea $x_1 \in A$ tal que $[x, x_1) \cap A = \emptyset$. Entonces existe un único k con $0 \leq k < q$ tal que $F^k(x) - r = x_1$ y $r \in \mathbb{Z}$. Sea F_1 definida como $F_1(z) = F^k(z) - r$. Entonces $F_1^p(x) = F(x)$. Luego

$$f^{kp}(\pi(x)) = f(\pi(x)) \Longrightarrow kp \equiv 1 \text{ (mod q)}.$$

Entonces k es el único entero con $0 < k < q$ que verifica $kp \equiv 1$ (mod q) y $f^{kp}(\pi(x))$ es el que le sigue a $\pi(x)$ en la orientación de S^1, es decir el orden de $\{\pi(x), f(\pi(x)), \ldots, f^{q-1}(\pi(x))\}$ en S^1 es:

$$\pi(x) < f^k(\pi(x)) < f^{2k}(\pi(x)) < \ldots < f^{(q-1)k}(\pi(x)).$$

Vimos que el orden está determinado solamente por $\rho(f) = \dfrac{p}{q}$. Así, es el mismo que $R_{\frac{p}{q}}$. □

2.2. Número de rotación irracional

Teorema 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}(mod1)$. Entonces $\Omega(f)$ es minimal.*

Demostración. Sea $M \subset \Omega(f)$ compacto invariante, $M \neq \emptyset$. Entonces $S^1 \backslash M$ es abierto. Sea $I = (a, b)$ una componente conexa de $S^1 \backslash M$. Luego $f^n(I) \cap I = \emptyset$, $\forall\, n > 0$ (de lo contrario f tiene puntos periódicos). Entonces $I \subset S^1 \backslash \Omega(f)$. De ahí $\Omega(f) \subset M$. Entonces $\Omega(f)$ es minimal. □

Corolario 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces $\Omega(f) = S^1$ o $\Omega(f)$ es perfecto con interior vacío (i.e., $\Omega(f)$ es un conjunto de Cantor).*

Demostración. $\Omega(f)$ es perfecto pues $\Omega(f)$ es minimal. Si $\Omega(f)$ tiene interior no vacío, tenemos que $\Omega(f)$ es abierto. Como $\Omega(f)$ es cerrado, $\Omega(f) = S^1$. □

Proposición 2.2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Sea F levantamiento tal que $\rho(F) = \alpha$. Entonces para todo $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$ se cumple*

$$(1)\ n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2 \Longleftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2\ (2).$$

Demostración. Fijemos $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$. Como $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$, el signo de $p(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) + m_2$ no depende de x. Luego, dados $n_1,\ n_2,\ m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}$, si $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ para algún x tenemos que la misma desigualdad vale para todo x. Supongamos que (2) se cumple, entonces vale para $x = 0$, i.e. $F^{n_1}(0) - F^{n_2}(0) < m_2 - m_1$. Haciendo $y = F^{n_2}(0)$ tenemos $F^{n_1 - n_2}(y) - y < m_2 - m_1$ (3). Luego (3) vale para todo y, en particular para $y = 0$. Entonces $F^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1$, de ahí que $F^{k(n_1 - n_2)}(0) < m_2 - m_1$, entonces

$$\frac{F^{k(n_1 - n_2)}(0)}{k(n_1 - n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2},$$

pudiendo suponer que $n_1 - n_2 > 0$. Haciendo tender k a $+\infty$ obtenemos

$$\alpha \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, tenemos

$$\alpha < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

De donde

$$n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2.$$

Análogamente si

$$F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$$

tenemos

$$n_1\alpha + m_1 > n_2\alpha + m_2,$$

y se concluye la demostración. □

Definición 2.2.1. Dados $f, g \in Hom_+(S^1)$ decimos que f es *semiconjugado* a g si existe $h : S^1 \to S^1$ continua y sobre (de grado 1 y preservando orientación) tal que $h \circ f = g \circ h$.

Teorema 2.2.2. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es semiconjugado a R_α (por una h que preserva orientación). Mas aún si f es transitivo, f es conjugado a R_α (i.e. h es un homeo).*

Demostración. Sea F un levantamiento de f y $x \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto $B = \{F^n(x) + m : \ n, m \in \ \mathbb{Z}\}$. Definimos una función $H : B \to \mathbb{R}$ por $H(F^n(x) + m) = n\alpha + m$. Luego H es monótona y $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$. Entonces existe una única extensión continua de H a $\overline{B}$ y monótona y además $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$. Entonces hay una única extensión de H a $\mathbb{R}$ de forma monótona. Luego tenemos $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y sobre. Se verifica $H \circ F = T_\alpha \circ H$. Además $H(x + 1) = H(x) + 1$. Luego definimos $h : S^1 \to S^1$ por $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$. h es continua, sobre y $h \circ f = R_\alpha \circ h$. Por otra parte, si f es transitivo (i.e. $\Omega(f) = S^1$) tenemos que $\overline{B} = \mathbb{R}$ y H es un homeo. □

2.3. Difeomorfismos del círculo

Definición 2.3.1. Sea $f : S^1 \to S^1$, $J \subset S^1$. Decimos que J es un *intervalo errante* si

a) $J,\ f(J),\ f^2(J), \ldots$ son disjuntos dos a dos.

b) $\omega(J) = \bigcup_{x \in J} \omega(x)$ no es una única órbita periódica.

Ejemplo 1. Sea $f : S^1 \to S^1$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $\Omega(f) \subsetneq S^1$. Una componente de $S^1 \backslash \Omega(f)$ es un intervalo errante.

Lema 2.3.1 (Distorsión limitada)**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Entonces existe C tal que*

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp\left(C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)| \right).$$

Demostración. Sea m tal que $|f'(x)| \geq m > 0$ y M tal que $|f''(x)| \leq M$. Entonces $C = \dfrac{M}{m}$ es constante de Lipschitz de la función $x \longmapsto \log |f'(x)|$.

Luego

$$\log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} = \log \frac{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(x))|}{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(y))|} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x))| - \log |f'(f^i(y))| \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} C|f^i(x) - f^i(y)| = C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)|.$$

$\square$

Lema 2.3.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Sea $J \subset S^1$ intervalo tal que $\sum_{n\geq 0} |f^n(J)| < \infty$. Entonces existe $T \supsetneq J$ tal que $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|,\ \forall\, n \geq 0$.*

Demostración. Sea $K = \sum_{n\geq 0} |f^n(J)|$ y C del lema de Distorsión limitada. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta e^{2KC} < 1$. Consideremos $T \supsetneq J$ tal que $|T| \leq (1+\delta)|J|$. Probemos el teorema por inducción. El caso $n = 0$ es cierto. Si $i = 0, \ldots, n-1$, sean $x, y\ \in T$. Entonces,

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq e^{C \sum_{j=0}^{n-1} |f^j(T)|} \leq e^{2KC}.$$

Luego

$$|f^n(T)| = |f^n(J)| + |f^n(T \backslash J)|$$

y

$$|f^n(T\backslash J)| \underset{\text{para algún } x\in T}{\leq} |(f^n)'(x)||T\backslash J| =$$

$$= \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \frac{|f^n(J)|}{|J|} |T\backslash J| \leq$$

$$\leq \frac{|f^n(J)|}{|J|} e^{2KC} |T\backslash J| \leq$$

$$\delta e^{2KC} |f^n(J)| < |f^n(J)|.$$

Entonces

$$|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|.$$

En particular se cumple también $|f^n(T)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Teorema 2.3.1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2. Entonces f no tiene intervalos errantes.*

Demostración. Supongamos, razonando por contradicción que f tiene un intervalo errante J_0. Se deduce que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Sea $J \supset J_0$ intervalo errante maximal. Se deduce que J es una componente de $S^1 \setminus \Omega(f)$. Además $\sum_{n \geq 0} |f^n(J)| \leq 1$ con los $f^n(J)$ disjuntos dos a dos. Por el lema anterior, existe $T \supsetneq J$ tal que $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|$ y $|f^n(T)| \longrightarrow 0$ (observar que podemos suponer $T \neq S^1$). Sea $x \in \partial J$ tal que $x \in T$. Como $x \in \Omega(f)$ existe $n_i \to \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \to x$ (y $f^{n_i} \in T$). Como $|f^n(J)| \to 0$ podemos tomar un elemento, llamémosle k, de la sucesión n_i con i suficientemente grande tal que $dist(f^k(J), S^1 \setminus T) < \frac{|f^k(J)|}{4}$. Concluimos de aquí que $f^k(T) \subset T$ y por lo tanto f^k tiene un punto periódico. Esto contradice que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$.

□

Corolario 2.3.1 (Denjoy, [D])**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^2, con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es conjugado a R_α.*

Demostración. Por el teorema anterior, $\Omega(f) = S^1$. □

Nota: El resultado original de Denjoy tiene hipótesis mas débiles (que $x \to \log |f'(x)|$ sea de variación limitada, cosa que efectivamente sucede si f es de clase C^2). La demostración que vimos es debida a Schwarz [Sch].

Teorema 2.3.2 (Denjoy, [D])**.** *Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces existe $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^1 con $\rho(f) = \alpha$ y f tiene un intervalo errante (i.e. f no es conjugado a R_α).*

Demostración. Sea $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $\lambda_n > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n = 1$ y $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \longrightarrow 1$. $\left(\text{Ej: } \lambda_n = \dfrac{K}{(|n|+1)(|n|+2)}\right)$.
Colocamos en S^1 intervalos I_n, $|I_n| = \lambda_n$ y los ordenamos en S^1 de la misma forma que $\{x_n = R_\alpha^n(0) : \; n \in \mathbb{Z}\}$ (por inducción, colocamos I_0, I_1 tal que $\operatorname{dist}(I_0, I_1) = \sum_{\{k : x_k \in (x_0, x_1)\}} \lambda_k$, etc.). Vamos a definir $f : S^1 \to S^1$ definiendo f' e integrando (si $g : S^1 \to S^1$ es continua y $\int_{S^1} g = 1$ entonces $\exists\, f : S^1 \to S^1$ tal que $f' = g$). En $I_n = (a_n, b_n)$ definimos

$$f'(x) = g(x) = 1 + k_n \frac{(a_n - x)(x - b_n)}{\lambda_n^2},$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n,$$

donde

$$k_n = \frac{6}{\lambda_n}(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Entonces

$$\int_{I_n} g(x) = \int_{a_n}^{b_n} g(x) = \lambda_n + \frac{k_n}{\lambda_n^2}\frac{\lambda_n^3}{6} = \lambda_{n+1},$$

entonces

$$\int_{S^1} g(x) = 1.$$

Definimos $f : S^1 \to S^1$ por

$$f(x) = \int_{a_0}^{x} g(x)dx + a_1$$

Verifiquemos que $f(I_n) = I_{n+1}$.

$$f(a_n) = \int_{a_0}^{a_n} g(x)dx + a_1 = \sum_{k:\ I_k \subset (a_0,a_n)} \int_{I_k} g(x)dx + a_1 =$$

$$= \sum_{k:\ x_k \in\ (x_0,x_n)} |I_{k+1}| + a_1 = \sum_{k:\ x_k \in (x_1,x_n)} |I_k| + a_1 = a_n.$$

Verifiquemos que $\rho(f) = \alpha$. Sea $h : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \to S^1$ por $h(I_n) = R_\alpha^n(0) = x_n$. h preserva orientación y tiene dominio y rango denso en S^1, entonces h se extiende continuamente a $h : S^1 \to S^1$ continua y sobre. Además $h \circ f = R_\alpha \circ h$, es decir f es semiconjugado a R_α. Entonces $\rho(f) = \alpha$ (ver ejercicio 4). $\square$

2.4. $Diff^r(S^1)$ desde el punto de vista genérico

En esta sección estudiaremos $Diff^r(S^1)$: el conjuntos de difeomorfismos del círculo de clase C^r con la topología C^r.

Veremos primero que el tener número de rotación irracional es “inestable”.

Teorema 2.4.1 (C^r- closing lemma)**.** *Sea $f : S^1 \to S^1$ difeo de clase C^r y $x \in \Omega(f)$. Entonces existe g, C^r arbitrariamente cerca de f tal que $x \in Per(g)$.*

Demostración. Vamos a mostrar que $g_t = R_t \circ f$ para algún t arbitrariamente pequeño tiene a x como punto periódico. Es fácil ver que g_t está C^r cerca de f si t es pequeño. Si x es periódico de f no hay nada que probar. Supongamos que no lo es. Entonces $x \in \omega(x) \Longrightarrow \exists\, n_i$ tal que $f^{n_i}(x) \longrightarrow x$. Sea F levantamiento de f y $\hat{x}$ tal que $\pi(\hat{x}) = x$. Entonces $\exists\, p_i$ tal que $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i \longrightarrow \hat{x}$. Tomando subsucesión podemos suponer que $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i$ es monótona. Supongamos que es creciente. Sea $\alpha > 0$ y consideremos $g_\alpha = R_\alpha \circ f$. $G_\alpha = T_\alpha \circ F$ levantamiento de g_α.

Afirmación 1. $G_\alpha^n(x) \geq F^n(x) + \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En efecto, razonando por inducción, $G_\alpha^n(x) = G_\alpha(G_\alpha^{n-1}(x)) \geq G_\alpha(F^{n-1}(x)) \geq F^n(x) + \alpha$.

Ahora tomemos n_i tal que $\hat{x} - (F^{n_i}(\hat{x}) - p_i) < \alpha$. Entonces

$$G_0^{n_i}(\hat{x}) - p_i = F^{n_i}(\hat{x}) - p_i < \hat{x}$$

y

$$G_\alpha^{n_i}(\hat{x}) - p_i \geq F^{n_i}(\hat{x}) - p_i + \alpha > \hat{x}.$$

Entonces existe $t \in [0, \alpha]$ tal que $G_t^{n_i}(\hat{x}) - p_i = \hat{x}$. □

Definición 2.4.1. Sea $f : S^1 \to S^1$ y p un punto fijo de f. Decimos que p es hiperbólico si $|f'(p)| \neq 1$. Si p es periódico, $f^k(p) = p$, decimos que p es un punto periódico hiperbólico si $|(f^k)'(p)| \neq 1$, i.e., p es un punto fijo hiperbólico de f^k.

Teorema 2.4.2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ y p un punto fijo (periódico) hiperbólico de f. Entonces existe $U(p)$ entorno de p y $\mathcal{U}(f)$ entorno de f en la topología C^r tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces g tiene un único punto fijo (periódico) hiperbólico en $U(p)$.*

Demostración. Tenemos que $|f'(p)| \neq 1$. Supongamos que $f'(p) > 1 \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > \mu > 1$, si $|x - p| \leq \varepsilon$. Luego, $\begin{cases} f(p+\varepsilon) > (p+\varepsilon) + \mu\varepsilon \\ f(p-\varepsilon) < (p-\varepsilon) - \mu\varepsilon \end{cases}$. Si $\|f - g\|_r < \delta$ con δ suficientemente chico, entonces $g(p+\varepsilon) > p+\varepsilon$, $g(p-\varepsilon) < p-\varepsilon$, y $g'(x) > 1 \ \forall\, x \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$. Luego, $\exists\,!\ p_g \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$ tal que $g(p_g) = p_g$. Además, $|g'(p_g)| \neq 1$.

Otra forma:

Sea $F : \mathit{Diff}^r(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(g, x) = g(x) - x$. Entonces tenemos que $F(p, 0) = 0$ y $\partial_2 F|_{(f,p)} = f'(p) - 1 \neq 0$. Luego, por el teorema de la Función Implícita, existen $U(p)$,$\mathcal{U}(f)$ y $\varphi : \mathcal{U}(f) \to U(p)$ de clase C^r tales que $F(g, \varphi(g)) = 0$. □

Proposición 2.4.1. *Sea $g \in Diff^r(S^1)$ y $p \in Per(g)$. Entonces, existe g_1 C^r-cerca de g tal que p es un punto (periódico) hiperbólico de g_1.*

Demostración. Si p es hiperbólico de g, no hay nada que probar. Luego, sea α, $0 < \alpha < 1$ arbitrariamente chico tal que si definimos $\varphi : S^1 \to S^1$ verifica:

1. $\varphi(x) = 0$ si $x \notin U(p)$
2. $\varphi(p) = 0$
3. $\varphi'(p) = \alpha$
4. $|\varphi'(p)| \leq \alpha$

Entonces, esta φ está C^r-cerca de la función nula. Sea $g_1 = g + \varphi$. Luego, g_1 está C^r-cerca de g, y cumple $g_1(p) = g(p) + \varphi(p) = p$ y ${g_1}'(p) = g'(p) + \alpha \neq 1$. $\square$

Teorema 2.4.3. *Sea $g_1 \in Diff^r(S^1)$ tal que g_1 tiene un punto hiperbólico p. Entonces, existe g_2 C^r-cerca de g_1 tal que g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos.*

Demostración. Observemos primero que cualquier g_2 cerca de g_1 tiene un punto periódico hiperbólico de período igual al período de p según g_1 (llamémoslo k). Luego, sabemos que todos los puntos periódicos de g_2 tienen período k.
Sea G_1 levantamiento de g_1 y consideremos la función $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $H(x,t) = [T_t \circ G_1]^k(x) - r$, donde ${G_1}^k(p) = p + r$. Luego, $H(p,0) = 0$ y $\partial_t H \neq 0$ (ya que $G' > 0$) y entonces $S = H^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$. Consideremos $\pi_2 : S \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la segunda componente y sea t_0 valor regular (arbitrariamente cerca de 0) de $\pi_2|_S$. Tomemos $G_2(x) = T_{t_0} \circ G_1(x)$. Afirmamos que si ${G_2}^k(x_0) = r + x_0 \Longrightarrow {G_2}'(x_0) \neq 1$. En este caso, tenemos que $H(x_0, t_0) = 0$. Como $Ker(dH_{(x_0,t_0)}) = T_{(x_0,t_0)}S$ y t_0 es un valor regular, entonces $\partial_x H(x,t)|_{(x_0,t_0)} \neq 0$ pero $\partial_x H(x,t)|_{(x_0,t_0)} = ({G_2}^k)'(x_0) - 1$. Sea $g_2 = \pi \circ G_2$. Luego, g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos y esta arbitrariamente C^r cerca de g_1 (tomando t_0 arbitrariamente chico). $\square$

Corolario 2.4.1. *Existe $\mathcal{D} \subset Diff^r(S^1)$ (abierto y denso) tal que si $g \in \mathcal{D}$ entonces:*

1. $\rho(g) \in \mathbb{Q}$

2. *Todo punto periódico de g es hiperbólico.*

Demostración. abierto:
Sea g tal que $\rho(g) \in \mathbb{Q}$ y todo punto periódico de g es hiperbólico. Entonces g tiene una cantidad finita de órbitas periódicas $\mathcal{O}(p_1), \ldots, \mathcal{O}(p_k)$ que, por comodidad, supondremos puntos fijos. Para cada i, $\exists\ U_i(p_i)$ y $\mathcal{U}_i(g)$ tal que si $\widetilde{g} \in \mathcal{U}_i(g) \Longrightarrow \widetilde{g}$ tiene un (único) punto fijo en U_i y es hiperbólico. Podemos suponer que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por otra parte, existe $d > 0$ tal que si $x \notin \bigcup\limits_i U_i \Longrightarrow d(x, g(x)) > d \Longrightarrow \exists\ \widetilde{\mathcal{U}}(g)$ tal que si $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{U}}(g) \Longrightarrow d(x, \widetilde{g}) > \dfrac{d}{2}$, $\forall\ x \notin \bigcup\limits_i U_i$. Sea $\mathcal{U}(g) \subset \mathcal{U}_1(g) \cap \ldots \cap \mathcal{U}_k(g) \cap \widetilde{\mathcal{U}}(g)$. Luego, si $\widetilde{g} \in \mathcal{U}(g) \Longrightarrow \rho(\widetilde{g}) \in \mathbb{Q}$ y todos los puntos fijos (periódicos) de $\widetilde{g}$ son hiperbólicos.

Densidad:
Sea $f \in \mathit{Diff}^r(S^1)$. Entonces, por el C^r-closing lemma obtenemos una g tal que $\rho(g) \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists\ g_1$ tal que $\rho(g_1) \in \mathbb{Q}$ y g_1 tiene un punto periódico hiperbólico. Por Teorema 2.4.3, $\exists\ g_2$ tal que $\rho(g_2) \in \mathbb{Q}$ y g_2 tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos. En cada paso, la perturbación es arbitrariamente pequeña. $\square$

Definición 2.4.2. $f \in \mathit{Diff}^r(S^1)$ es llamado *Morse - Smale* si:

1. $\Omega(f) = Per(f)$
2. $\#Per(f) < \infty$
3. Todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos.

Corolario 2.4.2. *El conjunto de los difeos Morse-Smale en $Diff^r(S^1)$ es abierto y denso.*

Definición 2.4.3. Decimos que un difeo $f : S^1 \to S^1$ de clase C^r es C^r-*estructuralmente estable* si $\exists\ \mathcal{U}(f) \subset Diff^r(S^1)$ tal que toda $g \in \mathcal{U}(f)$ es conjugada a f.

Teorema 2.4.4. *Si $f : S^1 \to S^1$ es un difeo C^r Morse-Smale, entonces f es C^r-estructuralmente estable.*

Demostración. Por comodidad supondremos que $\rho(f) = 0$, i.e., f tiene puntos fijos $p_1, \ldots, p_k$. Luego, $\exists\ \mathcal{U}(f)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f) \Longrightarrow g$ tiene puntos fijos $p_1(g), \ldots, p_k(g)$ y $p_i(g) \underset{g \to f}{\longrightarrow} p_i$. Ahora, $S^1 \backslash \{p_1, \ldots, p_k\} = I_1 \cup \ldots \cup I_k$ y

$f(I_i) = I_i$, y también $S^1 \backslash \{p_1(g), \dots, p_k(g)\} = I_1(g) \cup \dots \cup I_k(g)$, con $g(I_i(g)) = I_i(g)$. Conjugamos $f|_{I_1}$ con $f|_{I_i(g)}$, $i = 1, \dots, k$ y se extiende esta conjugación a $p_1, \dots, p_k$, obteniendo una conjugación ente f y g. $\square$

2.5. Práctico 2

1. * Sea $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Probar que $\Omega(f) = Per(f)$.

2. Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo del círculo que revierte orientación ($grado(f) = -1$).

   a) Mostrar que f tiene exactamente dos puntos fijos

   b) Concluir que para cualquier x, $\omega(x)$ es un punto fijo o un punto periódico de período 2.

3. Sean $f : S^1 \to S^1$, $g : S^1 \to S^1$ dos homeomorfismos preservando orientación que conmutan. Probar que $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)(mod 1)$. Concluir que $\rho(f^n) = \rho(f)^n (mod 1)$.

4. Sean $f, g \in Hom_+(S^1)$ que son semiconjugados por h (es decir, $h : S^1 \to S^1$ continua, sobre y de grado 1 tal que $h \circ f = g \circ h$). Probar que $\rho(f) = \rho(g)$.

5. Sea $\rho : Hom_+(S^1) \to S^1$ la función que asocia a cada homeomorfismo creciente del círculo su número de rotación. Probar que ρ es una función continua. Sug: recordar que se cumple que

$$\left| \frac{f^{mn}(0)}{mn} - \frac{f^n(0)}{n} \right| \leq \frac{3}{n}.$$

6. * Sea $f : S^1 \to S^1$ conjugado a una rotación irracional. Probar que la conjugación es única a menos de una rotación, es decir, si h_1, h_2 son dos conjugaciones, entonces $h_1 = R_\beta \circ h_2$ para algún β.

7. Sea C el conjunto de Cantor usual en $[0, 1]$ y α un número irracional, $0 < \alpha < 1$. Encontrar $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ y $\Omega(f) = C$. Sug:

usar la función de Cantor y también usar (o demostrar?) que dados dos conjuntos numerables y densos A, B en $[0,1]$ entonces existe $h : [0,1] \to [0,1]$ homeomorfismo creciente tal que $h(A) = B$.

8. * Sea $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f)$ es irracional. Probar que $\mathcal{R}(f) = S^1$.

9. * Decimos que $f : M \to M$ es expansivo si exite $\alpha > 0$ tal que

$$\text{si } dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{Z} \text{ entonces } x = y.$$

Probar que no hay homeomorfismos expansivos en S^1. (Sug: discutir según número de rotación).

10. Sea $f : S^1 \to S^1$ difeomorfismo de clase C^r y sea p un punto fijo (o periódico de período k) de f.

    a) Probar que si $|f'(p)| < 1$ (respec. si $|(f^k)'(p)| < 1$) entonces es atractor, es decir, existe un entorno U de p tal que si $x \in U$ entonces $f^n(x) \in U \ \forall n \geq 0$ y $\omega(x) = p$ (respec. $f^{nk}(x) \in U \ \forall n \geq 0$ y $\omega(x) = \mathcal{O}(p)$.)

    b) Probar que si $|f'(p)| > 1$ (respec. si $|(f^k)'(p)| > 1$) entonces es repulsor, es decir, existe un entorno U de p tal si $x \in U$ entonces $f^{-n}(x) \in U \ \forall n \geq 0$ y $\alpha(x) = p$ (respec. $f^{-nk}(x) \in U \ \forall n \geq 0$ y $\alpha(x) = \mathcal{O}(p)$.)

11. * Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = x + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x) + \frac{1}{4\pi}\cos(2\pi x).$$

    a) Probar que F es el levantamiento de un difeomorfismo de S^1.

    b) hallar $\rho(F)$

    c) Hallar los puntos periódicos de F y determinar si son hiperbólicos. Clasificarlos, si corresponde, en atractores y/o repulsores.

    d) Croquizar la dinámica correspondiente en S^1.

12. Sea $f \in Diff^r(S^1)$ un difeomorfismo Morse-Smale (es decir, $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ y todos los puntos periódicos son hiperbólicos). Probar que los puntos periódicos se van alternando entre atractores y repulsores.

13. * Sea $f \in Diff^r(S^1)$ tal que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ y tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos.

    a) Probar que $\#Per(f) < \infty$.

    b) Probar que existe un entorno $\mathcal{U}(f)$ de f tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces $\#Per(g) = \#Per(f)$.

    c) Probar que f es estructuralmente estable.

14. Sea $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo con $\rho(f) = 0$ y sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantamiento con $\rho(F) = 0$. Sea $R_t : S^1 \to S^1$ la rotación de ángulo t y su levantamiento $T_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T_t(x) = x+t$. Consideremos la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $h(t) = \rho(T_t \circ F)$.

    a) Probar que h es continua, creciente y que $h([0,1]) = [0,1]$.

    b) Sea $r \in [0,1]$ un número irracional. Probar que $h^{-1}(r)$ es un único punto.

    c) Sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $h(t_0) = p/q$.

        1) Probar que si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(T_{t_0} \circ F)^q(x) < x+p$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in [t_0, t_0+\epsilon)$ se tiene que $h(t) = p/q$.

        2) Analogamente, si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(T_{t_0} \circ F)^q(x) > x+p$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in (t_0-\epsilon, t_0]$ se tiene que $h(t) = p/q$.

        3) Concluir que si $(R_{t_0} \circ f)^q \neq Id$ entonces $h^{-1}(p/q)$ es un intervalo (no trivial).

    d) Una escalera del diablo es una función $h : [0,1] \to [0,1]$ continua, sobre, monótona tal que existe un conjunto denso $A \subset [0,1]$ tal que para todo $a \in A$, $h^{-1}(a)$ es un intervalo. Demostrar que si $f : S^1 \to S^1$ homeo del circulo es tal que $(R_t \circ f)^q \neq Id$ para todo $q \geq 1$ y para todo $0 \leq t \leq 1$ entonces la funcion h definida al principio es una escalera del diablo.

Capítulo 3

Flujos en Superficies

En éste capítulo desarrollaremos la teoría de Poincaré-Bendixon y algunos resultados de flujos en superficies (variedades bidimensionales compactas y sin borde). Comenzaremos con el teorema del flujo tubular que nos dice como son las órbitas de un flujo en un entorno de un punto regular.

3.1. Flujo Tubular

Definición 3.1.1. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo y $p \in \Omega$. Una sección tranversal local en p es una subvariedad $\Sigma \subset \Omega$ tal que $p \in \Sigma$ y tal que existe $h : B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, inyectiva y propia donde B^{n-1} es una bola en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\Sigma = h(B^{n-1})$ y tal que para todo $x \in B^{n-1}$ se tiene que

$$\mathbb{R}^n = dh_x(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus X(h(x)).$$

Observamos en la definición anterior que necesariamente $X(p) \neq 0$.

Proposición 3.1.1. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo y sea $p \in \Omega$ tal que $X(p) \neq 0$. Entonces existe una sección transversal local en p.*

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base ortonormal de $X(p)^\perp$ y definimos $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ por $h(x_1, \ldots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\|q - p\| \leq \delta$ entonces $< X(p), X(q) > \neq 0$. Luego $\Sigma = h(B^{n-1}(0, \delta))$ es una sección trasversal local. $\square$

Teorema 3.1.1 (Flujo Tubular). *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo $C^r, r \geq 1$ y $p \in \Omega$ tal que $X(p) \neq 0$. Entonces existen $\epsilon > 0, \delta > 0$, un entorno $U(p)$ de p y un difeomorfismo C^r $H : U(p) \to (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$ tal que si $q \in U(p)$ entonces*

$$dH_q(X(q)) = (1, 0, \dots, 0).$$

En particular H es una C^r conjucación entre el flujo de X en U y el flujo del campo constante horizontal $Y = (1, 0, \dots, 0)$ en $(-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$.

Demostración. Sea $h : B^{n-1}(0, \eta) \to \mathbb{R}^n$ una sección transversal local en p con $h(0) = p$. Definimos $F : \mathbb{R} \times B^{n-1}(0, \eta) \to \Omega$ por

$$F(t, x) = \phi_t(h(x))$$

donde ϕ_t es el flujo de X. Ahora, $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}_{|(0,0)} = X(p)$ y $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}_{|(0,0)} = dh_0$. Por lo tanto $dF_{(0,0)}$ es un isomorfismo y luego F es un C^r difeomorfismo local. Luego existen $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que $F_{/(-\epsilon,\epsilon)\times B^{n-1}(0,\delta)}$ es un difeomorfismo de $(-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$ en $U = F((-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$ abierto que contiene a $F(0, 0) = p$. Observemos que si $F(t, x) = q$

$$dF_{(t,x)}(1, 0 \dots, 0) = \frac{d}{dt}F(t, x)_{|(t,x)} = \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)) = X(q).$$

Luego $H : U \to (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta),\ H = F^{-1}$ es el difeomorfismo buscado.

□

Corolario 3.1.1. *En las mismas condiciones del teorema anterior sea $\Pi : U(p) \to \Sigma$ definido como $\Pi(q) = \phi_{t(q)}(q)$ donde $t(q)$ es tal que $|t| < \epsilon$ y $\phi_t(q) \in \Sigma$. Entonces Π esta bien definida y es de clase C^r.*

Demostración.

$$\Pi = F \circ \Pi_2 \circ H.$$

□

3.1.1. Transformación de Poincaré

La tranformación de Poincaré es una herramienta muy importante que nos permite reducir (en ciertos casos) el estudio de un flujo al estudio de un difeomorfismo en un subvariedad de una dimensión menor que el espacio ambiente. Por ahora estudiaremos su definición en el caso mas general.

Teorema 3.1.2. *Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 y sea $\phi(t,x)$ su flujo. Sea p un punto regular y $t_0 \in \mathbb{R}$. Sean Σ_1 y Σ_2 secciones transversales por p y por $\phi(t_0,p)$ respectivamente. Entonces existe un entorno Σ_p en $\Sigma_1, \epsilon_0 > 0$ y una transformación $P : \Sigma_p \to \Sigma_2$ de clase C^1 (llamada Transformación de Poincaré) tal que para todo $y \in \Sigma_p$ existe un único $t(y) \in (t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0)$ de forma que $P(y) = \phi(t(y), y)$. La función $t : \Sigma_p \to (t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0)$ tal que $P(y) = \phi(t(y), y)$ es de clase C^1.*

Demostración. Utilizaremos las nociones del teorema del flujo tubular. Sea U entorno de $\phi(t_0,p)$ entorno del teorema del flujo tubular y $H : U \to (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta)$ como antes. Por continuidad existe Σ_p entorno de p en Σ_1 tal que $\phi(t_0,y) \in U$ para todo $y \in \Sigma_p$. Definimos $P = \Pi \circ \phi(t_0, .)$ y es claro que P es de clase C^1. Es claro además que para $y \in \Sigma_p$ existe un único $t(y) \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ de forma que $P(y) = \phi(t(y), y)$. Para ver que la función $t : \Sigma_p \to (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ es de clase C^1 consideremos ϵ_0 tal $\phi(t,y) \in U$ para todo $y \in \Sigma_p$ y para todo $t \in (t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0)$ y sea

$$\psi : \Sigma_p \times (t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0) \to \mathbb{R} \quad \psi = \Pi_1 \circ H \circ \phi$$

donde $\Pi_1 : (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0,\delta) \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la primera coordenada. Luego ψ es de clase C^1, $\psi(t_0,p) = 0$ y $\psi(t,y) = 0$ si y solamente si $t = t(y)$. Ahora $\frac{\partial \psi}{\partial t}_{|(t_0,p)} = \Pi_1 \circ DH_{\phi(t_0,p)} \circ X(\phi(t_0,p) \neq 0$ y por el teorema de la función implicíta $t(y)$ es de clase C^1.

□

Corolario 3.1.2 (Cajas de flujo)**.** *Sea X un campo C^1 y ϕ_t su flujo. Sea p un punto regular y $t_0 > 0$. Sean Σ_1 y Σ_2 dos secciones transversales por p y por $\phi(t_0,p)$. Sea $\Sigma_p = h(B^{n-1})$ donde $P : \Sigma_p \to \Sigma_2$ está definida y donde $\phi(t,y) \cap \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \emptyset$ para $0 < t < t(y)$. Entonces $B = \{\phi(t,y) : t \in \Sigma_p, 0 \leq t \leq t(y)$ es difeomorfo a $[0,1] \times B^{n-1}$ y el flujo en B es equivalente al flujo de Y=(1,0,...,0) en $[0,1] \times B^{n-1}$. Al B lo llamaremos caja de flujo.*

Demostración. Basta considerar $F : [0,1] \times B^{n-1} \to B$ dado por $F(t,x) = \phi(t.t(h(x)), h(x))$. □

Observación 3.1.1. Si estamos en un flujo de superficies y B es una caja de flujo (difeomorfa) a $[0,1] \times [-1,1]$ a los bordes $\{0\} \times [-1,1]$ y $\{1\} \times [-1,1]$ los llamaremos borde izquierdo y derecho respectivamente y a los bordes $[0,1] \times \{-1\}$ y $[0,1] \times \{1\}$ lo llamaremos borde inferior y superior respectivamente.

3.2. Teorema de Poincare-Bendixon

En esta sección estudiaremos campos y flujos en $\mathbb{R}^2$. La dimensión dos y la topologia del plano imponen ciertas restricciones sobre la dinámica:

Teorema 3.2.1 (Poincare-Bendixon). *Sea $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo C^1 y sea $p \in \Omega$ tal que $\omega(p)$ es un compacto en Ω. Supondremos que $\omega(p)$ contiene a lo sumo una cantidad finita de singularidades. Entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones se verifica:*

1. *$\omega(p)$ es una sola singularidad.*
2. *$\omega(p)$ es una única orbita periódica.*
3. *Si $\omega(p)$ tiene puntos regulares y singulares entonces para todo $q \in \omega(p)$ regular se tiene que $\alpha(q)$ y $\omega(q)$ son singularidades. Si x_0 es una singularidad en $\omega(p)$ entonces existen $q_1, q_2 \in \omega(p)$ regulares tales que $\omega(q_1) = x_0 = \alpha(q_2)$.*

La demostración está basada en una serie de lemas que demostraremos a seguir y en el siguiente conocido teorema de Jordan que enunciaremos sin demostración.

Teorema 3.2.2 (Jordan). *Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada. Entonces $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas.*

Observemos que como estamos en $\mathbb{R}^2$ una sección transversal local es la imagen de un intervalo y por lo tanto se puede orientar. En lo que sigue siempre que tomemos una sección transversal local la consideraremos orientada. Además siempre supondremos que esta sección transversal es parte de un abierto donde se aplica el teorema del flujo tubular.

Lema 3.2.1. *Sea $q \in \omega(p)$ un punto regular y Σ una sección transversal local por q. Entonces existe una sucesión $t_k \nearrow \infty$ tal que $\Sigma \cap \mathcal{O}^+(p) = \{\phi_{t_k}(p) : k = 1, 2, \dots\}$ y la sucesión $p_k = \phi_{t_k}(p) \subset \Sigma$ es monótona.*

Demostración. Observemos primeramente que $T = \{t \geq 0 : \phi_t(p) \in \Sigma\}$ es discreto (esto es consecuencia inmediata del flujo tubular) y T es infinito ya que $q \in \omega(p)$. Luego $T = \{t_k\}$ que crece a infinito.

Para demostrar la monoticidad basta mostrar que si $p_{i-1} < p_i$ según la orientación de Σ entonces $p_i < p_{i+1}$. Consideremos $\gamma = [p_{i-1}, p_i] \cup \{\phi_t(p) :$

$t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ donde $[p_{i-1}, p_i]$ es el intervalo en Σ determinado por los puntos p_{i-1}, p_i. Como γ es una curva simple cerrada divide a $\mathbb{R}^2$ en dos componentes A y B. Observemos que para $0 < s < \epsilon$ se tiene que $\phi_s(p_i)$ pertenece a una de estas componentes que llamaremos A. Esta componente tambien contiene a $\phi_s(x),\ x \in (p_{i-1}, p_i]$ con $0 < s < \epsilon$ y también a $\{x \in \Sigma : x > p_i\}$. Por otro lado la otra componente B contiene a $\phi_s(x),\ x \in [p_{i-1}, p_i)$ con $-\epsilon < s < 0$ y tambien a $\{x \in \Sigma : x < p_{i-1}\}$. Como $\{\phi_t(p) : t_i < t < t_{i+1}\} \cap \gamma = \emptyset$ deducimos que $\{\phi_t(p) : t_i < t < t_{i+1}\} \subset A$ y por lo tanto, como $p_{i+1} \notin [p_{i-1}, p_i]$ concluimos que $p_{i+1} > p_i$.

$\square$

Corolario 3.2.1. *Sea Σ una sección transversal local. Entonces $\omega(p) \cap \Sigma$ consiste a lo mas de un punto.*

Lema 3.2.2. *Sea $q \in \omega(p)$ regular. Si $\omega(q)$ contiene puntos regulares entonces q es periodico y $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$. Analogamente, si $\alpha(q)$ contiene puntos regulares entonces q es periodico y $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$.*

Demostración. Sea $z \in \omega(q)$ regular y sea Σ sección transversal local por z. Luego $\mathcal{O}^+(q) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Por otra parte $\mathcal{O}(q) \subset \omega(p)$ y por el corolario 3.2.1 deducimos que $z \in \mathcal{O}(q)$. Luego $\mathcal{O}(q) = \omega(q)$ y deducimos que q es periodico ya que necesariamente $q \in \mathcal{O}^+(q)$.

Probemos ahora que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$. Por el corolario 3.2.1, para cada sección transersal Σ_z por $z \in \mathcal{O}(q)$ tenemos que $\omega(p) \cap \Sigma_z = z$. Esto implica que (cubriendo $\mathcal{O}(q)$ con una cantidad finita de entornos tubulares) que $\mathcal{O}(q)$ es aislado en $\omega(p)$. Como $\omega(p)$ es conexo deducimos que $\omega(p) = \mathcal{O}(q)$.

$\square$

Lema 3.2.3. *Sea x_0 una singularidad tal que $x_0 \subsetneq \omega(p)$. Entonces existen $q_1, q_2 \in \omega(p)$ regulares tales que $\omega(q_1) = x_0 = \alpha(q_2)$.*

Demostración. Sea $B = B(x_0, \epsilon)$ tal que $sing(\omega(p)) \cap B = \{x_0\}$ y tal que $\omega(p) \cap B^c \neq \emptyset$. Sea $t_k \to \infty$ tal que $\phi_{t_k} \to x_0$. y consideremos $t_k^s = \text{mín}\{t > t_k : \phi_t(p) \notin B\}$ y $t_k^i = \text{máx}\{t < t_k : \phi_t(p) \notin B\}$. Es facil ver que

$$t_k^s \to_k \infty,\ t_k^i \to_k \infty,\ t_k^s - t_k \to_k \infty,\ t_k - t_k^i \to_k \infty.$$

Sea q_1 punto de acumulación de $\phi_{t_k^i}(p)$ y q_2 punto de acumulación de $\phi_{t_k^s}(p)$. Luego $q_1, q_2 \in \omega(p)$. Por otro lado $\mathcal{O}^+(q_1) \subset B$ y $\mathcal{O}^-(q_2) \subset B$. Por el lema

3.2.2 $\omega(q_1) \subset sing(\omega(p))$ concluimos que $\omega(q_1) = x_0$. Analogamente $\alpha(q_2) \subset sing(\omega(p))$ y entonces $\alpha(q_2) = x_0$. □

Demostración del teorema 3.2.1:

1. Si $\omega(p)$ solo contiene puntos singulares entonces $\omega(p)$ es una única singularidad ya que $\omega(p)$ es conexo y contiene a lo suma una cantidad finita de singularidades.

2. Si $\omega(p)$ solo contiene puntos regulares entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica por el lema 3.2.2

3. Supongamos que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares. Sea $q \in \omega(p)$ regular. Entonces, como $\omega(p)$ contiene puntos singulares, por el lema 3.2.2 y por el argumento en en comienzo de esta demostración deducimos que $\omega(q)$ es una sola singularidad. Analogamente $\alpha(q)$ tambien es una singularidad. El resto se deduce del lema 3.2.3

Observación 3.2.1. En realidad el teorema de Poincare-Bendixon es valido no solo en el plano sino en cualquier superficie donde sea válido el enunciado del teorema de Jordan. Estas superficies incluyen a la esfera y al cilindro en particular.

Una consecuencia del teorema de Poincare-Bendixon es sobre la existencia de singularidades. Si bien hay teoremas profundos (Poincare-Hofp) que relacionan la existencia de singularidades con la topologia, no nos basaremos en estos.

Corolario 3.2.2. *Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo que tiene una órbita periodica. Entonces X tiene una singularidad.*

Demostración. Supongamos que no hubiera singularidad. Si γ es una órbita periodica denotamos por $int(\gamma)$ la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ y por $\Gamma = \gamma \cup int(\gamma)$. Ordenaremos el conjunto $\mathcal{F}$ de las orbitas periódicas por inclusión:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_2 \subset \Gamma_1.$$

Sea $\mathcal{C}$ una cadena totalmente ordenada y sea $A = \cap_{\gamma \in \mathcal{C}} \Gamma$. Luego $A \neq \emptyset$ por la P.I.F. Ademas A es invariante por el flujo y como no hay puntos singulares, todo punto de A es regular. Sea $p \in A$. Deducimos que $\omega(p) \subset A$ es una orbita periódica mas grande que cualquier elemento de $\mathcal{C}$. Luego $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal por el lemma de Zorn. Luego existe γ orbita periódica sin ninguna otra órbita periódica en su interior. Sea $p \in int(\gamma)$. Luego $\alpha(p) = \omega(p) = \gamma$. Esto es absurdo por el lema 3.2.1 $\square$

Corolario 3.2.3. *Sea X un campo C^1 tangente en S^2. Luego X tiene una singularidad.*

3.3. Flujos en Superficies

En esta sección estudiaremos flujos en superficies y nos focalizaremos en la existencia de secciones transversales cerradas, flujos sin singularidades y en el estudio de conjuntos minimales.

3.3.1. Secciones transversales cerradas y flujos sin singularidades

En esta sección veremos condiciones para que un flujo tenga una sección transversal que es una curva cerrada simple y el mapa de Poincaré de primer retorno.

Teorema 3.3.1. *Sea X un campo C^1 en una superficie y sea ϕ_t su flujo. Sea p un punto recurrente no periódico. Entonces existe una sección transversal cerrada y que interesecta la órbita de p. Además la sección tranversal está en un entorno de la órbita de p.*

Demostración. Sea B entorno de p correspondiente al flujo tubular con Σ sección transversal (orientada). Sea Y vector unitario perpendicular a X en p compatible con la orientación de Σ. Definimos $Y(\phi(t,p))$ perpenedicular a $X(\phi(t,p)$ de forma que varíe continuamente con t. Si para $t > 0$, $\phi(t,p) \in \Sigma$, decimos que tiene la misma orientación que p si $Y(\phi(t,p)$ tiene orientación compatible con Σ. Decimos también que $\phi(t,p) \in \Sigma$ es una retorno proximo a p si $\phi(s,p)$ no intersecta el arco determinado por p y $\phi(t,p)$ para $0 < s < t$.

Supongamos que hay un retorno próximo a p con la misma orientación que p. En este caso podemos construir la sección transversal cerrada. Para ello consideremos una caja de flujo B_1 de p a $\phi(t,p)$ y de Σ a Σ tal que sus bordes en Σ sean disjuntos. Podemos suponer que $\phi(t,p) < p$ en la orientación de Σ (de lo contrario razonamos de la misma forma). Sea γ una curva que vista en B_1 une el angulo izquierdo de abajo con el angulo derecho superior. Como $\phi(t,p)$ es un

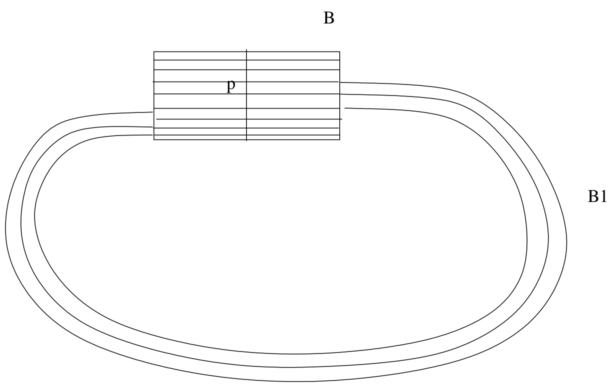

Figura 3.1:

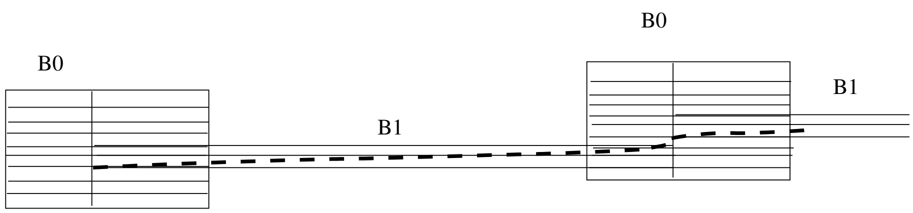

Figura 3.2:

retorno proximo, el arco en Σ determinado por γ no intersecta γ. Por otro lado γ intersecta la órbita de p en B_1. Luego es posible modificar en B de forma de obtener la sección transversal cerrada.

En el caso que todos los retornos proximos a p revertan orientación, consideremos $\phi(t_0, p)$ un retorno próximo a p y el siguiente retorno próximo $\phi(t_1, p)$ a p. y hacemos el mismo argumento pero con $p = \phi(t_0, p)$. $\square$

Teorema 3.3.2. *Sea S una superficie orientable y sea X un campo C^1 sin singularidades en S. Entonces X tiene una sección transversal cerrada.*

Demostración. Como S es orientable y X es un campo sin singularidades podemos considerar un campo Y de clase C^1 que es perpendicular a X. Sea p un punto recurrente para el flujo de Y. Si p es periódico, entonces $\mathcal{O}^Y(p)$ es una sección tranversal cerrada para X. Si p no es periódico, considremos una caja de flujo B para X en p y sea $\phi^Y(t_0, p)$ la primera vez que sale a B y $\phi^Y(t_1, p)$ la primera vez que retorna a B luego de $\phi^Y(t_0, p)$. Luego la curva $\{\phi^Y(t,p) : t_0 \leq t_1\}$ es una curva que es disjunta de de B y que une el borde superior de B con el borde inferior. Luego es posible cerrarla dentro de B de forma transversal a X. □

Si S no es orientable y X es un flujo sin singularides en S es posible también construir una tranversal cerrada, pero necesitamos el teorema de Poincaré-Hopf que nos dice que S es la botella de Klein.

Proposición 3.3.1. *Sea S la botella de Klein y sea X una campo sin singularidades en S. Entonces X admite una sección tranversal cerrada.*

Demostración. Sea p un punto recurrente para X. Si p no es periódico entonces ya vimos que podemos construir una sección transversal cerrada (luego veremos que en la botella de Klein es imposible tener un punto recurrente no periódico). Supongamos ahora que p es periódico y sea γ la órbita de p. Cortando S por γ obtenemos un cilindro cuyos dos bordes están representados por γ (pero con orientación contraria). Como el cilindro es orientable, podemos tomar Y campo en el cilindro perpendicular a X. Pero entonces el campo Y apunta hacia afuera en los dos bordes o apunta hacia adentro en los dos bordes. Supongamos que apunta hacia adentro (sino consideramos el opuesto de Y). Entonces el futuro de cualquier órbita está definido, es disjunto de γ y por Poincaré-Bendixon $\omega^Y(p)$ es una órbita periódica que es una sección tranversal para X disjunta de γ. Por lo tanto al pegar nuevamente a traves de γ obtenemos la sección transversal cerrada. □

Ahora estudiaremos que sucede cuando en una sección transversal el primer retorno de Poincaré no está definido en todo punto.

Teorema 3.3.3. *Sea S una superficie, X un campo en S y sea ϕ_t el flujo de X. Sea Σ una sección tranversal a X (no necesariamente cerrada). Sea $I \subset \Sigma$ un arco donde el primer retorno de Poincaré a Σ está definido y sea $p \in \partial I - \partial\Sigma$. Supongamos que la órbita futura de p no pasa por $\partial\Sigma$. Entonces $\omega(p)$ es una singularidad.*

Demostración. Sea r un punto de I y sea q un punto entre r y p. El retorno de Poincaré esta definido en el arco $[r, q]$ en Σ y sea B_0 la caja de flujo correspondiente hasta el primer retorno (el borde izquierdo y derecho podrian tener intersección, pero ambos están en Σ). Sea $\eta > 0$ el ínfimo de las las longitudes de la curvas en B_0 uniendo el borde superior con el inferior.

Por otra parte, supongamos que $\omega(p)$ no es una singularidad y sea $z \in \omega(p)$ un punto regular y sea Σ_1 una sección transversal por z de longitud menor que $\eta/2$ y disjunta de Σ. Sean $\phi(t_1, p), \phi(t_2, p)$ y $\phi(t_3, p)$ tres retornos proximos a q en Σ_1 y consecutivos. Estos tres puntos en Σ_1 determinan dos arcos. Observar que si $y \in I$ está muy proximo a p necesarimante tiene que cortar alguno de estos dos arcos. Consideremos entonces este arco, que llamaremos γ y el pedazo de orbita de p que une los extremos de γ obteniendo así una curva simple cerrada $\mathcal{C}$.

Como la órbita futura de p no corta a Σ ni pasa por el borde de Σ tenemos que si $y \in I$ está muy cerca de p entonces la órbita futura de y corta γ antes de retornar a Σ. Fijemos un tal y y consideremos la caja de flujo B_1 detereminada por el arco $[r, y]$ en Σ hasta su primer retorno a Σ. Observar que los bordes izquierdo y derecho de B_1 están en Σ y que $B_0 \subset B_1$ y por lo tanto cualquier curva en B_1 que una el borde superior con el borde inferior tiene longitud mayor que η.

Ahora, tenemos que $\mathcal{C} \cap B_1 \neq \emptyset$ pues la órbita por y corta $\mathcal{C}$ antes de retornar a Σ. Por otra parte, como p no retorna a Σ tenemos que $\mathcal{C} \cap B_1 = \gamma \cap B_1$. Pero γ no interesecta los bordes izquierdo y derecho de B_1 y ademas es transversal al flujo, entonces una componente conexa de $\gamma \cap B_1$ une el borde superior con el borde inferior. Luego γ tiene longitud mayor que η. Por otra parte, $\gamma \subset \Sigma_1$ que tiene longitud menor que $\eta/2$, absurdo.

$\square$

Corolario 3.3.1. *Sea X un flujo sin singularidades en la superficie S (compacta y conexa) y sea Σ una sección transversal cerrada. Entonces el retorno de Poincaré en Σ no está definido para ningún punto o está definido en todo Σ y Σ es una sección tranversal global (es decir, toda órbita intersecta Σ).*

Demostración. Supongamos que existe $p \in \Sigma$ tal que $\mathcal{O}^+(p)$ intesecta a Σ. Como X no tiene singularidades tenemos que el primer retorno de Poincaré $P : \Sigma \to \Sigma$ está definido en todo Σ. Por otra parte $A = \cup_{y\in\Sigma}\{\phi_t(y) : t \in \mathbb{R}\}$ es abierto. Por otra parte $A = \cup_{y\in\Sigma}\{\phi_t(y) : 0 \leq t \leq t(y)\}$ que es compacto. $\square$

Teorema 3.3.4. *Sea S una superficie, X un campo C^1 sin singularidades en S que tiene un punto recurrente no periódico. Entonces $S = \mathbb{T}^2$ y el flujo $\phi(t, .)$ de*

X es equivalente a la suspensión de un difeomorfismo del círculo que preserva orientación con número de rotación irracional. En particular si el flujo de X es minimal entonces es equivalente al flujo lineal irracional.

Demostración. Como p es recurrente no periodico, tenemos una sección transversal cerrada Σ que es difeomorfa a S^1. Esta sección transversal corta la órbita de p y por lo tanto hay puntos de Σ que retornan a Σ. Por el Corolario anterior el primer retorno a Σ está definido en todo Σ. Sea $P : \Sigma \to \Sigma, P(y) = \phi(t(y), y)$ la trasformación de Poincaré (que es un difeomorfismo $P : S^1 \to S^1$). Ahora, P necesariamente tiene que preservar orientación pues tiene punto recurrente no periódico. Además, el número de rotación de P es irracional.

Sea ψ_t el flujo suspensión de $P : S^1 \to S^1$ en $\mathbb{T}^2 = [0, 1] \times S^1_{/\sim}$ Sea $H : [0, 1] \times S^1_{/\sim} \to S$ dada por $H(t, y) = \phi(t.t(y), y)$. Luego H está bien definida, es un homeo y envía óribtas de ψ_t en órbitas de ϕ_t.

Finalmente, si ϕ_t es minimal, entonces $P : S^1 \to S^1$ es mininal y luego P es conjugado a una rotación irracional. Como la suspensión de una rotación irracional es el flujo lineal irracional tenemos lo que queremos.

□

Corolario 3.3.2. *Si S es la botella de Klein y X es una campo sin singularidades en S entonces el omega-límite de cualquier punto es una órbita periódica.*

Observación 3.3.1. No es cierto que un flujo sin singularidades en $\mathbb{T}^2$ (ni de la botella de Klein) sea equivalente a la suspensión de un homeo en S^1 pues este flujo no necesariamente tiene una sección tranversal global. Si hay una “componente de Reeb”no es posible tener una transversal global.

3.3.2. Conjuntos minimales y el Teorema de Schwarz

Anteriormente vimos como ejemplo de flujos minimales el flujo lineal irracional. Utilizando los ejemplos de Denjoy en S^1 podemos construir un flujo en $\mathbb{T}^2$ que tiene un conjunto minimal no trivial y que no es todo el toro.

Podemos asimismo contruir conjuntos minimales no triviales en otras superficies. Para ello consideremos la suspensión de un ejemplo de Denjoy en S^1, denotemos por X este flujo y tomemos p un punto errante y consideremos una caja de flujo en un entorno de p de forma tal que la caja de flujo tambien está en el conjunto errante. En esta caja se puede modificar X de forma que tenga un

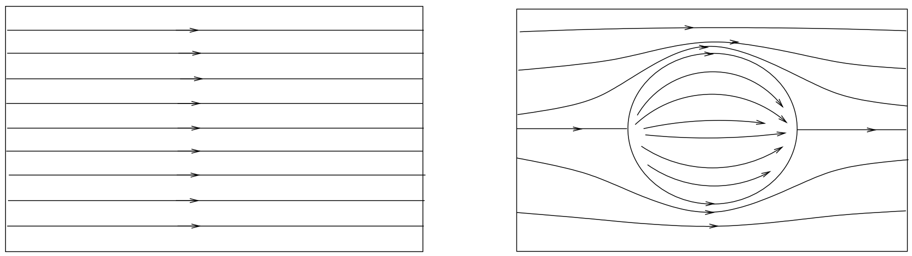

Figura 3.3:

disco invariante (ver dibujo). Luego obtenemos un flujo en el toro que tiene un minimal no trivial y un disco invariante D y disjunto del minimal. Consideramos ahora dos copias $\mathbb{T}^2 - D$ con el flujo restringido. Identificando en estos dos toros menos un disco los bordes de los mismos, obtenemos entonces un bitoro y un flujo en el bitoro que tiene dos minimales no triviales. De la misma forma, se pueden construir en una superficie orientable de género g un flujo que tiene g minimales no triviales.

Por otra parte estos ejemplos están basados en la suspensión de un ejemplo de Denjoy que sabemos que no puede ser de clase C^2. Es decir los ejemplos que acabamos de construir son siempre campos (o flujos) de clase C^1 pero no C^2. Pero esto no es un hecho de la construcción sino que no es posible:

Teorema 3.3.5 (Teorema de Schwarz)**.** *Sea S una superficie compacta y sea X un campo en S de clase C^2 y sea M un conjunto minimal del flujo ϕ_t de X. Entonces M es una y solo una de la siguientes posilibilidades:*

- *M es una singularidad*
- *M es una órbita periódica*
- *$M = S$ y en ese caso $S = \mathbb{T}^2$ y el flujo es equivalente al flujo lineal irracional.*

Demostración. Supongamos que M no es ninguna de estas posibilidades. En particular M es un cerrado con interior no vacío. Sea $p \in M$ y sea Σ una sección tranversal local por p que es un arco C^2 y tal que $\partial\Sigma \cap M = \emptyset$. Sea $K = M \cap \Sigma$ y observamos que K es un conjunto cerrado con interior vacío. Si $x \in K$ tenemos definido el primer retorno de Poincaré de x a Σ. Luego, existe un entorno W_1 de K en Σ donde la transformación de Poincaré $P : W_1 \to \Sigma$ de primer retorno está definida y es de clase C^2. Sea $W \subset \overline{W} \subset W_1$. Observamos que existe $m > 0, .m' > 0$ tal que $|P'(x)| > m$ y $|P''(x)| < m'$ para todo $x \in W$.

Sea ahora V un entorno de K tal que $P(V) \subset W$. Sea $\epsilon = dist(K, \partial V)$. Observemos que hay una cantidad finita de componentes conexas de $V - K$ cuya longitud es mayor que $\epsilon/2$. Sea $x \in K$. Como M no es una óbita periódica, tenemos que existe n_0 tal que $P^n(x)$ es borde de una componente de $V - K$ de longitud menor que $\epsilon/2$ para todo $n \geq n_0$. Sea $a = P^{n_0}(x)$ y sea I la componente conexa de $V - K$ que tiene a en su borde. Luego $P^n(I)$ está definida para todo $n \geq 0$ y $P^n(I) \cap P^m(I) = \emptyset$ si $n \neq m$. Luego $\sum_{n \geq 0} |P^n(I)| < \infty$.

Por Lema 2.3.2 del capítulo 2, tenemos que existe un arco $T \subset V$ que contiene a I (y al punto a en su interior) tal que $|P^n(T)| \leq 2|P^n(I)|$ siempre y cuanto $P^n(T)$ esté definido, pero como $|P^n(T)| < \epsilon$ tenemos que está definido para todo $n \geq 0$. Pero entonces, como $P^n(a)$ acumula en a por ser M minimal, existe un n_1 tal que $\overline{P^{n_1}(T)} \subset T$ y por lo tanto existe $q \in T$ tal que $P^{n_1}(q) = q$. Luego la órbita de ϕ_t por q es peridódica. Por otro lado, como $|P^n(T)| \to 0$ tenemos que $P^{kn_1}(a) \to_k q$ y deducimos que $q \in M$. Como M es minimal tenemos que M es una órbita periódica, lo cual supusimos que no era así.

$\square$

Capítulo 4

Hiperbolicidad: una breve introducción

En este capítulo consideraremos campos $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definidos en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y la correspondiente ecuación $\dot{x} = X(x)$. El campo será siempre de clase C^1 y supondremos que define un flujo ϕ_t en Ω que es de clase C^1 también (en particular supondremos que las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$).

4.1. Estabilidad de singularidades

Definición 4.1.1. Sea X un campo en Ω. Un punto $x_0 \in \Omega$ es una singularidad (o punto de equilibrio) si $X(x_0) = 0$. Si $X(q) \neq 0$ diremos que q es regular.

Observemos que en ese caso si ϕ_t es el flujo asociado entonces $\phi_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1.2. Sea x_0 una singularidad del campo X. Decimos que x_0 es *estable* (según Lyapunov) si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $\|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Si además se cumple que existe δ_0 tal que si $\|x - x_0\| < \delta_0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = x_0$$

diremos que x_0 es *asintóticamente estable.*

Daremos a continuación condiciones suficientes debidas a Lyapunov para garantizar que un punto de equilibrio es estable. Por simplicidad, supodremos siempre que el punto de equilibrio es $x_0 = 0$.

Sea $V : U \to \mathbb{R}$ una función definida en U entorno de una singularidad. Definimos, en caso de que exista,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(x))_{|t=0}.$$

Observar que si V es de clase C^1 entonces $\dot{V}$ existe y además no es necesario conocer el flujo ϕ_t para conocer $\dot{V}$ ya que en ese caso

$$\dot{V}(x) =< gradV(x), X(x) > .$$

Definición 4.1.3. Una función $V : U \to \mathbb{R}$ donde U esta definida en un entorno U de la singularidad $x_0 = 0$ es una función de Lyapunov si

1. V es continua
2. Existe $\dot{V}(x)$ para todo $x \in U$.

Ejemplo: Consideremos la siguiente ecuación en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 \\ \dot{y} &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

Y sea $V(x, y) = x^2 + y^2$. Entonces

$$\dot{V}(x, y) =< (2x, 2y), (-y + x^2, x + y - y^3) >= 2x^3 + 2y^2 - 2y^4.$$

Teorema 4.1.1. *Sea X un campo con $X(0) = 0$. Si existe una funcion de Lyapunov $V : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de la singularidad $x_0 = 0$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ $\forall x \neq 0$ y $\dot{V}(x) \leq 0$ entonces el punto de equilibrio 0 es estable*

Demostración. Consideremos $\epsilon > 0$ y supondremos sin perdida de generalidad que $\overline{B}(0, \epsilon) \subset U$. Sea $m = min\{V(x) : \|x\| = \epsilon\}$ que existe pues V es continua y $\partial\overline{B}$ es compacto. Además $m > 0$. Por otro lado como $V(0) = 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $V(x) < m$. Sea entonces $x, \|x\| < \delta$ y probemos que $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$ para cualquier $t \geq 0$. Razonando por contradicción supongamos que para algún $t > 0$ se tiene que $\phi_t(x) \geq \epsilon$. Sea $t_0 = \text{mín}\{s \in [0, t], \phi_s(x) \geq \epsilon\}$. Tenemos entonces que $V(\phi_{t_0}(x) \geq m$. Por otro lado

$$V(\phi_{t_0}(x)) - V(x) = \int_0^{t_0} \dot{V}(\phi_s(x))ds \leq 0$$

y por lo tanto $V(\phi_{t_0}(x) \leq V(x) < m$ lo que es una contradicción.

$\square$

Ejemplos:

1. Consideremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x) \end{aligned}$$

   Si tomamos $V(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x)$ en un entorno de $(0,0)$ tenemos que $V > 0$ y $V(0,0) = 0$. Además

$$\dot{V}(x,y) =< (\sin(x), y), (y, -\sin(x) >= 0$$

   y por lo tanto $(0,0)$ es estable.

2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2yx - x^3 \\ \dot{y} &= -x^2 \end{aligned}$$

   Si tomamos $V(x,y) = x^2 + 2y^2$ entonces

$$\dot{V}(x,y) =< (2x, 4y), (2yx - x^3, -x^2) >= -2x^4$$

   y por lo tanto $(0,0)$ es estable.

Teorema 4.1.2. *Sea X un campo con $X(0) = 0$. Si existe una funcion de Lyapunov $V : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de la singularidad $x_0 = 0$ tal que $V(0) = 0,\ V(x) > 0\ \forall x \neq 0$ y $\dot{V}(x) < 0\ \forall x \neq 0$ entonces el punto de equilibrio 0 es asintoticamente estable*

Demostración. Ya sabemos por el teorema anterior que 0 es estable. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$. Probemos que si $\|x\| < \delta$ entonces $\phi_t(x) \to 0$. Sabemos que $V(x) > 0$ y por la hipotesis concluimos que $V(\phi_t(x))$ es estricamente decreciente. Luego existe $\lim_{t\to\infty} V(\phi_t(x)) = a \geq 0$. Sea $y \in \omega(x) \subset \overline{B}(x,\epsilon)$ (esto último por ser estable). Luego $V(\phi_t(y)) = \lim_k V(\phi_{t+t_k}(x)) = a$ y por lo tanto V es constante a lo largo de la trayectoria de y y la única posibilidad es que $a = 0$ y por lo tanto $y = 0$. $\square$

Ejemplo: Consideremos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3\end{aligned}$$

Si tomamos $V(x,y) = x^2 + y^2$ entonces

$$\dot{V}(x,y) =< (2x,2y), (-y - x^3, x - y^3) >= -2x^4 - 2y^4$$

y por lo tanto $(0,0)$ es asintoticamente estable.

La condición del teorema 4.1.2 en realidad es necesaria, como dice el teorema que sigue que enunciaremos sin demostración,

Teorema 4.1.3 (Massera)**.** *Sea $\dot{x} = f(x)$ un campo C^1 y x_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable. Entonces existe una función $V : U(x_0) \to \mathbb{R}$ continua con $V(x) \geq 0$ y $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ con $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq x_0$.*

4.2. Campos lineales y aproximación lineal

Consideremos $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y el campo asociado $\dot{x} = Ax$ No entraremos en detalle del estudio de las soluciones de un campo lineal. Sin embargo comenzaremos viendo que el flujo de $\dot{x} = Ax$ es lineal:

Proposición 4.2.1. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y sea ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$. Entonces ϕ_t es lineal*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. Y considermos $\psi(t) = a\phi_t(x) + b\phi_t(y)$. Luego

$$\dot{\psi}(t) = a\dot{\phi}_t(x) + b\dot{\phi}_t(y) = aA\phi_t(x) + bA\phi_t(y) = A(a\phi_t(x) + b\phi_t(y)) = A\psi(t)$$

y por lo tanto $\psi(t)$ es solución. Ademas $\psi(0) = ax + by$ Luego $\psi(t) = \phi_t(ax + by)$ □

Observación 4.2.1. Si ϕ_t es el flujo de $\dot{x} = Ax$ entonces $\psi_t = \phi_{-t}$ es el flujo de $\dot{x} = -Ax$.

Estudiaremos la estabilidad del origen como punto de equilibrio de $\dot{x} = Ax$. Demostraremos que si los valores propios de A tienen parte real negativa entonces 0 es asintoticamente estable. Para ello buscaremos una funcion de Lyapunov adecuada.

Sea M una matriz simétria y consideremos la forma cuadrática $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) =< Mx, x >$. Veremos quien es $\dot{V}$ respecto del campo Ax.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= < M\dot{x}, x > + < Mx, \dot{x} >=< MAx, x > + < Mx, Ax > \\
&= < MAx, x > + < A^tMx, x > \\
&= < (MA + A^tM)x, x >= 2 < Mx, Ax >= 2 < MAx, x >
\end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{S}$ es el espacio de las matrices simétrica $n \times n$.

Lema 4.2.1. *Sea A una matriz invertible tal que todos sus valores propios tienen parte real negativa. Entonces, la transformación lineal $L_A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definida como*

$$L_A(M) = MA + A^tM$$

es un isomorfismo.

Demostración. Basta demostrar que $Ker(L_A) = \{0\}$. Sea M tal que $MA + A^tM = 0$. Luego $MA = -A^tM$. Observemos que si v es un vector propio con valor propio asociado λ se tiene que $\lambda Mv = MAv = -A^tMv$ y por lo tanto $A^tMv = -\lambda Mv$. Si $Mv \neq 0$ entonces Mv es vector propio de A^t con valor propio $-\lambda$. Como los valores propios de A y A^t son iguales llegamos a un absurdo pues en este caso $-\lambda$ tendria parte real positiva. Por lo tanto $Mv = 0$. Utilizaremos esta idea para mostrar que $M = 0$.

Como $MA = -A^tM$ concluimos que $MA^k = (-1)^k(A^t)^kM$ y por lo tanto

$$M(A - \lambda I)^k = (-1)^k(A^t + \lambda I)^kM.$$

Sea $\mathcal{B}$ una base de jordan de A y sea $v \in \mathcal{B}$. Resulta que existe una valor propio λ de A y $k \geq 1$ tal que $(A - \lambda I)^kv = 0$. Luego

$$0 = M(A - \lambda I)^kv = (-1)^k(A^t + \lambda I)^kMv.$$

Si fuera $Mv \neq 0$ concluiríamos que $-\lambda$ sería valor propio de A^t (y por lo tanto de A) con parte real positiva lo que es absurdo. Luego $Mv = 0$ cualquiera se $v \in \mathcal{B}$ y por lo tanto, como $\mathcal{B}$ es base, $M = 0$.

□

Lema 4.2.2. *Sea A con todos sus valores propios con parte real negativa y sea N una matriz simétrica definida negativa. Entonces $M = L_A^{-1}(N)$ es definida positiva.*

Demostración. Observemos primero que $A \to L_A$ y $A \to L_A^{-1}$ son continuas con A. Por otro lado observamos que si $L_A(M) = N$ con N definida negativa entonces 0 no es valor propio de M ya que de lo contrario, si $Mv = 0$ entonces $0 = 2 < Mv, Av >=< Nv, v >< 0$.

Tambien observemos que $L_{-I}(N) = M_{-I}$ es definida positiva ya que $-2 < M_{-I}x, x >= 2 < M_{-I}x, -x >=< Nx, x >< 0$ si $x \neq 0$.

De ahora en adelate fijamos N definida negativa. Sea $A_s, s \in [0, 1]$ una isotopía tal que $A_0 = -I,\ A_1 = A$ y A_s siempre tiene sus valores propios con parte real negativa. Sea $L_s = L_{A_s}$ y $M_s = L_s^{-1}(N)$. Luego M_s depende continuamente con s, M_s no tiene valor propio 0 para todo $s \in [0, 1]$ y M_0 es definida positiva. Concluimos que $M_1 = L_A^{-1}(N)$ es definida positiva pues tiene todos sus valores propios positivos.

□

Teorema 4.2.1. *Sea A con valores propios con parte real negativa. Entonces* 0 *es asintoticamente estable de $\dot{x} = Ax$.*

Demostración. Por los lemas anteriores encontramos $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma cuadrática definida positiva $V(x) =< Mx, x >$ con $\dot{V}(x) =< (MA + A^t M)x, x >$ definida negativa. Por el teorema 4.1.2 concluimos el resultado. □

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & x & + & 2y \\ \dot{y} & = & -3x & - & 3y \end{array}$$

Entonces $(0, 0)$ es asintoticamente estable ya que los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

tiene parte real negativa.

Mostraremos ahora que si A tiene todos sus valores propios con parte real negativa entonces tenemos un comportamiento exponencial del flujo.

Teorema 4.2.2. *Sea A tal que todos sus valores propios tiene parte real negativa y sea ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$. Entonces existe $C > 0$ y $a > 0$ tal que si $x \neq 0$ entonces*

$$\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\| \ \forall \ t \geq 0.$$

Demostración. Sea $V(x) =< Mx, x >$ función de Lyapunov cuadrática asociada a A. Como ϕ_t es lineal y V es cuadratica tenemos que

$$V(\phi_t(x)) = b^2 V(\phi_t(\frac{x}{b}))$$

para cualquier $b \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{E} = \{x : V(x) = 1.\}$ Como $V(\phi_t(x))$ es estrictamente decreciente por ser $\dot{V}$ definida negativa tenemos que existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $x \in \mathcal{E}$ entonces $V(\phi_1(x)) < \lambda$. Por lo tanto

$$V(\phi_1(x)) < \lambda V(x)$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto para $n \geq 0$ deducimos que $V(\phi_n(x)) < \lambda^n V(x)$. Sea $t \geq 0$ y escribimos $t = n + r$ con $0 \leq r < 1$. Luego $V(\phi_t(x)) < \lambda^t \frac{1}{\lambda} V(x)$. Como V es cuadrática definida positiva, existe d y D positivos tal que

$$d\|x\|^2 \leq V(x) \leq D\|x\|^2.$$

Por lo tanto

$$d\|\phi_t(x)\|^2 \leq V(\phi_t(x)) < \lambda^t \frac{D}{\lambda}\|x\|^2.$$

Haciendo $C = \sqrt{\frac{D}{\lambda d}}$ y $-a = \frac{1}{2}\log\lambda$. se tiene el resultado.

□

Corolario 4.2.1. *Sean A y ϕ_t como en el teorema anterior. Entonces existen C_1 y $a > 0$ tal que*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \geq C_1 e^{at}\|x\| \ \forall \ t \geq 0.$$

Demostración. Como

$$\|x\| = \|\phi_t(\phi_{-t}(x))\| < Ce^{-at}\|\phi_{-t}(x)\|$$

y por lo tanto

$$\|\phi_{-t}(x)\| > \frac{1}{C}e^{at}\|x\|.$$

□

Corolario 4.2.2. *Sean A, ϕ_t como en el teorema anterior y sea V una forma cuadrática asociada a $\dot{x} = Ax$. Entonces. si $x \neq 0$,*

$$\lim_{t \to \infty} V(\phi_t(x)) = 0 \quad \lim_{t \to -\infty} V(\phi_t(x)) = \infty.$$

Corolario 4.2.3. *Sea B una matriz tal que todos sus valores propios tengas parte real positiva y sea ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Bx$. Entonces existe $C > 0$ y $a > 0$ tal que si $x \neq 0$ entonces*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\| \; \forall \; t \geq 0$$

y

$$\|\phi_t(x)\| \geq C_1 e^{at}\|x\| \; \forall \; t \geq 0.$$

Obtendremos ahora resultados sobre el punto de equilibrio x_0 de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ a partir de la aproximación lineal en dicho punto.

Teorema 4.2.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo y x_0 una singularidad, es decir, $f(x_0) = 0$. Sea $A = df_{x_0}$. Entonces, si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, x_0 es un punto de equilibrio asintoticamente estable de $\dot{x} = f(x)$.*

Demostración. Mediante un cambio de coordenadas podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_0 = 0$. El campo puede escribirse como

$$f(x) = Ax + R(x) \text{ donde } \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0.$$

La idea es mostrar que la función de Lyapunov cuadrática para $\dot{x} = Ax$ también sirve para $\dot{x} = f(x)$. Consideremos entonces $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) =< Mx, x >$ donde M es definida positiva y $N = MA + A^t M$ es definida negativa. Como N es definida negativa existe $a > 0$ tal que $< Nx, x > \leq -a\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\eta > 0$ tal que

$$2\|M\|\eta < a.$$

Existe $\epsilon > 0$ tal que si $\|x\| \leq \epsilon$ entonces

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} < \eta.$$

Veremos que $\dot{V}$ para el campo $f(x)$ es negativa en $B(0, \epsilon)$ con lo cual aplicando el teorema 4.1.2 concluiríamos la demostración. Supondremos en lo que sigue que $0 \neq \|x\| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= < M\dot{x}, x > + < Mx, \dot{x} > \\
&= < Mf(x), x > + < Mx, f(x) > \\
&= < M(Ax + R(x)), x > + < Mx, Ax + R(x) > \\
&= < (MA + A^t M)x, x > +2 < MR(x), x > \\
&\leq -a\|x\|^2 + 2\|M\|\|R(x)\|\|x\| \\
&= \|x\|^2 \left(-a + 2\|M\| \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \right) \\
&< \|x\|^2 \left(-a + 2\|M\|\eta \right) < 0.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo: El origen es asintoticamente estable de

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -x \quad +x^3 \quad y^2 \\
\dot{y} &= -2y \quad 3x^2 y
\end{aligned}$$

ya que su parte lineal es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4.2.1. Campos lineales hiperbólicos

Teorema 4.2.4. *Sea A tal que todos sus valores propios tengan parte real negativa. Entonces los flujos de $\dot{x} = Ax$ y de $\dot{x} = -x$ son conjugados.*

Demostración. Denotemos por ϕ_t el flujo de $\dot{x} = Ax$ y por ψ_t el flujo de $\dot{x} = -x$. Observemos que si $x \neq 0$ entonces existe un $t = t(x)$ tal que $\|\psi_t(x)\| = 1$, es decir, la trayectoria por x corta a la esfera unitaria S^n en un único punto ($\psi_t(x) = e^{-t}x$).

Sea $V(x) =< Mx, x >$ función de Lyapunov asociada a $\dot{x} = Ax$ con M definida positiva y $N = MA + A^t M$ definida negativa. Demostremos que si $x \neq 0$ entonces existe un único $t = t(x)$ tal que $V(\phi_t(x)) = 1$, es decir, la trayectoria por x intersecta al elipsoide $\mathcal{E} = \{x :< Mx, x >= 1\}$ en un unico punto. Por el corolario 4.2.2 sabemos que existe algún $t = t(x)$ tal que $V(\phi_t(x)) = 1$ y por otro lado como $V(\phi_t(x))$ es una función estrictamente decreciente ese $t = t(x)$ es único.

Sea $h : S^n \to \mathcal{E}$ un homeomorfismo cualquiera. Definiremos una conjugación $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entre ϕ y ψ. Si $x \neq 0$ sea t_x tal que $\psi_t(x) \in S^n$ y definimos

$$H(x) = \phi_{-t_x} \circ h \circ \psi_{t_x}(x).$$

Definiendo $H(0) = 0$ es facil ver que H es un homeo que conjuga los flujos.

□

Corolario 4.2.4. *Sean A y B matrices con todos los valores propios con parte real negativa, entonces los flujos de $\dot{x} = Ax$ y de $\dot{x} = Bx$ son conjugados.*

Definición 4.2.1. Decimos que un campo lineal $\dot{x} = Ax$ es hiperbólico si A no tiene valores propios con parte real nula.

Teorema 4.2.5. *Sea $\dot{x} = Ax$ un campo lineal hiperbólico y sea ϕ_t el flujo correspondiente. Entonces existen subespacios E^s y E^u y constantes $C > 0$ y $a > 0$ tales que*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $\phi_t(E^s) = E^s$ *y* $\phi_t(E^u) = E^u$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $x \in E^s$ *entonces* $\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ *para* $t \geq 0$.
4. *Si* $x \in E^u$ *entonces* $\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ *para* $t \geq 0$.

Demostración. Sea E^s la suma de todos los subespacios generalizados de A asociados a valores propios con parte real negativa y E^u el correspondiente a los valores propios con parte real positiva. Entonces $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Por otra parte como $A(E^s) = E^s$ y $A(E^u) = E^u$ deducimos la invariancia por el flujo de estos subespacios. Ademas $A^s = A/E^s$ da un campo lineal con todos los valores propios negativos y $A^u = A_{/E^u}$ da un campo con todos los valores propios positivos concluimos el resultado de los corolarios 4.2.2 y 4.2.1. □

Definición 4.2.2. Sea $\dot{x} = Ax$ campo lineal hiperbólico. Se lama *indice (de Morse)* de A a la dimensión del subespacio E^s. Al subespacio E^s (respec. E^u) lo llamaremos subespacio estable (respec. inestable). Diremos que el origen es *atractor* si $E^s = \mathbb{R}^n$, *repulsor* si $E^u = \mathbb{R}^n$ y *silla* en los demas casos.

Teorema 4.2.6. *Sean $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Bx$ dos campos hiperbólicos que tienen el mismo indice y sean ϕ_t y ψ_t los respectivos flujos. Entonces ϕ_t y ψ_t son conjugados.*

Demostración. Sean E^s_A y E^s_B los subespacios estables de ϕ_t y ψ_t respectivamente. Como $dimE^s_A = dimE^s_B$ concluimos que $\phi^s_t = \phi_t/E^s_A$ y $\psi^s_t = \phi_t/E^s_B$ son conjugados por $h^s : E^s_A \to E^s_B$ en base al corolario 4.2.4

Analogamente $\phi^u_t = \phi_t/E^u_A$ y $\psi^u_t = \phi_t/E^u_B$ son conjugados por $h^u : E^u_A \to E^u_B$.

Definiendo $h : \mathbb{R}^n = E^s_A \oplus E^u_A \to \mathbb{R}^n = E^s_B \oplus E^u_B$ por $h = h^s \oplus h^u$ tenemos que h es una conjugación (por la linealidad de los flujos).

□

Concluimos esta sección enunciando un teorema que probaremos en el siguiente capítulo. Primero precisamos una definición.

Definición 4.2.3. Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 y sea x_0 una singularidad. Decimos que x_0 es una singularidad hiperbólica si $\dot{x} = dF_{x_0}x$ es un campo lineal hiperbólico. La singularidad es de tipo *atractor, repulsor o silla* acorde con el caracter del origen en $\dot{x} = dF_{x_0}x$.

Teorema 4.2.7 (Hartman-Grobman)**.** *Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1 y sea x_0 una singularidad hiperbólica con $A = dF_{x_0}$. Entonces el flujo de $\dot{x} = F(x)$ y el flujo de $\dot{x} = Ax$ son localmente conjugados, es decir, existe $U(x_0), V(0)$ y $h : U \to V$ homeo tal que*

$$h \circ \phi^F_t = \phi^A_t \circ h.$$

Este teorema lo demostraremos mas adelante en la sección **??**

4.3. Transformaciones lineales hiperbólicas

La hiperbolicidad representa un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas llamados "caóticos"(son sistemas inherentemente impredecibles) a pesar de lo cual se tiene un descripción bastante completa de su dinámica. Por otro lado tienen propiedades de estabilidad, lo que implica que esta "caoticidad" no se destruye por pequeñas perturbaciones del sistema.

Comenzaremos estudiando transformaciones lineales hiperbólicas donde, a pesar de la dinámica ser trivial (por no existir recurrencia no trivial), varias de las ideas y métodos de la teoría se presentan de forma mas elemental.

Seguiremos luego con lo que es llamada la teoría hiperbólica local y el teorema de Hartman. Luego estudiaremos un ejemplo clásico de la dinámica hiperbólica.

Definición 4.3.1. Una transformación lineal (invertible) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *hiperbólica* si todos sus valores propios tienen módulo diferente de 1.

Lema 4.3.1. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica tal que todos sus valores propios tienen módulo menor que* 1. *Entonces existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|,\ n \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Es fácil ver que existe n_0 tal que $\|A^{n_0}\| < \gamma < 1$. Sea $C_1 = \sup\{\|A^j\| : j = 0, ..., n_0\}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0}$. Dado cualquier $n \geq 0$, escribimos $n = kn_0 + r$ con $0 \leq r < n_0$. Resulta entonces que

$$\|A^n\| \leq \|A^{kn_0}\|\|A^r\| \leq C_1\gamma^k \leq \frac{C_1}{\gamma}\lambda^n = C\lambda^n.$$

□

Lema 4.3.2. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Entonces existen subespacios E^s, E^u (llamados subespacio estable e inestable respectivamente) tales que:*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $A(E^s) = E^s,\ A(E^u) = E^u$, *es decir, E^s y E^u son invariantes por A.*
3. *Existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que:*

   $$\|A^n v\| \leq C\lambda^n\|v\|, n \geq 0,\ v \in E^s \quad y \quad \|A^{-n}v\| \leq C\lambda^n\|v\|, n \geq 0,\ v \in E^u.$$

4. *Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos $E^s_x = x + E^s$ y $E^u_x = x + E^u$. Se tiene que si $y \in E^s_x \Longrightarrow \|A^n y - A^n x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$ si $n \geq 0$. Análogamente, para $n \geq 0$ e $y \in E^u_x$ se tiene que $\|A^{-n}y - A^{-n}x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. □

4.3.1. Estabilidad

Lema 4.3.3 (Norma adaptada)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hiperbólica, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacio estable e inestable. Entonces existe un norma $\|.\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$ tal que*

$$\|A_{/E^s}\|_1 < a < 1 \quad y \quad \|A^{-1}_{/E^u}\|_1 < a < 1.$$

Demostración. Supongamos primeramente que $E^s = \mathbb{R}^n$. Sabemos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Consideremos n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Fijado n_0 definimos una nueva norma $\|.\|_s$ definida por

$$\|v\|_s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\|.$$

Es fácil ver que existe K tal que $\|v\|_s \leq K\|v\|$. Luego observamos que:

$$\begin{aligned} \|Av\|_s &= \sum_{j=1}^{n_0} \|A^j v\| = \|v\|_s + \|A^{n_0} v\| - \|v\| \leq \|v\|_s + (C\lambda^{n_0} - 1)\|v\| \\ &\leq \left(1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{K}\right) \|v\|_s = a\|v\|_s. \end{aligned}$$

Ahora, en el caso $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, aplicando lo anterior construimos normas $\|.\|_s$ y $\|.\|_u$ en E^s y E^u respectivamente tales que $\|A_{/E^s}\|_s < a < 1$ y $\|A^{-1}_{/E^u}\|_u < a < 1$. Basta definir entonces, escribiendo $v = (v_s, v_u)$ con respecto a la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, la norma $\|.\|_1$ como

$$\|v\|_1 = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}.$$

□

Definición 4.3.2. Sea $K > 0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{R}^n$ es una K-pseudo-órbita (con respecto a $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) si $\|Ax_n - x_{n+1}\| \leq K \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.3.4 (Propiedad de sombreado)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^n z - x_n\| \leq \alpha \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Comencemos con un caso particular:

Sublema: *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal tal que $\|A\| < a < 1$ y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^m z - x_m\| \leq \alpha \ \ \forall m \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos $x_m : \ m \geq 0$. Observemos que por ser A una contracción tenemos que

$$\begin{aligned}\|A^m x_0 - x_m\| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-j}x_j - A^{m-(j+1)}x_{j+1}\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-(j+1)}(Ax_j - x_{j+1})\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} a^{m-(j+1)}K \\ &= K\sum j = 0^{m-1} a^j \leq \frac{K}{1-a}\end{aligned}$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{K}{1-a}$, cualquier K-pseudo órbita positiva $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es sombreada (a menos de α) por la órbita positiva según A de un punto $w = w(x_0)$. Re-indexando la sucesión $\{x_n\}_{n\geq -m}$ encontramos un punto w_m tal que

$$\|A^{n+m}w_m - x_n\| \leq \alpha \;\; n \geq -m.$$

Escribiendo $z_m = A^m w_m$ concluimos que $\|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha$ para cualquier $n \geq -m$. Tomando z un punto de acumulación de z_m (y suponiendo que $\lim_m z_m = z$) concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\|A^n z - x_n\| = \lim_m \|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha.$$

Finalmente, tal punto z debe ser único (¿por qué?). $\square$

Cotinuemos ahora con la demostración de la propiedad del sombreado.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ correspondiente a $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y escribimos $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_s, x_u)$ con respecto a esta descomposición. Vamos a trabajar con la norma adaptada encontrada en el lema anterior y que notaremos por comodidad $\|.\|$.

Sea $x_m,\ m \in \mathbb{Z}$ una K-pseudo órbita y tomemos $\alpha = \frac{K}{1-a}$. Excribimos $x_m = (x_s^m, x_u^m)$. Aplicando el sublema a $A_{/E^s}$ y a $A_{/E^u}$ concluimos que existe y_s e y_u tal que $\|A^m y_s - x_s^m\| \leq \alpha$ y $\|A^m y_u - x_u^m\| \leq \alpha$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Luego $y = (y_s, y_u)$ es el punto cuya órbita por A sombrea x_m.

$\square$

Lema 4.3.5. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo y $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces $G = A + g$ es expansivo con constante de expansividad infinita.*

Demostración. Por comodidad seguimos trabajando con la norma adaptada para A y con la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Consideremos $x \neq y$ dos puntos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos primero que $\|x-y\| = \|x_u - y_u\|$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \|G(x)-G(y)\| &= \|(A+g)(x)-(A+g)(y)\| \geq \|Ax-Ay\| - \|g(x)-g(y)\| \\ &\geq a^{-1}\|x_u - y_u\| - \epsilon\|x-y\| = (a^{-1}-\epsilon)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma análoga vemos que $\|(G(x)-G(y))_s\| \leq (a+\epsilon)\|x-y\|$. Concluimos que si ϵ es tal que $a+\epsilon < 1 < a^{-1}-\epsilon$ entonces $\|G(x)-G(y)\| = \|\left(G(x)-G(y)\right)_u\|$ y $\|G(x)-G(y)\| \geq (a^{-1}-\epsilon)\|x-y\|$. Inductivamente tenemos que $\|G^n(x)-G^n(y)\| \geq (a^{-1}-\epsilon)^n\|x-y\| \to_{n\to+\infty} \infty$.

Razonando de la misma manera en el caso $\|x-y\| = \|x_s-y_s\|$ concluimos que $\|G^{-n}(x)-G^{-n}(y)\| \geq (a^{-1}-\epsilon)^n\|x-y\| \to_{n\to+\infty} \infty$.

□

Teorema 4.3.1 (Estabilidad global de mapas lineales hiperbólicos)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo que verifica $\sup\{\|G(x)-Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ y $G-A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces G y A son conjugados. La conjugación está a distancia acotada de la identidad y es única con esta propiedad.*

Demostración. Tenemos que hallar un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $H \circ G = A \circ H$. Sea $K > 0$ tal que $\sup\{\|G(x)-Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < K$. Vemos entonces que dado cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ la órbita según G, $\{G^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, es una K-pseudo órbita de A. Por la propiedad del sombreado concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\|A^n z - G^n(x)\| \leq \alpha \text{ para cualquier } \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Definimos entonces $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $H(x) = z$ donde z es el único punto que verifica (4.1). En otras palabras $\|A^n(H(x)) - G^n(x)\| \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos primeramente que H conjuga G con A. En efecto, tenemos que $\|A^n(A \circ H(x)) - G^n(G(x))\| \leq \alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $H(G(x)) = A(H(x))$. De ahí que nos falta probar únicamente que H es un homeomorfismo.

<u>H es continua:</u> sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea x_m una sucesión tal que $x_m \to x$. Queremos probar que $H(x_m) \to H(x)$. Sea $H(x_{m_k})$ una subsucesión de $H(x_m)$ que

converge a un punto y y sea $p \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Observamos que

$$\|A^p y - G^p(x)\| = \lim_k \|A^p(H(x_{m_k})) - G^p(x_{m_k})\| \leq \alpha$$

y por lo tanto $y = H(x)$. Como $H(x_m)$ es un sucesión acotada (por serlo x_m) concluimos que $H(x)$ es el único punto de acumulación de $H(x_m)$. Luego $H(x_m) \to H(x)$ y probamos que H es continua.

H es inyectiva: Esto es consecuencia de la expansividad de G. En efecto, supongamos que $H(x_1) = H(x_2)$. Deducimos que $\|G^n(x_1) - G^n(x_2)\| \leq 2\alpha\ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.

H es sobreyectiva: Supongamos que $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) \neq y\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\overline{B} = \overline{B(0, 4\alpha)}$ la bola (cerrada) de radio 4α centrada en el origen y la función $g : \overline{B} \to \partial\overline{B}$ definida por $g(x) = 4\alpha \frac{H(x+y)-y}{\|H(x+y)-y\|.}$ Es fácil ver que si $x \in \partial\overline{B}$ entonces $g(x) \neq -x$. Por lo tanto tenemos una función continua de la bola en el borde de la misma y tal que en el borde es (isotópica a) la identidad. Esto contradice el Teorema del punto fijo de Brower.

H^{-1} es continua: Es similar a la prueba de la continuidad de H.

Finalmente observemos que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, está a distancia acotada de la identidad y $A \circ T = T \circ G$ entonces $T = H$ ya que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(T(x)) - G^n(x)\| < \infty.$$

$\square$

4.4. Puntos fijos hiperbólicos: Teorema de Hartman

Definición 4.4.1. Sea $f : \Omega \to \Omega$ difeomorfismo del abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y p un punto fijo de f. Decimos que p es hiperbólico si Df_p es hiperbólica (no tiene valores propios de módulo uno). Un punto periódico de período k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de f^k.

Teorema 4.4.1 (Teorema de Hartman)**.** *Sea $f : \Omega \to \Omega$ un difeomorfismo y $p \in \Omega$ un punto fijo hiperbólico de f. Entonces f y Df_p son localmente conjugados. Mas precisamente, existe U_p entorno de p y V entorno de 0 y un homeomorfismo $h : U \to V$ tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

Demostración. Podemos suponer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $p = 0 = f(0)$ es punto fijo hiperbólico y consideremos el mapa lineal hiperbólico $A = Df_0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es acotada y tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces A y $A + g$ son conjugados por la estabilidad de A (Teorema 4.3.1).

Por otra parte, escribimos $f(x) = Ax + \phi(x)$, donde ϕ es C^1, $\phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|\phi(x)\| \leq \frac{\epsilon}{8}\|x\|$ y $\|D\phi_x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Consideremos una función "chichón" $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2, \rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = Ax + \rho(x)\phi(x)$. Resulta que $G(x) = f(x)$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$. Por otra parte $DG_x - A = \rho(x)D\phi_x + \phi^T.\nabla\rho(x)$ que es idénticamente nulo si $\|x\| \geq \delta$ y cuando $\|x\| \leq \delta$ tenemos:

$$\|DG_x - A\| \leq |\rho(x)|\|D\phi_x\| + \|\phi(x)\|\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8}\|x\|\frac{4}{\delta} \leq \epsilon.$$

En consecuencia $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ. Por otra parte es facil ver que si ϵ es suficientemente chico entonces G es inyectiva y por la condición del diferencial DG_x se tiene G tambien es abierta y por lo tanto un homeo de $\mathbb{R}^n$. Concluimos que existe $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $H \circ G = A \circ H$. Tomemos $U = B(0, \delta/2)$, $V = H(U)$ y $h = H_{/U}$. Como $G = f$ en U concluimos que $h \circ f = A \circ h$ como queríamos. □

Definición 4.4.2. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo y $x \in M$. Se define el *conjunto estable* de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \to_{n\to+\infty} 0\}$$

y el *inestable* como

$$W^u(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \to_{n\to+\infty} 0\}.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos el *conjunto estable e inestable local* (de tamaño ϵ) como

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \leq \epsilon \ \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq \epsilon \ \forall n \geq 0\}.$$

Corolario 4.4.1. *Sea f difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que:*

1. $W^s_\epsilon(p) \subset W^s(p)$ *y* $W^u_\epsilon(p) \subset W^u(p)$.

2. *$W^s_\epsilon(p)$ (respec. $W^u_\epsilon(p)$) es una subvariedad topológica de la misma dimension que el espacio estable (respect. inestable).*

3. *$W^s(p) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p))$ y $W^u(p) = \cup_{n\geq 0} f^n(W^u_\epsilon(p))$ y son subvariedades topológicas inmersas.*

Demostración. Queda como ejercicio. □

E

Definición 4.4.3. Sea f un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico y $\mathbb{R}^n = E^s_p \oplus E^u_p$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p. Decimos que p es:

- *atractor* si $E^s = \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto $E^u = \{0\}$).
- *repulsor* si $E^u = \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto $E^s = \{0\}$).
- *silla* si $\{0\} \neq E^s \neq \mathbb{R}^n$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con E^u). En este caso definimos el *índice* de p como $dim E^s$.

Observación 4.4.1. Sea f un difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico.

- Si p es atractor $\Longrightarrow$ $W^s(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^u(p) = \{p\}$.
- Si p es repulsor $\Longrightarrow$ $W^u(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^s(p) = \{p\}$.

4.4.1. Demostración del Teorema de Hartman para campos, Teorema 4.2.7

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ es una singularidad hiperbólica del campo F y $A = DF_0$. Observemos que el flujo del campo A es $\phi^A_t(x) = e^{tA}x$ y que el tiempo uno de este flujo es $\phi^A_1(x) = e^A x = Lx$ donde L es una transformación lineal hiperbólica. Sea $\epsilon > 0$ de la estabilidad global de L. Tomemos $\eta > 0$ (a ser fijado despues según las condiciones que vayan apareciendo). Para $x \in \Omega$ escribimos $F(x) = Ax + Z(x)$. Existe $\delta > 0$ suficientemente chico tal que $\|DZ_x\| < \eta/2$ y $\|Z(x)\| \leq \eta/8$ si $\|x\| \leq \delta$.

Sea $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función chichón como en la demostración del Teorema de Hartman para difeomorfismos. Y consideremos el campo $Y(x) = Ax+\rho(x)Z(x)$. Tenemos entonces que $Y(x) = Ax$ si $\|x\| \geq \delta$ y que Y tiene constante de Lipchitz menor que η.

Sea ϕ_t^Y el flujo de Y y definimos $f_t = \phi_t^Y - \phi_t^A$. Veamos que si η es suficientemente chico entonces $f = f_1 = \phi_1^Y - \phi_1^A$ tiene constante de Lipchitz menor que ϵ. Observemos primero que existe K tal que $\|\phi_t^Y(x) - \phi_t^Y(y)\| \leq e^K \|x - y\|$ via Lema de Gronwall de ecuaciones diferenciales para todo $t, 0 \leq t \leq 1$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \phi_1^Y(x) - \phi_1^A(x) \\ &= \int_0^1 \left(Y(\phi_t^Y(x)) - A(\phi_t^Y(x)) + A(\phi_t^Y(x)) - A(\phi_t^A(x))\right) dt \\ &= \int_0^1 Z(\phi_t^Y(x))dt + \int_0^1 A(f_t(x))dt. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\|f_1(x)\| \leq \eta/8 + \int_0^1 \|A\| \|f_t(x)\|$$

y luego $\|f_1(x)\| \leq (\eta/8)e^{\|A\|}$ y f_1 está uniformemente acotada. De la misma forma:

$$f_1(x) - f_1(y) = \int_0^1 Z(\phi_t^Y(x)) - Z(\phi_t^Y(y))dt + \int_0^1 A(f_t(x)) - A(f_t(x))dt$$

Y entonces

$$\|f_1(x) - f_1(y)\| \leq (\eta/2)c^K \|x - y\| + \int_0^1 \|A\| \|f_t(x) - f_t(y)\| dt$$

y entonces $\|f_1(x) - f_1(y)\| \leq (\eta/2)c^K e^{\|A\|} \|x - y\|$. De aquí conclímos que si η es suficientemente chico, entonces f tiene constante de Lipchitz menor que ϵ.

Luego tenemos que existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que

$$\phi_1^A \circ h = L \circ h = h \circ \phi_1^Y.$$

Veamos que h también conjuga los flujos de Y y de A. Definimos entonces

$$H(x) = \int_0^1 \phi_s^A \circ h \circ \phi_s^Y(x) ds.$$

Es claro que H es continua y a distancia acotada de la identidad. Veremos que H conjuga los flujos de Y y de A. Para esto basta ver que $H(x) = \phi_{-t}^A \circ H \circ \phi_t^Y(x)$ para $0 \leq t \leq 1$. En efecto

$$
\begin{aligned}
\phi^A_{-t} \circ H \circ \phi^Y_t(x) = & \int_0^1 \phi^A_{-t-s} \circ h \circ \phi^Y_{t+s}(x) ds \\
= & \int_t^{1+t} \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du \\
= & \int_t^1 \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du + \int_1^{1+t} \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du \\
= & \int_t^1 \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du + \int_0^t \phi^A_{-u} \circ \phi^A_{-1} \circ h \circ \phi^Y_1 \circ \phi^Y_u(x) du \\
= & \int_t^1 \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du + \int_0^t \phi^A_{-u} \circ h \circ \phi^Y_u(x) du \\
= & H(x).
\end{aligned}
$$

En particular, $\phi^A_1 \circ H = H \circ \phi^Y_1$ y por unicidad debe ser $H = h$.

Finalmente, restringiendo h a un entorno de 0 donde $Y = F$ tenemos que h conjuga localmente los flujos de F y de $A = DF_0$.

4.5. Herradura de Smale

Antes de considerar este famoso ejemplo, veamos el Shift de Bernoulli.

Definición 4.5.1. Sea M un espacio métrico y $f : M \to M$ un homeo. Decimos que f es *expansivo* si $\exists\, \alpha > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, $\forall\, n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = y$ (α es llamada constante de expansividad).

Definición 4.5.2. Sea $f : M \to M$ un homeo. Decimos que f es topológicamente mixing si dados U, V abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ $\forall\, n \geq m$.

Veamos un ejemplo que, entre otras propiedades, es expansivo y topológicamente mixing.

Sea $M = \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y dotamos a Σ con la topología producto. Luego, Σ es compacto. Si definimos $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$, obtenemos una métrica en Σ compatible con la topología. Dado $\{x_n\} \in \Sigma$ y $N \in \mathbb{N}$, definimos el N-entorno de $\{x_n\}$ como

$$N(\{x_n\}) = \{\{y_n\} \in \Sigma : \; y_n = x_n \text{ si } |n| \leq N\}.$$

Se verifica que $N(\{x_n\})$ constituye una base de entornos de $\{x_n\}$. Definimos el *shift a la izquierda* o *shift de Bernoulli* (de dos símbolos) al homeomorfismo $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$ donde $y_n = x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.5.1. *Sea $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift de Bernoulli. Entonces:*

1. *σ es expansivo*

2. *$\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$*

3. *σ es transitivo y topológicamente mixing.*

4. *Para cualquier $\{x_n\} \in \Sigma$ su conjunto estable*

$$W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} :\ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

e inestable

$$W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} :\ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \underset{j\to-\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

son ambos densos en Σ.

Demostración.

1. Si $\{x_n\} \neq \{y_n\} \implies \exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m \neq y_m \implies d(\sigma^{-m}(\{x_n\}), \sigma^{-m}(\{t_n\})) \geq 1$. Luego, cualquier $\alpha < 1$ es constante de expansividad.

2. Sea $\{x_n\} \in \Sigma$ cualquiera y fijemos un N entorno de $\{x_n\}$. Definimos $\{y_n\}$ como $y_n = x_n$ si $|n| \leq N$ y de forma periódica, es decir, $y_{k(2N+1)+j} = y_j$ si $-N \leq j \leq N$.

3. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos puntos de Σ y fijemos U, un N_1 entorno de $\{x_n\}$, y V, un entorno N_2 de $\{y_n\}$. Tomemos $m > N_1 + 2N_2 + 1$ y sea $k \geq m$ cualquiera. Definimos $\{z_n\}$ tal que: $z_n = x_n$ si $|n| \leq N_1, z_{k+n} = y_n$ si $|n| \leq N_2$. Resulta entonces que $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

4. Basta observar $W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} :\ y_n = x_n,\ \forall\, n \geq k$ para algún $k \in \mathbb{Z}\}$ y $W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} :\ y_n = x_n,\ \forall\, n \leq k$ para algún $k \in \mathbb{Z}\}$.

$\square$

Ahora estamos en condiciones de estudiar la herradura de Smale. Vamos a considerar un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de un cuadrado

$Q = I \times I$ es como se indica en la figura 4.1, conocido como la herradura de Smale ([S]).

Tenemos entonces dos bandas horizontales H_0 y H_1 tal que $f(Q) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1) = I_0 \cup I_1$ son dos bandas verticales. Supondremos que $f_{/H_i}, i = 0, 1$ es afín. En particular, las direcciones horizontales y verticales son preservadas bajo $f_{/H_i}$ y segmentos horizontales son contraídos uniformemente y segmentos verticales son expandidos uniformemente.

Podemos observar que

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap H_0) \cup f(f(Q) \cap H_1)$$

son cuatro fajas verticales. En general

$$\bigcap_{j=0}^{n} f^j(Q)$$

son 2^n fajas verticales y se concluye que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^j(Q) = K_1 \times I$$

donde K_1 es un conjunto de Cantor en I, es decir, los puntos de Q cuya órbita pasada siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas verticales.

De la misma forma se prueba que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}(Q) = I \times K_2$$

donde K_2 es un conjunto de Cantor, es decir, los puntos de Q cuya órbita futura siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas horizontales.

Así, el conjunto de puntos de Q cuya órbita siempre se mantiene en Q es $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(Q) = K_1 \times K_2$.

Observemos lo siguiente:

- $\bigcap_{j=-m}^{m} f^j(Q)$ consiste en 4^n rectángulos cuyos diámetros convergen a cero con m.

- Sea R_m cualquiera de estos rectángulos. Entonces para cualquier $-m+1 \leq j \leq m-1$ se verifica que $f^j(R_m) \subset I_0$ o $f^j(R_m) \subset I_1$.

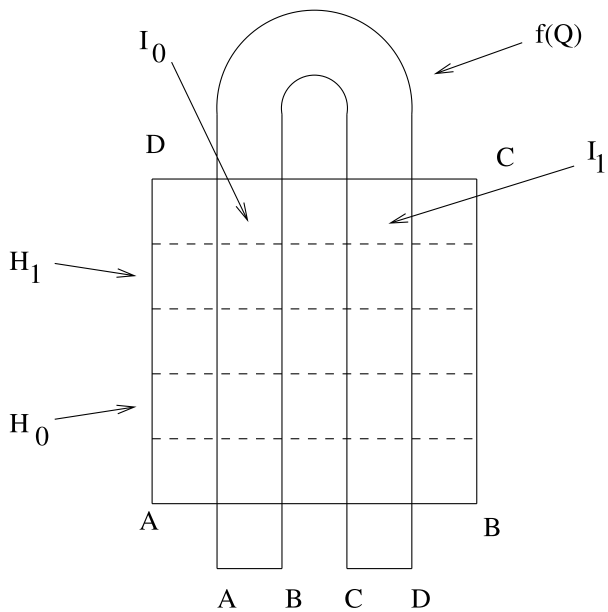

Figura 4.1:

- Dados dos puntos $x \neq y$ de Λ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ no están a la vez en I_0 o I_1.

Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift (a la izquierda) de Bernoulli (ver sección **??**). Consideremos $h : \Lambda \to \Sigma$ de la siguiente manera:

$$h(x)(n) = i \text{ si } f^n(x) \in I_i,\ i = 0, 1.$$

Resulta que h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = \sigma \circ h$. En efecto:
<u>h continua:</u> Si x, y pertenecen a un mismo rectángulo de $\bigcap_{j=-m-1}^{m+1} f^j(Q)$ entonces $h(x)(j) = h(y)(j),\ -m \leq j \leq m$.
<u>h inyectiva:</u> se deduce de lo observado anteriormente
<u>h sobreyectiva:</u> Sea $\{x_n\} \in \Sigma$, entonces

$$R_m = \bigcap_{j=-m}^{j=m} f^{-j}(I_{x_j})$$

es un sucesión encajada de rectángulos cuya intersección consiste en un punto x. Se deduce que $h(x) = \{x_n\}$.

De estas propiedades y el hecho que Λ es compacto concluimos que h es un homeomorfismo. Además:

$$h(f(x))(n) = i \Leftrightarrow f^{n+1} \in I_i \Leftrightarrow i = h(x)(n+1)$$

es decir, $h \circ f = \sigma \circ h$. En conclusión hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.5.2. *Sea $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q)$. Entonces Λ es un conjunto de Cantor y $f_{/\Lambda}$ es conjugado al shift $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ donde $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En particular:*

1. *Los puntos periódicos son densos en Λ.*
2. *$f_{/\Lambda}$ es transitivo y topolǵicamente mixing.*
3. *$W^s(x) \cap \Lambda$ y $W^u(x) \cap \Lambda$ son densos en Λ para $x \in \Lambda$.*

Observación 4.5.1. Una construcción similar y un resultado análogo puede realizarse en $\mathbb{R}^m$ con un cubo I^m.

Definición 4.5.3. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Un punto $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ diferente de p se llama punto homoclínico. Se dice además que es transversal si la intersección $W^s(p) \cap W^u(p)$ es transversal en x. La órbita de un punto homoclńico (transversal) es llamada órbita homoclínica (transversal).

Situaciones como la herradura vista anteriormente aparecen siempre que tengamos un punto homoclínico transversal:

Teorema 4.5.3 (Birkhoff-Smale)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, p un punto fijo hiperbólico y x un punto homoclínico transversal. Entonces existe $N > 0$ y un conjunto f^N invariante Λ (que contiene p y x) tal que $f^N_{/\Lambda}$ es conjugado al shift de Bernoulli (de dos símbolos).* [1]

4.6. Práctico 3

1. * Sea $\Phi_t : M \to M$ un flujo y Σ una sección transversal global, $P : \Sigma \to \Sigma$ la transformación de Poincaré.

    a) Probar que $p \in \Sigma$ es periódico (recurrente, no errante) según P sii lo es según Φ_t.

[1]El conjunto Λ es además un conjunto hiperbólico (ver definición **??**).

b) Probar que un conjunto compacto e invariante $G \subset M$ es minimal según Φ_t sii $G \cap \Sigma$ es minimal según P.

2. Mostrar que la ecuación diferencial $x'' + x^6 + 4 = 0$ no tiene soluciones periódicas.

3. Probar que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + x^4 + y^2(x+1) \\ \dot{y} &= y(x^2+1) \end{aligned}$$

no tiene ninguna órbita periódica.

4. * Consideremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x^3 \\ \dot{y} &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

Pruebe que hay una órbita periódica en la región $A = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Sugerencia: Estudiar que sucede en las curvas de nivel de $V(x,y) = x^2 + y^2$.

5. * **Teorema de Brower:** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeormorfismo del plano sin puntos fijos y que preserva orientación. Entonces, por cada punto x del plano pasa una curva C (homemorfa a $\mathbb{R}$) que separa al plano en dos componentes conexas tal que $f(C)$ y $f^{-1}(C)$ no estan en la misma componente.*

   Demostrar este teorema cuando f es el tiempo uno de un flujo Φ_t en $\mathbb{R}^2$

6. Sea M la botella de Klein y sea $\Phi_t : M \to M$ un flujo sin singularidades. Mostrar que todo punto recurrente es periódico.

7. * Sean Φ_t, Ψ_t dos flujos en la esfera S^2 que conmutan (i.e. $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t \; \forall \; t, s$). Demostrar que los flujos tienen una singularidad en común.

8. Sea $\Phi_t : M \to M$ un flujo en una superficie M y Σ una sección transversal cerrada homotópicamente trivial. Porbar que Φ_t tiene una singularidad.

9. Sean Φ_t un flujo en una superficie M, Σ una secciń transversal cerrada y $p \in \Sigma$ un punto recurrente. Mostrar que Σ no es homotópicamente trivial.

10. Sea Φ_t un flujo en el toro $T^2 = S^1 \times S^1$. y $p \in T^2$ un punto recurrente no periódico. Porbar que para cualquier $\theta \in S^1$ se tiene que $\omega(p) \cap S^1 \times \{\theta\} \neq \emptyset$ y $\omega(p) \cap \{\theta\} \times S^1 \neq \emptyset$.

11. Sean $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_g$ curvas simples cerradas disjuntas en una superficie M de género g tal que $M - \cup_{i=1}^{g} \mathcal{C}_i$ es conexo (g es el número maximo de tales curvas en una superficie de génrero g). Sea $p \in M$ un punto recurrente no periódico. Porbar que existe i tal que $\omega(p) \cap \mathcal{C}_i \neq \emptyset$.

12. * Sea M una superficie de género g y sean $G_1, ..., G_n$ conjuntos minimales no triviales disjuntos. Probar que $n \leq g$.

13. Sea X un campo en $\mathbb{R}^2$ con $X(0) = 0$ y supongamos que 0 es una singularidad aislada y estable. Porbar que 0 es asintoticamente estable o existe una suceción de orbitas periódicas convergiendo a 0 y conteniéndolo en su interior.

14. Sea X un campo de clase C^2 en una superficie compacta $S \neq \mathbb{T}^2$ y sea $p \in S$. Probar que $\omega(p)$ contiene una singularidad o es órbita periódica.

15. Dibujar las trayectorias de un isomorfismo lineal hiperbólico $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ discutiendo seguún los valores propios. Idem para campos lineales hiperbólicos.

16. Sea $\mathcal{L} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}^n) : A \text{ hiperbólica}\}$. Probar que $\mathcal{L}$ es abierto y denso en $GL_n(\mathbb{R}^n)$.

17. *a*) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Porbar que A es hiperbólica sii $\omega(x) = 0$ o $\omega(x) = \emptyset$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

    b) Dar un ejemplo de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que tenga una orbita recurrente no periódica.

18. * Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico.

Probar que dado $N > 0$ existe un entorno $V(p)$ tal que si $q \in V$ es un punto periódico distinto de p entonces su período es mayor que N. Enunciar y demostrar el análogo para campos donde p es una sigularidad hiperbólica.

19. * Sea ϕ_t un flujo en M y sea $p \in M$ cuya órbita es periódica. Sea x un punto de la órbita por p y Σ una sección transversal a la orbita por p por x. Consideremos $P : \Sigma \to \Sigma$ la transformación de Poincare. Decimos que la órbita periódica por p es hiperbólica si x es un punto fijo hiperbólico de P. Mostrar que esta bien definido, i.e., no depende de x ni de la sección transversal.

20. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo (periódico de periódo k) hiperbólico de f. Mostrar que existen $\mathcal{U}(f)$ entorno de f y $U(p)$ entorno de p tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces g tiene un único punto fijo (periódico de periódo k) y que es hiperbólico en $U(p)$. (sug: considerar $F(g, x) = g(x) - x$ en una carta local).

21. Sea M una variedad compacta y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{r+1}, $r \geq 1$. Considere el campo $X = grad(f)$ que es de clase C^r y sea ϕ_t su flujo.

    a) Mostrar que $f(\phi_t))$ es creciente con t. Concluir que ϕ_t no tiene órbitas periódicas. ¿Quién es $\Omega(X)$?

    b) Probar que p es una singularidad sii p es un punto crítico de f. Probar que p es una singularidad hiperbólica sii el hessiano de f en p es no degenerado. Probar que p es un atractor (repulsor) sii p es un máximo (mínimo) local de f.

Bibliografía

[D] Denjoy, A; Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. de Math. Pures et Appliquées (9 série),* **11** (1932) 333-375.

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[KH] Katok, A.,Hasselblatt, B.; *Intoduction to the modern theory of Dynamical Systems* Cambridge Univ. Press, 1995.

[M1] R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **66** (1988) 161-210.

[M2] R. Mañé, An ergodic clossing lemma, Ann. of Math. **116** (1982), 503-540.

[N] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101-151.

[NS] Nemytskii, V.; Stepanov, V.; *Qualitative Theory of differential equations*, Princeton University Press, 1960.

[P] J. Palis, A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors, *Astérisque* **261** (2000), 339-351.

[Pl] V. A. Pliss, On a conjecture due to Smale, *Diff. Uravnenija*, **8** (1972), 268-282.

[PS1] E. R. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of math* **151** (2000), 961-1023.

[PS2] E. R. Pujals, M. Sambarino, On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits and variation of entropy, *Nonlinearity* **13** (2000) 921-926.

[PT] J. Palis, F. Takens, Hyperoblicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Univ. Press*, 1993.

[Pu1] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math.* **89** (1967) 956-1009.

[Pu2] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010-1021.

[S] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.

[Sch] A. J. Schwartz, A generalization of a Poincaré-Bendixon Theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 453-458.

[Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag*, 1987.