Introducción a la Topología

Martín Sambarino

Febrero 2022

Resumen

Este texto está basado y orientado al curso de *Introducción a la Topología de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias -Universidad de la República*. Claramente hay un gran cantidad de textos, algunos ya tradicionales, que pueden adaptarse para este propósito, por ejemplo [M]. La idea de presentar este texto es ofrecer a los estudiantes una versión más acorde al curso, y una motivación para la lectura de la bibliografía. El curso está básicamente contenido en los Capítulos 1 a 8, aunque estos incluyen material extra que pueden ser incluidos o no en el temario del curso, que queda librado al Profesor. Cada capítulo tiene una lista de ejercicios al final que es fruto de la elaboración del material práctico por múltiples docentes del curso a lo largo del tiempo. Estos ejercicios son parte fundamental del curso.

Hemos incluido dos capítulos extra (fuera de programa) con temas que difícilmente se estudien en cursos iniciales de topología: *Teorema del Punto Fijo de Brouwer, Teorema de Invariancia del Dominio y Clasificación de Superficies*. La particularidad es que la demostración de estos es bastante elemental sin dejar de mostrar la profundidad y belleza que tienen. El objetivo nuevamente es la motivación a los estudiantes.

Los prerequisitos básicos son nociones de Cálculo Diferencial y Álgebra Lineal, sobre todo porque nos servirán de ejemplos básicos a lo largo del texto.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

¿Qué es lo que es? Esta pregunta ha atravesado la filosofía y la ciencia desde los inicios hasta hoy. Se ha decantado principalmente en la descripción de las características o propiedades de *lo que es*. Pero ¿hasta dónde esto es la esencia del objeto de estudio? En general, las característica o propiedades dan lugar a poder *distinguir* diferentes objetos. En este curso, estudiaremos ciertas caracteristicas o propiedades que tienen que ver con la *forma*.

La topología, en términos muy generales, es el *estudio de la forma*. También, se podría decir, que es una *geometría cualitativa*: hay una noción de cercanía pero no es cuantitativa como una distancia. Una imagen plástica de la topología es el estudio de los objetos hechos de goma. El topólogo no diferencia objetos que pueden ser "deformados continuamente" en otro. Así, por ejemplo, el topólogo no diferencia entre dos triángulos cualesquiera ni tampoco éstos del disco o el cuadrado, y una esfera es lo mismo que un elipsoide o un cubo. Mas en general, es el estudio de los objetos donde hay una noción de cercanía o proximidad y de las propiedades de éstos que se preservan por funciones continuas (es decir, funciones tales que puntos "cercanos" son enviados en puntos "cercanos"). Muchas veces, las mayoría de las propiedades topológicas de un objeto no lo caracterizan, pero si resultan muy útiles para *distinguir* objetos.

Antes de entrar en el temario del curso, veamos algunos problemas para motivar el estudio de la topología, aunque -salvo el tercero- estos no forman parte del temario del curso.

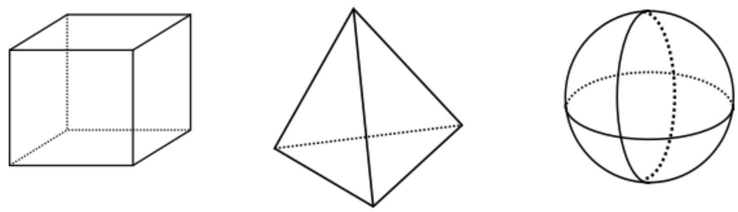


Figura 1.1: La característica de Euler: V-L+C=2 en todos los casos.

Euler y los poliedros

Leonhard Euler fue un matemático suizo (aunque trabajó mayormente en San Petesburgo-Rusia) que vivió durante el siglo XVIII e hizo fundamentales y numerosos aportes a la Matemática. En cierto trabajo, Euler investiga sobre poliedros (tal vez a raíz de trabajos previos de Descartes) y realiza la siguiente operación:

$$\#\text{ vertices } - \#\text{ lados } + \#\text{ caras.}$$

Hagámoslo para el cubo: $V - L + C = 8 - 12 + 6 = 2$. Y para el tetraedro: $V - L + C = 4 - 6 + 4 = 2$. De hecho, Euler probó que para cualquier poliedro convexo esta operación siempre tiene como resultado 2. Tomemos la esfera en $\mathbb{R}^3$ y dividámosla en "triángulos" (por ejemplo en 4 cuadrantes en el hemisferio norte y 4 cuadrantes en el hemisferio sur), ver Figura 1.1; si hacemos la cuenta $V - L + C$ obtenemos también 2. No es difícil ver que el cubo, el tetraedro y la esfera son *homeomorfos*, es decir existe una función continua biyectiva y con inversa continua entre estos, basta centrarlos todos en en un mismo punto y proyectar radialmente.

¿Será que para cualquier poliedro la misma cuenta tiene como resultado siempre dos? En 1813 Lhulier se hizo esta pregunta y tomó el cubo sacándole un prisma rectangular de forma que ahora el cubo tiene un "agujero". Para que efectivamente sea un poliedro, hay que agregarles algunas aristas para que todas las caras sean polígonos (ver Figura 1.2). En este caso, la cuenta $V - L + C$ da 0. Este objeto es homeomorfo al toro. Y si "triangulamos" el toro, esta cuenta siempre tiene como resultado cero!

Este es el origen de una de las propiedades fundamentales de la teoría de

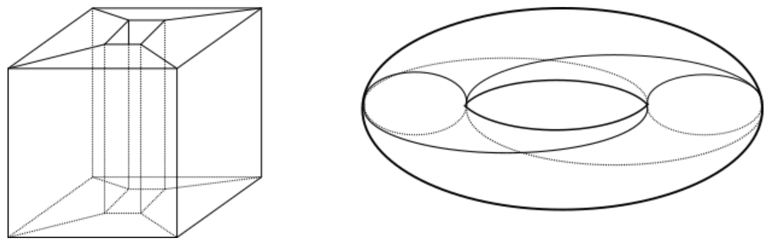


Figura 1.2: La característica de Euler del toro: V-L+C=0.

Figura 1.3: Los puentes de Konisberg.

superficies: si "triangulamos" la superficie y realizamos la operación $V - L + C$ obtenemos la *característica de Euler* de la superficie, un invariante topológico fundamental que caracteriza las superficies (y con sorprendentes y profundas relaciones con otras ramas de la matemática).

Los puentes de Konisberg

En la época de Euler, en la ciudad de Konisberg (un hermosa ciudad antigua con dos islas y siete puentes que conectaban la ciudad, ver figura 1.3) la siguiente diversión era muy popular: ¿será posible caminar por la ciudad y atravesar todos los puentes una y sola una vez? Domingo tras domingo, los paseantes intentaban encontrar una solución que les era esquiva. Este problema llegó a oídos de Euler, quien al principio dijo: ¿para qué dedicarle tiempo a este problema donde ni el análisis, ni el álgebra ni la geometría tienen lugar? Sin embargo, como buen matemático, le dedicó un tiempo, realizó un modelo abstracto del problema y resolvió el problema (así como también su formulación general). Es claro que este problema tiene que ver con la *forma* (de la ciudad, las islas y los puentes) pero no de la *geometría* (no interesa el tamaño de la isla ni la longitud de los puentes, etc), y no en vano Euler tituló el trabajo *Sobre un problema de la geometría de la posición*.

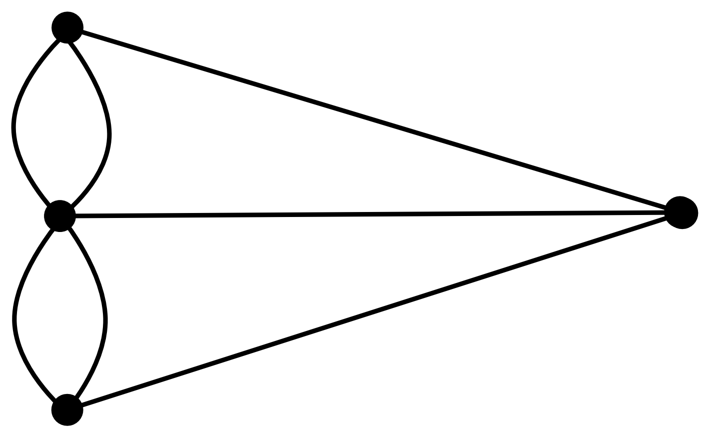


Figura 1.4: Representación en forma de grafo del problema de los puentes de Konisber.

El problema es equivalente a trazar el grafo de la figura 1.4 sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por una misma artista. Puede decirse que la teoría de grafos se inicia con este trabajo de Euler.

Cantor y el problema de la dimensión

George Cantor nación en San Petesburgo y de joven se mudó a Berlin, donde estudió matemática, siendo uno de sus tutores Karl Weierstrass. Fue un gran matemático, conocido por la Teoría de Conjuntos y también como fundador de la Topología conjuntista (ver [D1]). Estudiando el problema de la unicidad de la representación de una función en series trigonométricas (por ejemplo, prueba que si una función trigonométrica que converge a cero para todo x excepto en una cantidad finita de puntos excepcionales entonces los coeficientes de la serie son todos nulos), e investigando que tipo de conjuntos excepcionales garantizaban la unicidad de una serie trigonométrica, terminó estudiando profundamente los subconjuntos de números reales. Y en general comenzó a preguntarse sobre cardinalidad y las correspondencias entre conjuntos.

En una carta a su amigo Richard Dedeking en 1874 pone de manifiesto la siguiente pregunta: *¿Será que puede ponerse una superficie, (quizá el cuadrado con el borde) en correspondencia biunívoca con una línea (quizá un segmento incluyendo sus extremos)?* Desde el principio Cantor estaba seguro tanto de la importancia como de la dificultad de la pregunta. Sabía además que la mayoría de los matemáticos tomarían la imposibilidad de esta correspondencia como tan obvia que ni siquiera sería necesario una prueba. En una conversación con un colega en Berlin, este le dice que la cuestión es absurda ya que *dos variables independientes no pueden reducirse a una.*

En un congreso en 1877 (celebrando los 100 años del nacimiento de Gauss) le formuló la pregunta a varios colegas, obteniendo respuestas similares: es obvio que es imposible tal correspondencia. Sin embargo, Cantor pensaba que una prueba era necesaria. Y en los tiempos subsiguientes cambia el enfoque: en vez de probar que no puede existir tal correspondencia, intenta *construir* una tal biyección. En 1877 prueba el siguiente resultado sorprendente (el artículo aparece en 1878 bajo el título *Contribución a la teoría de variedades*): la cantidad de puntos del intervalo y el cuadrado es la misma!

Teorema 1.0.1. *Existe* $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *inyectiva.*

Demostración. Es una prueba elegante, simple y genial. Para cada $x \in [0,1]$ consideremos su expresión decimal (si tiene mas de una elegimos la que no termina siempre en 0) $x = 0, x_0x_1x_2....$ Luego definamos

$$f(x,y) = 0, x_0y_0x_1y_1x_2y_2...$$

es decir, vamos alternando los dígitos de la expresión decimal de x e y. Esta función es inyectiva.[1] $\square$

[1] Esta es la prueba que Cantor le envía a Dedeking en una carta en 1877. Dedeking le observó que no era sobreyectiva, puesto que por ejemplo $z = 0,1101020304050607080901......$ no tiene preimagen. Sin embargo es posible mostrar con ideas similares que se puede construir una función que sea biyectiva, que de hecho es el enunciado original ¿Se anima el lector a hacer esta prueba? De todas maneras lo importante de este resultado es la *inyectividad*. La biyección podrá concluirse también (además de adaptando la prueba), usando el Teorema de Cantor-Berstein que veremos mas adelante, ver Corolario 2.0.1.

Figura 1.5: George Cantor

Este hecho fue muy chocante para la época (y aún hoy), puesto que implica que *podemos identificar un punto en el plano con una sola coordenada!!* De hecho G. Cantor pensó que socavaba los fundamentos de la geometría y había que revisar los resultados previos de Gauss, Riemann, etc.

En una carta a su colega y amigo R. Dedeking comentándole sobre este resultado escribe la famosa frase:

Je le vois, mais je ne le crois pas[2]

En respuesta a Cantor, Dedeking le comenta que el problema puede estar en que tal función no puede ser continua (es decir, si le asociamos a puntos del plano una sola coordenada, quisiéramos que puntos cercanos tuvieran coordenadas cercanas, y esto no sería posible). Este problema derivó en el problema de la Invariancia del Dominio o de la Dimensión, (ver [C] y [D2]). Varios matemáticos dedicaron esfuerzos al concepto de dimensión, entre ellos Poincaré, Lebesgue y Brouwer. En los años posteriores a la publicación del artículo de Cantor, se probó que una tal función (entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$) no puede ser continua[3] pero el caso

[2] Lo veo pero no lo creo.

[3] Sin embargo, como veremos en la sección 7.3, existe una función continua $f : [0,1] \to$

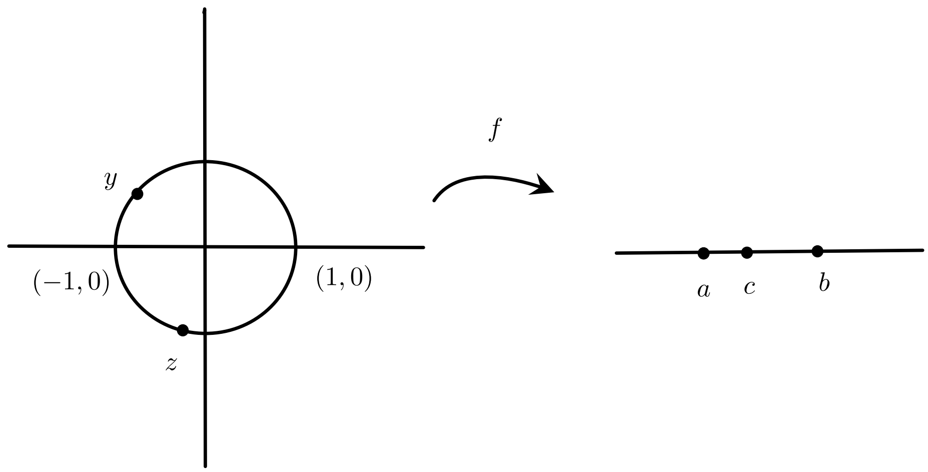


Figura 1.6:

general de que no hay una función continua e inyectiva de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $m < n$ demoró 30 años en ser resuelto por L.J.E. Brouwer [Br1].

Teorema 1.0.2. *No existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva.*

Demostración. Supongamos que tal función existe. Consideremos la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Consideremos $a = f((-1, 0))$ y $b = f((1, 0))$ y supongamos sin perdida de generalidad que $a < b$. Sea $c, a < c < b$. Considerando el arco superior de S^1 que une $(-1, 0)$ con $(1, 0)$, por el teorema del valor medio existe un punto y en ese arco tal que $f(y) = c$. Pero también, considerando el arco inferior de S^1 uniendo los mismo puntos, también deducimos que existe z es ese arco tal que $f(z) = c$. Pero entonces f no es inyectiva. $\square$

Mas adelante veremos otra prueba de este importante teorema, usando la noción de *conexión*. La idea es que si al plano $\mathbb{R}^2$ le quitamos un punto, igual consta de una sola pieza; pero si a $\mathbb{R}$ le sacamos un punto, queda partido en dos piezas. Este hecho dice que no pueden se homeomorfos.

$[0, 1] \times [0, 1]$ continua y sobreyectiva

Capítulo 2

Conjuntos y Cardinalidad

Una primera forma de *distinguir* espacios (o mejor dicho conjuntos[1], pues todavía no le hemos adicionado ninguna estructura) es por su "cantidad" de elementos. En este capítulo exploraremos este concepto.

El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Una *función* $f : A \to B$ es un subconjunto C de $A \times B$ tal que

- Si $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in C$.
- Si $(a, b) \in C$ y $(a, b') \in C$ entonces $b = b'$.

Dado $a \in A$ denotamos por $f(a)$ al único elemento de B tal que $(a, f(a)) \in C$. Decimos que la función es *inyectiva* si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$, y decimos que es *sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Cuando una función es inyectiva y sobreyectiva diremos que es *biyectiva*.

Una relación de equivalencia en un conjunto A es un subconjunto R de $A \times A$ tal que (denotando $x \sim_R y$ si $(x, y) \in R$):

- $x \sim_R x$ para todo $x \in A$.

[1]Aclaración: No haremos una exposición de la axiomática de teoría de conjuntos: haremos uso de la llamada "naive set theory". Conjunto y pertenencia son conceptos primitivos, supondremos conocidas las nociones de subconjunto, conjunto vacío, unión, intersección, complemento, etc., así como las formulaciones para la formación de (sub)conjuntos. También supondremos conocidos los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales, $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, también el principio de inducción, etc...

- Si $x \sim_R y$ entonces $y \sim_R x$
- Si $x \sim_R y$ e $y \sim_R z$ entonces $x \sim_R z$.

Se define la clase de equivalencia de x como $[x] = \{y \in A : x \sim_R y\}$. El conjunto de clases de equivalencia $\{[x] : x \in A\}$ es denotado por $A/\sim_R$ y forma una partición del conjunto A.

Definición 2.0.1. Decimos que dos conjuntos A y B son equipotentes (o tienen la misma potencia, o tienen la misma cardinalidad, o son coordinables) si existe $f : A \to B$ biyectiva. En este caso denotamos $\#A = \#B$.

Decimos que el cardinal de A es menor o igual que el cardinal del B, $\#A \leq \#B$ si existe $f : A \to B$ inyectiva.

Lema 2.0.1. *Sean A y B dos conjuntos cualquiera. Entonces, existe $f : A \to B$ inyectiva si y solamente si existe $g : B \to A$ sobreyectiva.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Sea a_0 un elemento cualquiera de A. Supongamos que existe $f : A \to B$ inyectiva. Vamos a definir $g : B \to A$ así: si $b \in f(A)$ entonces existe un único a tal que $f(a) = b$ y definimos entonces $g(b) = a$. Si $b \notin f(A)$ definimos $g(b) = a_0$. Es claro de esta forma que b es sobreyectiva.

($\Leftarrow$). Supongamos que existe $g : B \to A$ sobreyectiva. Luego, para todo $a \in A$ se tiene que $g^{-1}(a)$ es no vacío. Elegimos entonces, para cada $a \in A$ un único elemento b_a de $g^{-1}(a)$. Definimos $f : A \to B$ por $f(a) = b_a$. $\square$

La segunda parte de la demostración tiene un problema, se precisa un axioma de la teoría de conjuntos: el *Axioma de Elección.* En el caso anterior, elegimos un elemento de cada conjunto de una colección arbitraria... es esto posible? Este axioma dice que si:

> *Axioma de Elección: Dada una colección $\mathcal{A}$ arbitraria de conjuntos disjuntos no vacíos existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada miembro de $\mathcal{A}$. En otras palabras, existe un conjunto C tal que $C \cap A$ consiste de un solo elemento para todo $A \in \mathcal{A}$.*

El axioma de elección nos dice que *existe* tal conjunto, pero no dice *como* formarlo: es un axioma de existencia. Cuando podemos dar un *criterio* para determinar un elemento de cada conjunto no es necesario el axioma de elección. Como ejemplificó Bertrand Russel[2], si tenemos la colección de todos los pares

[2]Matemático, filósofo y premio Nobel de Literatura.

de zapatos, podemos dar una regla para elegir un zapato de cada par: el izquierdo. Para esto no es necesario el axioma de elección. Pero cuando no tenemos un elemento distinguible de cada elemento de cada miembro de una colección (infinita) de conjuntos si se hace necesario usar el axioma de elección. Cuando la colección es finita, por ejemplo un solo conjunto A, no es necesario el axioma de elección, aún si no hay un elemento distinguible: como A es no vacío, *existe* $a \in A$.

El axioma de elección fue formulado por Ernesto Zermelo en la axiomática de teoría de conjuntos, a principios del 1900. En su momento causó mucho repercusión y varios matemáticos rechazaron tal axioma. Varios mostraron que llevaba a resultados contra-intuitivos como la conocida *Paradoja de Banach-Tarski*: es posible descomponer una naranja en finitos pedazos y volver a reunirlos de forma de obtener dos naranjas iguales a la anterior.

Volvamos a la demostración de la segunda parte de la demostración del Lema 2.0.1: Sea $g : B \to A$ sobreyectiva. Sea $\{C_a : a \in A\}$ la familia de subconjuntos de $A \times B$ definida como $C_a = \{(a, b) : g(b) = a\}$. Por el axioma de elección existe un conjunto C tal que $C \cap C_a$ consiste de un solo elemento. Definimos $f : A \to B$ tal que $(a, f(a))$ es el único de elementos de $C \cap C_a$.

Lema 2.0.2. *Sea $B \subset A$ y supongamos que existe una función inyectiva $f : A \to B$. Entonces existe una función $g : A \to B$ biyectiva.*

Demostración. Es claro que si $B = f(A)$ no hay nada que probar. El problema surge cuando $f(A) \subsetneq B$. Para tener en mente, un ejemplo sería $A = \mathbb{N}, B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 3\}$ y $f : A \to B$ por $f(n) = n + 5$. Procedemos de la siguiente forma: sea $A_0 = A, B_0 = B, A_{i+1} = f(A_i), B_{i+1} = f(B_i)$. Resulta que $A_0 \supset B_0 \supset A_1 \supset B_1 \supset \ldots$ Definimos entonces $g : A \to B$ así: si $x \in A_n - B_n$ para algún $n \geq 0$ entonces $g(x) = f(x)$. De lo contrario, definimos $g(x) = x$. Es fácil ver que g es una biyección. $\square$

Corolario 2.0.1 (Cantor-Berstein)**.** *Sean A y B dos conjuntos. Si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A$ entonces $\#A = \#B$.*

Definición 2.0.2. Decimos que un conjunto A es *finito* si $A = \emptyset$ o $\#A = \#\{1, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De contrario decimos que A es *infinito*.

El siguiente resultado básico es conocido como el Principio del Palomar: si tenemos mas palomas que palomares (casetas) entonces en algún palomar (caseta) necesariamente habrá mas de una paloma.

Lema 2.0.3 (Principio del Palomar)**.** *Si A es finito, no existe $f : A \to B$ inyectiva con $B \subsetneq A$.*

Demostración. Ejercicio. □

El siguiente lema es una caracterización importante de los conjuntos infinitos.

Lema 2.0.4. *Sea A un conjunto. Son equivalentes:*

1. *Existe $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva*

2. *Existe $g : A \to B$ inyectiva con $B \subsetneq A$.*

3. *A es infinito*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: Sea $a_n = f(n) \in A$. Definimos $g : A \to A - \{a_0\}$ así: $g(a_n) = a_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ y $g(x) = x$ si $x \notin f(\mathbb{N})$.

$(2 \Rightarrow 3)$: es el principio del palomar

$(3 \Rightarrow 1)$: Sea $a_0 \in A$. Definimos $f(0) = a_0$. Como $A - \{a_0\}$ es no vacío, existe $a_1 \in A - \{a_0\}$ y definimos $f(1) = a_1$. Inductivamente definimos $f(n)$ como un elemento de $A - \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ (puesto que es no vacío). [3] □

Corolario 2.0.2. 1. *$\mathbb{N}$ es infinito*

2. *Si A es infinito, entonces $\#\mathbb{N} \leq \#A$.*

Definición 2.0.3. Decimos que un conjunto A es numerable si es finito o $\#A = \#\mathbb{N}$. Decimos que es infinito numerable si $\#A = \#\mathbb{N}$.

Como conclusión del lema anterior tenemos que "infinito numerable" es el menor cardinal que un conjunto infinito puede tener. Cantor lo denoto por $\aleph_0$ (primera letra del alfabeto hebreo).

Proposición 2.0.1. *Los siguientes conjuntos son infinito numerables: $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^k, \mathbb{Q}$.*

Demostración. Hagamos un esquema para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. La demostración de la numerabilidad de los demás es similar y queda como

[3] Cuidado: en realidad se precisa el axioma de elección, pero de ahora en adelante haremos uso de este tipo de argumento sin mencionarlo. Ver lista de ejercicios para una prueba mas cuidadosa.

ejercicio. Coloquemos $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en forma “matricial”.

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0) & (1,0) & (2,0) & \ldots & (n,0) & \ldots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & \ldots & (n,1) & \ldots \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & \ldots & (n,2) & \ldots \\
\ldots & & & & & \\
(0,m) & (1,m) & (2,m) & \ldots & (n,m) & \ldots
\end{array}$$

Luego, definimos $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobreyectiva indicando como numerar los elementos de esta matriz, comenzando por el vértice $(0,0)$ siguiendo por la diagonal $(1,0)$ y $(0,1)$, luego por la diagonal $(2,0),(1,1)$ y $(0,2)$ y así sucesivamente.

Para demostrar que $\mathbb{N}^k$ es numerable se procede por inducción. De todas maneras también se puede demostrar directamente dando una función inyectiva de $\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ eligiendo $p_1,...,p_k$ primos diferentes y asociando a cada k-upla $(n_1,n_2,...,n_k)$ el natural $p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$. $\square$

Lema 2.0.5.

1. *Si $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos numerables entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable.*
2. *Producto finito de conjuntos numerables es numerable*
3. *Si A es infinito y B es numerable entonces $\#(A\cup B)=\#A$.*

Demostración. Para el primer ítem vamos a construir una función $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sobreyectiva. Para cada n sabemos que existe $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ sobreyectiva. Luego definimos $f(n,m)=f_n(m)$. El segundo y tercer ítem quedan como ejercicios. $\square$

Veamos ahora un conjunto que no es infinito numerable! De hecho, veremos que $\mathbb{R}$ no es numerable, teniendo entonces una cardinalidad mayor que los naturales. En particular, tenemos diferentes tipos de infinito! La cardinalidad de $\mathbb{R}$ también se conoce como *potencia del continuo* y se denota por la letra c. Este importante y singular resultado es debido a G. Cantor.[4]La demostración que

[4]El artículo original, publicado en 1874 en Crelle's Journal fur die reine und angewandte Mathematik, de sólo 3 páginas lleva el extraño titulo “Sobre una propiedad de la colección de todos los números algebraicos reales”. ¿Qué llevó a G. Cantor colocar este nombre tan extraño siendo un resultado tan sorprendente? Parece ser que lo hizo para despistar a Kronecker, que era editor de la revista y que ya había hecho una virulenta oposición hacia argumentos de tipo “infinito” (por ej. contra el teorema de Bolzano-Weiestrass y contra los números irracionales en general) y que posteriormente ejerció una “persecución” sobre Cantor. Ver [D1]

veremos no es la demostración original, pero una demostración posterior por el mismo Cantor. Esta elegante y genial prueba se conoce como el *argumento diagonal de Cantor*.

Teorema 2.0.1. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es numerable.*

Demostración. Vamos a mostrar que el intervalo $(0,1)$ no es numerable ya que $g:\mathbb{R}\to(0,1)$ dada por $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ es una biyección. Sea entonces $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ una función. Para cada real en $(0,1)$ usaremos su expresión decimal (si tuviera dos, elegimos una cualquiera). Así:

$$\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0,\mathbf{a_0^0}a_1^0a_2^0a_3^0\dots \\ f(1) & = & 0,a_0^1\mathbf{a_1^1}a_2^1a_3^1\dots \\ f(2) & = & 0,a_0^2a_1^2\mathbf{a_2^2}a_3^2\dots \\ \dots & & \\ f(n) & = & 0,a_1^na_2^na_3^n\dots\mathbf{a_n^n}\dots \\ \dots & & \end{array}$$

donde hemos destacado los elementos de la "diagonal". Ahora, para cada n sea $b_n\in\mathbb{N}$ tal que $1\leq b_n\leq 8$ y $b_n\neq a_n^n$. Formemos el número real r cuya expresión decimal es $r=0,b_0b_1b_2b_3\dots$ Resulta entonces que $r\notin f(\mathbb{N})$ pues ese numero real es distinto de $f(n)$ para cualquier n (al diferir de cada $f(n)$ al menos en una cifra de su expresión decimal). Luego, no existe $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ sobreyectiva. □

Sea A un conjunto. Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ al *conjunto partes* de A, es decir el conjunto de los subconjuntos de A :

$$\mathcal{P}(A)=\{B:B\subset A\}.$$

Por ejemplo, si $A=\{1,2,3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Cantor generalizó el argumento de la diagonal para probar que el conjunto partes de un conjunto siempre tiene mayor cardinal!

Teorema 2.0.2. *Sea A un conjunto. Entonces $\#A<\#\mathcal{P}(A)$.*

Demostración. Sea $f:A\to\mathcal{P}(A)$ una función. Veremos que f *no* puede ser sobreyectiva. Consideremos el conjunto $B=\{a\in A:a\notin f(a)\}$. Este conjunto

$B \in \mathcal{P}(A)$ no puede estar en la imagen por f. Por absurdo supongamos que existe $a \in A$ tal que $f(a) = B$. Ahora, si $a \in B$ llegamos a un absurdo, pues por definición tendríamos que $a \notin B$. Por otro lado, si $a \notin B$ concluimos que $a \in B$. Luego, es imposible que B esté en la imagen de f.

□

Para fijar ideas, ejemplifiquemos la construcción de la demostración anterior en el caso de una $f : \{0,1,2,3,4,5\} \to \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5\})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathit{0} & \to & \{\mathit{0},1,2,3\} \\ \mathbf{1} & \to & \{\emptyset\} \\ \mathit{2} & \to & \{0,\mathit{2},4,5\} \\ \mathbf{3} & \to & \{1,4\} \\ \mathbf{4} & \to & \{1,3,5\} \\ \mathit{5} & \to & \{0,1,2,\mathit{5}\} \end{array}$$

Çolocamos en *itálica* los $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ tal que $n \in f(n)$ y en **negrita** los n tales que $n \notin f(n)$. Nuestro conjunto B estaría formado entonces por $B = \{1,3,4\}$ que no está en la imagen de f.

Bertrand Russell, estudiando esta demostración, formuló la conocida *paradoja de Russell* sobre la NO existencia de un *conjunto universal*. Supongamos que existiese un conjunto universal $\mathcal{U}$ que contuviera todos los conjuntos. Entonces consideremos el conjunto $X = \{A : A \notin A\}$, es decir, es el conjunto formado aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos. Luego nos preguntamos $X \in X$? si la respuesta es si, entonces $X \notin X$. Si la respuesta es no, entonces $X \in X$. Hay una conocida ejemplificación de esta paradoja conocida como el *barbero de Sevilla*. Resulta que el barbero de Sevilla afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos. Pregunta: el barbero de Sevilla se afeita a sí mismo? Si la respuesta es si, entonces no se afeita a sí mismo, si la respuesta es no, entonces se afeita a sí mismo.

Observación 2.0.1. Si A es finito, digamos $\#A = n$, entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$ (ejercicio).

Lema 2.0.6. *Sea A un conjunto. Entonces $\mathcal{P}(A)$ está en correspondencia biunívoca con el conjunto $\{f : A \to \{0,1\}\}$ de funciones de A en $\{0,1\}$.*

Demostración. Sea $B \subset A$ un subconjunto cualquiera de A. Le asociamos la siguiente función $f_B : A \to \{0,1\}$ así: $f_B(a) = 1$ si $a \in B$ y $f_B(a) = 0$ si $a \notin B$. Es claro que $B \to f_B$ es una función biyectiva entre $\mathcal{P}(A)$ y $\{f : A \to \{0,1\}\}$. □

Notación: Si A y B son dos conjuntos, denotamos por $A^B = \{f : B \to A\}$. Así, $\{0,1\}^A = \{f : A \to \{0,1\}\}$ y su cardinal (por tener $\{0,1\}$ dos elementos), se denota por 2^A.

Teorema 2.0.3. *El cardinal de* $\mathbb{R}$ *es* $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Como sabemos que $\#\mathbb{R} = \#[0,1]$ demostraremos que $\#[0,1] = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Para cada real $r \in [0,1]$ tomamos su representación diádica:

$$r = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{2^k} \quad \text{donde} \quad a_k = 0, 1.$$

Esta representación es única a menos que r sea un diádico, es decir un numero de la forma $t = \frac{j}{2^n}$ con $0 \leq j \leq 2^n$. En este caso si $t = r = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{2^k}$ se verifica que existe $k_0 \geq 0$ tal que:

$$a_k = b_k \text{ si } k < k_0,\ a_{k_0} = 0, b_{k_0} = 1, \ \text{ y } a_k = 1 \ \forall\ k > k_0, b_k = 0 \ \forall\ k > k_0$$

(o viceversa intercambiando los papeles de a_k y b_k.). Para estos reales elegimos la representación tal que $a_k = 1$ a partir de un cierto k_0.

Ahora, $B = \{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f(n) = 0\ \forall n > n_0 \text{ para algún } n_0\}$ es numerable (ejercicio). Luego $g : \mathbb{R} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} - B$ definida como $g(r) = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde $r = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{2^k}$ es una biyección. Luego $\#\mathbb{R} = \#(\{0,1\}^{\mathbb{N}} - B)$. Como B es numerable y que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = (\{0,1\}^{\mathbb{N}} - B) \cup B$ concluimos que $\#\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \#(\{0,1\}^{\mathbb{N}} - B) = \#\mathbb{R}$. □

Para terminar este capitulo mencionaremos uno de los problemas que obsesionó a G. Cantor: *hay otros cardinales de infinito entre* $\aleph_0$ *(cardinal de* $\mathbb{N}$*) y el cardinal del continuo* c *(el cardinal de los reales)?*[5] En otras palabras, es el continuo el cardinal siguiente a numerable? La hipótesis del continuo dice que no hay otros cardinales de infinito entre $\aleph_0$ y c :

$$\text{Hipótesis del Continuo: } c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

[5]G. Cantor estuvo obsesionado con este problema, y varias veces encontró una demostración de la veracidad o la falsedad de la afirmación para luego poco tiempo después encontrar un error. Cantor tuvo una crisis nerviosa y fue internado en un hospital psiquiátrico por primera vez en 1884. Algunos autores vinculan su crisis nerviosa con su obsesión por el infinito (ver [B]), pero no es una opinión unánime (ver[D1]). Como muestra de su "locura" cuando salió del hospital dedicó no pocos esfuerzos a probar que Francis Bacon era el autor de las obras de Shakespeare. Cantor volvió reiteradas veces a ser internado en el hospital Nervenklinik, donde murió en 1918.

donde $\aleph_1$ es el siguiente cardinal infinito (o transfinito) de $\aleph_0$. Kurt Gödel probó en los años 1930s que tanto la hipótesis del continuo como el axioma de elección son consistes con la Teoría de Conjuntos ZF. Paul Cohen probó la independencia de la hipótesis del continuo y del axioma del elección del resto de los axiomas de la Teoría de Conjuntos. Por esta contribución Cohen recibió la medalla fields en 1966, siendo la única vez que se la otorgado este premio a alguien en el área de Lógica y Fundamentos (sin embargo vale la pena mencionar que su PhD en matemática fue en Análisis Armónico).

2.1. Ejercicios

2.1.1. Conjuntos y Funciones

(1) Si I es un conjunto y A_α es un conjunto para cada $\alpha \in I$, entonces: $[\cup A_\alpha]^c = \cap A_\alpha^c$ y $[\cap A_\alpha]^c = \cup A_\alpha^c$.

(2) Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $\{B_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de Y.

a) Probar que f^{-1} preserva inclusiones, uniones, intersecciones, complementos y diferencias:

(I) Si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(II) $f^{-1}(\cup B_\alpha) = \cup f^{-1}(B_\alpha)$

(III) $f^{-1}(\cap B_\alpha) = \cap f^{-1}(B_\alpha)$

(IV) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$.

(V) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$

b) Mostrar que f preserva sólo inclusiones y uniones:

(I) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(II) $f(\cup A_\alpha) = \cup f(A_\alpha)$

(III) $f(\cap A_\alpha) \subset \cap f(A_\alpha)$. Mostrar que la inclusión puede ser estricta. Probar que se da la igualdad si f es inyectiva.

(IV) Hay alguna relación entre $f(A^c)$ y $[f(A)]^c$?

c) (I) Probar que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ y se da la igualdad si f es inyectiva

(II) Probar que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

(3) Denotamos por la función identidad en un conjunto C por $i_C : C \to C$ donde $i_C(x) = x$ para todo $x \in C$. Dada $f : A \to B$ decimos que una función $g : B \to A$ es una *inversa a izquierda* de f is $g \circ f = i_A$ y decimos que $h : B \to A$ es una *inversa a derecha* si $f \circ h = i_B$.

a) Mostrar que si f tiene inversa a izquierda entonces f es inyectiva, y que si f tiene inversa a derecha entonces f es sobreyectiva.

b) Dar una ejemplo de una función que tenga inversa a izquierda pero no a derecha y un ejemplo de una función con inversa a derecha pero no izquierda.

c) ¿Puede una función tener mas de una inversa a izquierda?, ¿y a derecha?

(4) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de X, se define el límite superior como :

$$\limsup_n A_n = \cap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} A_k$$

y el límite inferior como:

$$\liminf_n A_n = \cup_{n\geq 0} \cap_{k\geq n} A_k$$

Probar que

a) $\cap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \cup_n A_n$.

b) Si A_n es una sucesión creciente de conjuntos, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cup A_n$. Si es decreciente, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \cap A_n$

c) $x \in \limsup A_n$ si y sólo si x pertenece a infinitos A_n. Además $x \in \liminf A_n$ si y sólo si x pertenece a todos salvo una cantidad finita de los A_n.

d) Sea $\{a_n : n \geq 0\}$ una sucesión de números reales. Sea $A_n = (-\infty, a_n)$. ¿Qué dan el límite superior y el límite inferior de los conjuntos A_n? Repetir el ejercicio para $A'_n = (-\infty, a_n]$ y para $B_n = (a_n, +\infty)$

2.1.2. Relación de equivalencia

Sea A un conjunto. Una relación en A es subconjunto R de $A \times A$. Hagamos la siguiente notación:

$$x \sim_R y \text{ o } xRy \text{ si y solamente si } (x, y) \in R.$$

Decimos que la relación es de equivalencia si se cumple lo siguiente:

1. $x \sim x$ para todo $x \in A$.
2. Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.
3. Si $x \sim y$ e $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

Si R es una relación de equivalencia, la *clase de equivalencia* de x es el conjunto $[x] = \{y \in A : x \sim_R y\}$. Denotamos por $A/\sim$ el conjunto de las clases de equivalencia (también llamado *cociente*).

(5) Sea A un conjunto y $\sim_R$ una relación de equivalencia. Probar que el conjunto de las clases de equivalencia forman una *partición* de A (recordar que una colección de subconjuntos no vacios $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una partición de A si $A = \cup A_\alpha$ y que si $\alpha \neq \alpha'$ entonces $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$.)

(6) Probar que las siguientes son relaciones de equivalencia:

a) En $\mathbb{R}$ definimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$.

b) En $\mathbb{R}^2$ definimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^2$.

c) En $\mathbb{R}^2$ definimos $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si $x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

(7) Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Definimos una relación en A por

$$x \sim y \text{ si } f(x) = f(y).$$

a) Mostrar que es una relación de equivalencia.

b) Sea $A/\sim$ es conjunto de las clases de equivalencia. Mostrar que hay una correspondencia biyectiva entre $A/\sim$ y B.

c) En los siguientes casos explicitar la relación de equivalencia:

(I) $f : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi i t}$.

(II) $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ por $f(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2})$.

(III) $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$ por $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$.

2.1.3. Axioma de elección y Producto Cartesiano

El *Axioma de elección* dice que:

Dada una colección de conjuntos no vacíos y disjuntos existe un conjunto formado por exactamente un elemento de cada conjunto de la colección.

En otras palabras, si $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ es una colección de conjuntos disjuntos, existe un conjunto C tal que $C \cap A_i$ es un único elemento para cada $i \in I$.

(8) *Existencia de una función de elección* Sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos). Probar que existe una función

$$c : \mathcal{A} \to \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

tal que $c(A)$ es un elemento de A para cada $A \in \mathcal{A}$.

Sugerencia: para cada $A \in \mathcal{A}$ considerar $A' = \{(A, x) : x \in A\}$. Observar que A' es un subconjunto del producto cartesiano $\mathcal{A} \times \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Probar que $\mathcal{C} = \{A' : A \in \mathcal{A}\}$ es una colección de subconjuntos no vacíos y disjuntos de $\mathcal{A} \times \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Usar ahora el axioma de elección para concluir.

(9) Justificar “formalmente” la demostración del Lema 2.0.4: Si A es infinito entonces existe $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva.

(10) *a*) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces existe una inversa por derecha de f.

b) Probar que si $f : X \to Y$ es inyectiva, entonces f tiene una inversa por izquierda; se precisa el Axioma de elección?

Dado un conjunto de índices I y un conjunto X_α para cada $\alpha \in I$, se define el producto cartesiano de los conjuntos X_α como

$$\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \cup_{\alpha \in I} X_\alpha \ : \ f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in I\}$$

Por ejemplo, si X es un conjunto y $I = \{1, \ldots, n\}$ entonces el producto $\Pi_{1 \leq k \leq n} X$ no es otra cosa que el conjunto de las n-uplas ordenadas de elementos de X, o sea, es lo que habitualmente se llama X^n. En general, si todos los X_α son iguales a un conjunto X entonces escribimos X^I como abreviación para $\Pi_{\alpha \in I} X$. Note que X^I es el conjunto de todas las funciones de I en X.

(11) Probar que el Axioma de elección es equivalente a que dada una colección arbitraria de conjuntos no vacíos $X_\alpha, \alpha \in I$ el producto cartesiano $\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset$.

2.1.4. Relación de orden y Lema de Zorn

Una relación en X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Un orden, también dicho orden parcial, es una relación R en un conjunto X que cumple dos propiedades:
La transitiva: $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ impican $(x, z) \in R$.
La antisimétrica: $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R$ implican $x = y$.

Una relación es de orden total si dados x e y, dos elementos distintos de X, se cumple que $(x, x) \in R$ y que $(x, y) \in R$ o $(y, x) \in R$.

En general se usa una notación más sugestiva: $(x, y) \in R$ se escribe $x \geq y$. Entonces suele ponerse $(X, \geq)$ para significar que se ha considerado en X el orden $\geq$, y se llama al par $(X, \geq)$ un conjunto ordenado. En los reales $\mathbb{R}$ se tienen los órdenes usuales $\leq$, $\geq$. Convénzase que todos son órdenes totales.

(12) Sea Z es un conjunto cualquiera y $\mathcal{P}(Z)$ denota al conjunto de los subconjuntos de Z, defina $R \subset \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z)$ como $(A, B) \in R$ sii $A \subset B$. Probar que es una relación de orden parcial (pero no total).

(13) Sean $(X, >_X)$ y $(Y, >_Y)$ dos conjuntos (parcialmente) ordenados. Se define un relación en $X \times Y$ como $(x, y) \geq (x', y')$ sii $x \geq_X x'$ y $y \geq_Y y'$. Probar que es un orden parcial. Si los ordenes son totales, el orden en el producto es total?

(14) (Orden lexicográfico) Sean $(X, >_X)$ y $(Y, >_Y)$ dos conjuntos (parcialmente) ordenados. Se define un relación en $X \times Y$ como $(x, y) \geq (x', y')$ si $x >_X x'$ o bien $x = x'$ y $y >_Y y'$. Probar que es un orden (parcial). Probar que si ambos órdenes son totales, entonces el orden lexicográfico es total.

Si $(X, \geq)$ es un conjunto ordenado, e Y es subconjunto de X. Si Y es subconjunto de X decimos que a es cota de Y si $a \geq y$ para todo $y \in Y$; a es máximo de Y si además $a \in Y$. Un elemento $a \in Y$ es maximal en Y si se cumple que: "Para todo $y \in Y$ tal que $y \geq a$ se tiene $y = a$".

El siguiente Lema, conocido como Lema de Zorn, es consecuencia del Axioma de Elección (de hecho son equivalentes!):

Lema de Zorn. *Sea $(X, >)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior, entonces existe un elemento* *maximal en X.*

(15) Sea V un espacio vectorial (no trivial). Una base (de Hamel) de V es un subconjunto B de V tal que: (i) todo subconjunto finito de B es linealmente independiente, y (ii) todo vector de V se escribe como una combinación lineal finita de elementos de B. Probar que todo espacio vectorial tiene una base.

2.1.5. Cardinalidad

(16) *(Principio del palomar)* Probar que si A es un conjunto finito y $f : A \to A$ es inyectiva entonces f es biyectiva.

(17) Probar que unión finita y producto finito de conjuntos finitos es finita.

(18) Probar que si A is infinito y B es numerable entonces $\#(A \cup B) = \#A$.

(19) Sea $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ es finito}\}$. Probar que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ es numerable.

(20) *a*) Un número real x se dice algebraico (sobre el cuerpo de los racionales) si satisface una ecuación polinómica de grado positivo de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_i son racionales. Asumiendo que toda ecuación polinómica tiene a lo sumo finitas raices, mostrar que el conjunto de los números algebraicos es finito.

b) Un número real es trascendente si no es algebraico. Mostrar que el conjunto de los números trascendentes tiene la potencia del continuo.

(21) Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es no numerable entonces A tiene un punto de acumulación.

(22) Probar que el conjunto de bolas de $\mathbb{R}^n$ (con las distancia euclídea) cuyo centro tiene todas sus coordenadas racionales y cuyo radio es racional es numerable.

(23) Probar que $\#\mathbb{R}^k = \#\mathbb{R}$.

(24) *a*) Probar que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$.

b) ¿Cuál es el cardinal de $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?

(25) *a*) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ y a $A \subset V$ un conjunto numerable. Probar que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A con coeficientes en $\mathbb{Q}$ es numerable.

b) Considere $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Probar que una base de Hamel es no numerable. ¿Que cardinal tiene?

Ejercicios Complementarios

(26) *(Álgebra transfinita)* Sean A y B dos conjuntos. Se definen

- $\#A + \#B = \#(A \cup B)$
- $\#A.\#B = \#(A \times B)$
- $\#A^{\#B} = \#\{f : B \to A\}$.

a) Sean A y B tales que B es infinito y $\#A \leq \#B$. Probar que

(I) $\#A + \#B = \#B$
Sugerencia: probar mediante el Lema de Zorn que todo conjunto infinito se escribe como unión disjunta de conjuntos numerables.

(II) $\#B.\#B = \#B$
Sugerencia: Sea $L = \{(E, f_E) : E \subset B, f_E : E \to E \times E \text{ biyectiva}\}$. Encontrar un elemento maximal (M, f) y probar que $B - M$ es finito.

(III) Si $A \neq \emptyset$ entonces $\#A.\#B = \#B$.

b) Sea $\#A = a, \#B = b$ y $\#C = c$. Probar que

(I) $(ab)^c = a^c b^c$
(II) $a^{(b+c)} = a^b + a^c$.
(III) $(a^b)^c = a^{bc}$.

(27) *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ para todos } a, b \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Probar que si f es continua entonces f es lineal

b) Construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satifaga (2.1) y que no sea continua en ningún punto.

Capítulo 3

Espacios topológicos y continuidad

Como mencionamos en la introducción, la idea de un espacio topológico es un conjunto donde hay una noción de *cercanía*, y las funciones continuas son aquellas que preservan la noción de cercanía o proximidad: puntos cercanos son enviados por la función en puntos cercanos. ¿Cómo podemos expresar esto? En los cursos de cálculo aprendemos una noción fundamental para poder definir conceptos básicos (como por ejemplo la noción de límite): el concepto de *punto de acumulación* de un conjunto. Decimos que un punto p es de acumulación de un conjunto A si hay puntos de A (diferentes de p) *arbitrariamente cerca* de p. Claro que nos falta decir que significa *arbitrariamente cerca*. Pero se podría pensar que una topología en un conjunto X nos haría poder decidir si un punto $p \in X$ es punto de acumulación de un subconjunto $A \subset X$. Ahora volvamos a la recta real y la noción de punto de acumulación. Hay varias formas de definirlo, pero una forma de decir que un punto $p \in \mathbb{R}$ es de acumulación de un conjunto A es decir que cualquier intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ que contenga a p contiene puntos A (diferentes de p). Pero en vez de hablar de intervalo abierto, podríamos decir: p es de acumulación de A si cualquier abierto que contenga a p contiene puntos de A (diferentes de p). Por lo tanto para tener la noción de punto de acumulación nos basta saber cuales son los conjuntos *abiertos*. Por esto, dar una topología es decir cuales son los conjuntos abiertos. Y todas las nociones topológicas del espacio se referirán pues a los conjuntos abiertos. Obviamente los conjuntos abiertos tienen que satisfacer ciertas propiedades para efectivamente ser una topología. Pero estas propiedades son muy sencillas y basta mirar las propiedades que tienen los conjuntos abiertos de la recta: uniones arbitrarias de abiertos es abierto e intersección finita de abiertos es abierto.

Definición 3.0.1. Sea X un conjunto. Una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X es una *topología* en X si se verifica:

- $\emptyset \in \tau,\ X \in \tau$.
- Unión de elementos de τ pertenece a τ : si $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos tales que $X_\alpha \in \tau\ \forall\, \alpha \in I$ entonces $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \in \tau$.
- Intersección finita de elementos de τ pertenece a τ : Si $X_1, \ldots, X_n$ es una familia finita de conjuntos con $X_i \in \tau$ para todo $i = 1, ..., n$ entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \tau$.

A los elementos de τ los llamaremos *abiertos*, y diremos que (X, τ) es un *espacio topológico*.

A lo largo de este capítulo (como de los siguientes) y en los ejercicios veremos una buena lista de ejemplos de espacios topológicos para desarrollar nuestra idea de una topología así como para testear nuestra intuición y diferentes ideas. Todo topólogo tiene que llevar un portafolio con un gran abanico de ejemplos.

• **$\mathbb{R}$ con la topología usual:** En $\mathbb{R}$ decimos que un subconjunto A es abierto si para todo $x \in A$ existe un intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$. Es fácil ver que la familia τ de conjuntos abiertos es una topología en $\mathbb{R}$ llamada la *topología usual*.

• **Topología trivial:** Sea X un conjunto cualquiera definimos $\tau = \{\emptyset, X\}$. Esta topología se llama *trivial*.

• **Topología discreta:**. Sea X un conjunto cualquiera y definimos $\tau = \mathcal{P}(X)$. Es fácil ver que τ es una topología que se conoce como la topología *discreta*. En esta topología *cualquier* subconjunto es un conjunto abierto. En particular, para cualquier $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto abierto.

• **Topología cofinita:**. Sea X un conjunto cualquiera y definimos $\tau = \emptyset \cup \{A \subset X : A^c \text{ es finito}\}$. Es claro que $\emptyset$ y X pertenecen a τ. Por otra parte si

$X_\alpha, \alpha \in I$ es una familia de conjuntos en τ entonces $(\cup_{\alpha\in I} X_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I} X_\alpha^c$ que claramente es finito. Por otra parte si $X_1, ..., X_n$ es una familia finita de elemento de τ entonces $(\cap_{i=1}^n X_i)^c = \cup_{i=1}^n X_i^c$ que es finito por ser unión finita de conjuntos finitos. Esta topología se llama *topología del complemento finito o cofinita.*

• **Topología conumerable:** Sea X un conjunto cualquiera y definimos $\tau = \emptyset \cup \{A \subset X : A^c \text{ es numerable}\}$. Análogamente al ejemplo anterior se ve fácilmente que τ es una topología conocida como *topología del complemento numerable o conumerable*

• **$\mathbb{R}$ con la topología de las semirrectas a izquierda:** En $\mathbb{R}$ consideramos $\tau = \emptyset \cup \mathbb{R} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que es una topología: si $X_\alpha = (-\infty, a_\alpha)$ es una familia en τ entonces $\cup_\alpha X_\alpha = (-\infty, \sup_\alpha a_\alpha) \in \tau$ y si $X_i = (-\infty, a_i), i = 1, , .n$ es una familia finita en τ entonces $\cap_i X_i = (-\infty, \min_i a_i) \in \tau$.

• **Espacios métricos:** Los espacios métricos forman una clase importante de espacios topológicos. Son espacios topológicos mas "intuitivos" y tienen una referencia "geométrica" muy fuerte. Sea X un conjunto. Una *métrica o distancia* en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $d(x, y) \geq 0$ para cualquier $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$. Esta propiedad se conoce como *desigualdad triangular.*

Veamos algunos ejemplos:

- En $\mathbb{R}$ definimos $d(x, y) = |x - y|$, es la distancia usual o euclídea en $\mathbb{R}$.
- En $\mathbb{R}^k$ definimos $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2}$ es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^k$. Esta distancia proviene de la *norma usual* $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_k^2}$.
- En $\mathbb{R}^2$ definimos la distancia *manhatan* como $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Esta es una métrica "equivalente" a la euclídea, donde las "bolas" son "rombos".

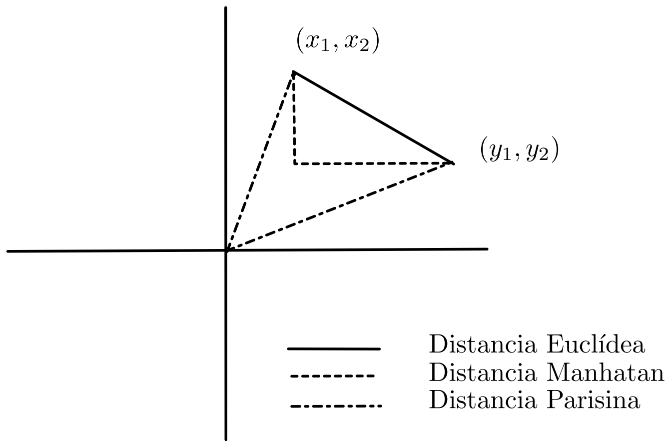


Figura 3.1:

- En $\mathbb{R}^2$ definimos la distancia *parisina*: todas las vías de tren son rayos que parten del origen, la distancia entre dos puntos es la menor distancia que hay que viajar en *metro* para ir de un punto a otro. Así, $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ si x, y no están en un mismo rayo y $d(x, y) = \|x - y\|$ si x, y están en un mismo rayo por el origen (donde $\|x\|$ es la norma usual).
- Sea X un conjunto cualquiera. Definimos una métrica así: $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y en caso contrario $d(x, y) = 1$. Esta distancia se conoce como *discreta*.

Sea (X, d) un espacio métrico. La métrica d induce una topología en X de la siguiente forma: decimos que un conjunto A es abierto si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset A$. Esta topología se llama *topología inducida por la métrica*. El conjunto $B(a, r)$ se llama *bola de centro a y radio r*.

En el caso de $\mathbb{R}^k$ con la métrica euclídea, la topología inducida la llamaremos *topología usual*. Observemos que la métrica discreta en un conjunto X induce la topología discreta: sea A un conjunto y $a \in A$, luego $a = B(a, \frac{1}{2}) \subset A$ y así

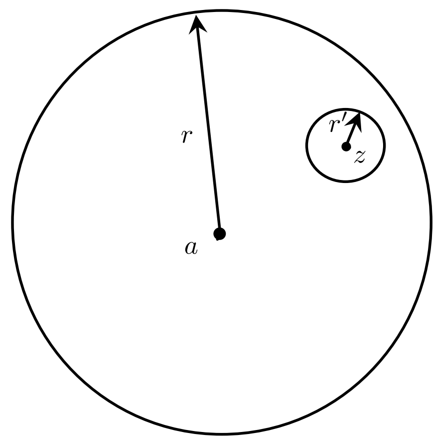


Figura 3.2:

cualquier conjunto es abierto.

Lema 3.0.1. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Sea* $a \in X$ *y* $r > 0$. *Entonces* $B(a,r)$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $z \in B(a,r)$ y sea $r' < r - d(z,a)$. Luego $B(z,r') \subset B(a,r)$ pues si $y \in B(z,r')$ entonces

$$d(y,a) \leq d(y,z) + d(z,a) < r - d(z,a) + d(z,a) = r.$$

□

Una pregunta surge naturalmente: ¿hay topologías que no provienen de una métrica? Si X es un conjunto con mas de un punto y le colocamos la topología trivial, no parece plausible que esta topología provenga de una métrica pues parecería que la distancia entre cualquier par de puntos debiera ser cero, lo cual no puede ser para una distancia. Veamos esto con más cuidado. Si X tiene mas de un punto, la topología trivial no proviene de una métrica: si así fuera, sean x, y dos puntos distintos de X y sea $0 < r < d(x,y)$. Luego $B(x,r)$ es un conjunto abierto que no es vacío ni todo el espacio, lo que no puede ser en la topología trivial. De hecho, vemos una propiedad muy interesante en un espacio métrico: dos puntos distintos tienen bolas que los contienen y son disjuntas. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x, y \in X, x \neq y$ y sea $r, 0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$. Luego $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ (de lo contrario, si existiera z en dicha intersección entonces $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + r < d(x,y)$, absurdo). Esta es una propiedad muy natural e intuitiva.

Definición 3.0.2. Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que es un espacio topológico *Hausdorff* [1] si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U_x, U_y tales que:

- $x \in U_x,\ y \in U_y$.
- $U_x \cap U_y = \emptyset$.

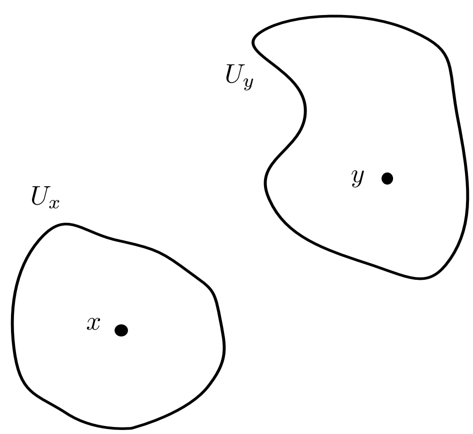


Figura 3.3:

Es decir, un espacio es Hausdorff si dados dos puntos distintos podemos encontrar abiertos disjuntos que contengan a uno y otro punto. Hemos visto entonces que *todo espacio métrico es un espacio topológico Hausdorff*. Luego, si

[1] Felix Hausdorff (1868-1942), matemático alemán, uno de los fundadores de la topología conjuntista. De joven quiso dedicarse a la música y ser compositor, pero sus padres se negaron. Escribió poesía, ensayos filosóficos y teatro bajo el seudónimo de Paul Mongré. A pesar de su gran prestigio como profesor universitario y haber servido al ejercito alemán, fue perseguido por judío en la Alemania nazi. En 1942 se suicida junto a su mujer y cuñada antes de ser llevado a un campo de concentración.

un espacio topológico NO es Hausdorff la topología no puede ser inducida por una métrica. Así, $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito no es Hausdorff (y por lo tanto no proviene de una métrica). De hecho, dos abiertos cualesquiera tienen intersección no vacía: si A y B son abiertos con la topología cofinita entonces $(A \cap B)^c$ es finito y por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$.

Veamos como se definen entonces las nociones de conjunto cerrado, frontera, etc.

Definición 3.0.3. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto y $p \in X$ un punto.

- Decimos que A es *cerrado* si A^c es abierto.
- Un entorno abierto de p es un abierto U_p que contiene a p. Decimos que p es *interior* a A si existe un entorno U_p de p tal que $U_p \subset A$. El conjunto de los puntos interiores se denota por $\overset{\circ}{A}$. Un entorno[2] de p es un conjunto que contiene un entorno abierto de p
- Decimos que p es un *punto de acumulación* de A si para todo entorno U_p de p se tiene que $A \cap (U_p - \{p\}) \neq \emptyset$. Denotamos por A' el conjunto de los puntos de acumulación de A (también llamado conjunto derivado).
- Definimos la *clausura* de un conjunto A como $\overline{A} = A \cup A'$.
- Decimos que p es un punto *frontera* de A si para todo entorno U_p de p se tiene que $U_p \cap A \neq \emptyset$ y $U_p \cap A^c \neq \emptyset$. Denotamos por ∂A el conjunto de los puntos frontera de A.
- Decimos que A es denso si $\overline{A} = X$.

Observación 3.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados, unión finita de cerrados es cerrado e intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Un familia $\mathcal{N}(x)$ de conjuntos que contienen a x en su interior es una *base de entornos de* x (también *base local*) si, dado un abierto A cualquiera que contiene a x, existe $N \in \mathcal{N}(x)$ tal que $N \subset A$. Por ejemplo en un espacio métrico (X, d) la familia $\mathcal{N}(x) = \{B(x, r) : r > 0\}$

[2] Aunque en general los entornos los consideraremos abiertos, salvo expresa mención en contrario.

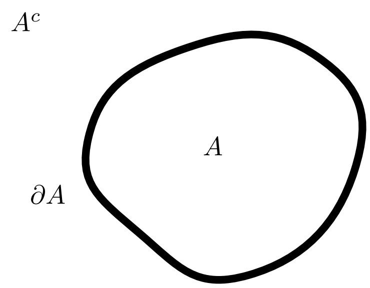


Figura 3.4:

es una base de entornos de x. Si los elementos de $\mathcal{N}(x)$ son abiertos, diremos que es una base de entornos abiertos.

Proposición 3.0.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Un conjunto A es abierto si y solamente si todos sus puntos son interiores.*
2. *Un conjunto A es cerrado si y solamente si $\overline{A} = A$.*

Demostración. La primera parte es directa. Veamos la segunda parte. Supongamos que A es cerrado y sea $p \notin A$. Luego $p \in A^c$ que es abierto (y por lo tanto un entorno de p) Se tiene que $A^c \cap A = \emptyset$ y por lo tanto p no es de acumulación de A. Luego $\overline{A} = A$. Recíprocamente, si $p \notin \overline{A} = A$ entonces existe un entorno U_p de p tal que $U_p \cap A = \emptyset$. □

Observemos que si τ es la topología discreta en un conjunto X, entonces todo subconjunto de X es abierto y cerrado, y no hay puntos de acumulación. Si τ es la topología trivial entonces todo punto es de acumulación del cualquier subconjunto. En $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito se tiene que cualquier punto es de acumulación de un conjunto infinito! Es decir, que si A es infinito, entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$. Esto muestra que en espacios topológicos arbitrarios una sucesión puede converger a mas de un punto.

Definición 3.0.4. Sea (X, τ) un espacio topológico Decimos que una sucesión $a : \mathbb{N} \to X$ converge a p si para todo entorno U_p de p se tiene que existe n_0 tal que $a_n \in U_p$ para todo $n \geq 0$.

En $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito se tiene entonces que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a cualquier real $p \in \mathbb{R}$! Esto resulta bastante contra-intuitivo ya que estamos acostumbrados en cálculo a expresar muchas propiedades en términos de sucesiones. Sin embargo tenemos:

Proposición 3.0.2. *Sea (X,τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces toda sucesión en X converge a lo sumo a un punto.*

Demostración. Ejercicio □

Hemos visto que un conjunto puede tener diferentes topologías. Si (X,τ_1) y (X,τ_2) son espacios topológico sobre el mismo conjunto X decimos que τ_1 es *mas fina* que τ_2 si

$$\tau_1 \supset \tau_2,$$

es decir, si todo abierto según τ_2 es también abierto según τ_1. La topología τ_1 tiene mas abiertos que la topología τ_2 y por lo tanto distingue mejor que puntos son de acumulación de un subconjunto. Observar por un lado que cualquier topología es mas fina que la topología trivial en un conjunto X (en este caso todo punto es de acumulación de cualquier conjunto que no sea el propio punto), mientras que la topología discreta es mas fina que cualquier otra topología. Por ejemplo en $X = \mathbb{R}$, la topología usual es mas fina que la topología del complemento finito o que la topología de las semirrectas a izquierda. Observamos que puede ocurrir que dos topologías no sean "comparables", es decir, ninguna es mas fina que la otra. Por ejemplo en $X = \mathbb{R}$ la topología del complemento finito y la topología de las semirrectas a izquierda no son comparables.

3.1. Bases y Subbases

Para describir o dar una topología muchas veces es más fácil o mas cómodo dar una *base* de la topología.

Definición 3.1.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X es *base* (de una topología) si:

- Todo punto de x pertenece a algún elemento de $\mathcal{B}$. En otras palabras, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Ver Figura 3.5.

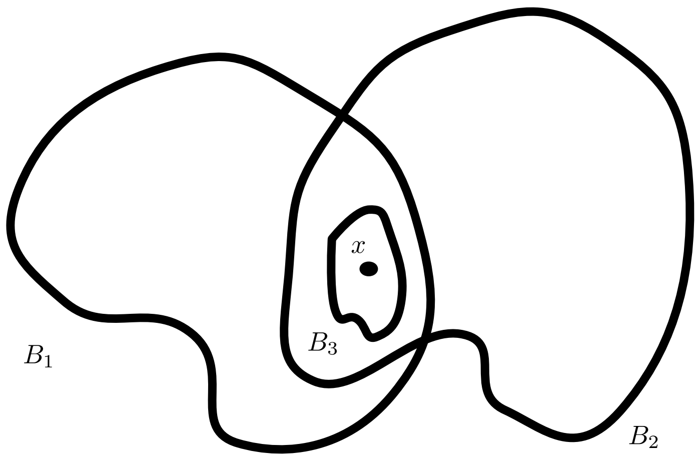


Figura 3.5:

Si $\mathcal{B}$ es una base, entonces define inequívocamente una topología tomando como abiertos las uniones arbitrarias de elementos de la base:

$$\tau = \left\{ A \subset \mathcal{P}(X) : \exists \{B_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{B} \text{ con } A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right\} \cup \emptyset.$$

Observar que la segunda condición de base dice que la intersección de dos elementos de la base es unión de elementos de la base. Otra forma de definir la topología inducida por la base es decir:

$$\tau = \emptyset \cup \{A \subset X : \forall a \in A \ \exists \ B \in \mathcal{B} \text{ such that } a \in B \subset A\}.$$

Veamos algunos ejemplos:

• En $X = \mathbb{R}$, la familia $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología usual.

• En un conjunto X la familia $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de la topología discreta.

• En $\mathbb{R}^2$ la familia de los discos $\mathcal{B} = \{B(a, r) : a \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ es base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

• En $\mathbb{R}^2$ la familia de los interiores de rectángulos $\mathcal{B} = \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ es base también de la topología usual.

• En $\mathbb{R}^2$ la familia $\mathcal{B} = \{\{x\} \times (a, b) : x, a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de una topología

• En $\mathbb{R}$ la familia $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ llamada topología del límite inferior y denotada por $\mathbb{R}_\ell$.

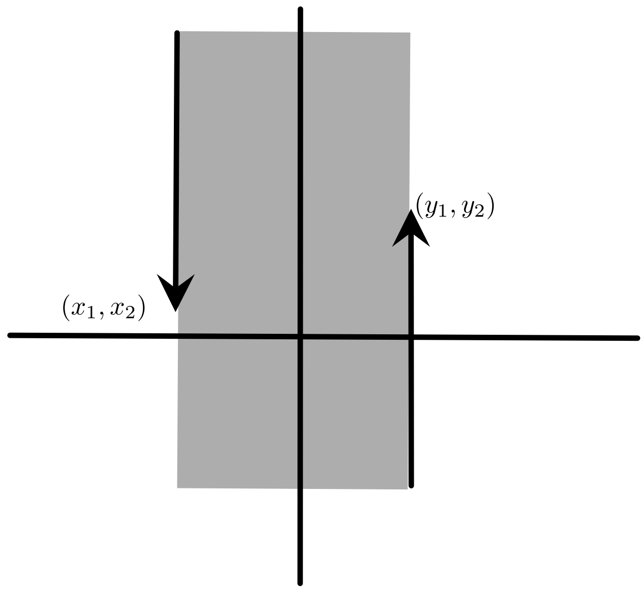


Figura 3.6: El intevarlo (x, y) en el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$

- Sea $(X, \leq)$ un conjunto con un orden total. Definimos entonces una base así: $\mathcal{B} = \{x \in X : a < x < b,\ a, b \in X\} \cup \{x \in X : x < b, b \in X\} \cup \{x \in X : a < x, a \in X\}$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ podemos dar la topología *del orden lexicográfico:* definimos un orden (lexicográfico o del diccionario) en $\mathbb{R}^2$ como $(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$ si $x_1 < y_1$ o si $x_1 = y_1$ y $x_2 < y_2$.

Usando bases podemos definir la *topología producto*.

Lema 3.1.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. La familia*

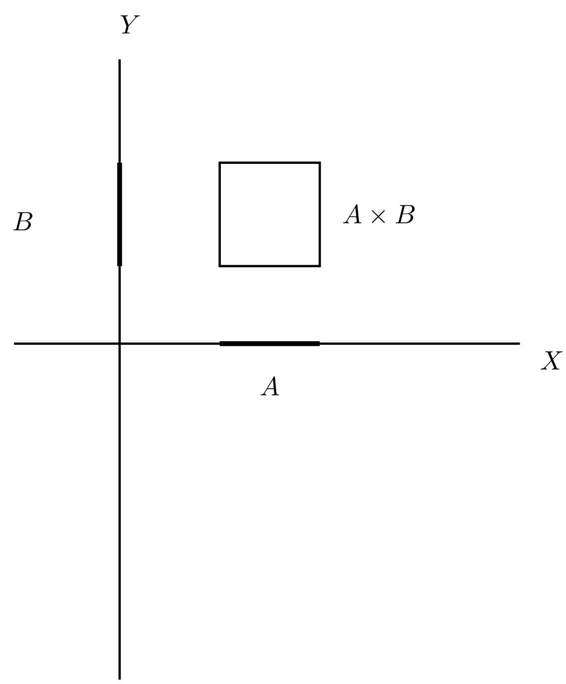
$$\mathcal{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \tau_X, B \in \tau_Y\}$$

es base de una topología en $X \times Y$.

Demostración. Ejercicio $\square$

Definición 3.1.2. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. A la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \tau_X, B \in \tau_Y\}$$



en $X \times Y$ se le llama topología producto.

Hemos visto que un espacio topológico puede tener diferentes bases (por ejemplo $\mathbb{R}^2$ con la topología usual). Decimos que dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de subconjuntos de X son *equivalentes* si dado $B \in \mathcal{B}$ y $x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$ y viceversa. En este caso, se tiene que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ inducen la misma topología en X. Es claro entonces que en $\mathbb{R}^2$ las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ formada por interiores de círculos y de cuadrados respectivamente son equivalentes. También en $\mathbb{R}^2$ las bases $\mathcal{B} = \{\{x\} \times (a, b) : x, a, b \in \mathbb{R}\}$ y la base $\mathcal{B}'$ del orden lexicográfico son equivalentes.

Por otra parte, si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases y se tiene que para todo $B \in \mathcal{B}$ y $x \in B$ existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$ entonces tenemos que la topología inducida por $\mathcal{B}'$ es mas fina que la topología inducida por $\mathcal{B}$. Observemos que esto sucede con la base de $\mathbb{R}^2$ de la topología usual (tomando interiores de cuadrados por ejemplo) y la base del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$. Tenemos entonces que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ es *mas fina* que la topología usual.

Hay una clase muy importante de espacios topológicos, aquellos que admiten una *base numerable*. Un espacio topológico (X, τ) tiene base numerable (o satisface el *segundo axioma de numerabilidad*) si existe una base $\mathcal{B}$ de la topología que tiene una cantidad *numerable* de elementos. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la topología usual tiene base numerable, a saber $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Un espacio topológico es *separable*[3] si existe un conjunto numerable y denso, es decir, existe $S \subset X$ tal que S es numerable y $\overline{S} = X$.

Lema 3.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico que tiene base numerable. Entonces es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ base numerable de X. Para cada B_n elegimos $x_n \in B_n$. Resulta que $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable y denso en X. De hecho, para cualquier abierto $A \in \tau$ existe $B_n \subset A$ para algún n y por lo tanto $x_n \in A$ lo que muestra que S es denso en X. $\square$

Sin embargo, un espacio topológico puede ser separable y no tener base numerable. Por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}_f$ con la topología del complemento finito. Entonces $\mathbb{N}$ es denso y por lo tanto $\mathbb{R}_f$ es separable. Pero no tiene base numerable, ya que si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable de abiertos, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \bigcup_n B_n^c$ y por lo tanto $\mathbb{R} - \{x\}$ es un abierto que no puede ser unión de elementos de B_n ya que $x \in B_n$ para todo n.

Definición 3.1.3. Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* (de una topología) si la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forman una base.

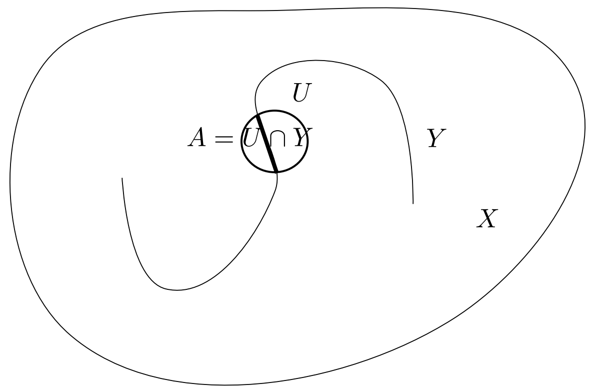
Por ejemplo, en $X = \mathbb{R}$ con $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$ es subbase de $\mathbb{R}$ con la topología usual. También, en $X = \mathbb{R}^2$ la familia $\mathcal{S} = \{\text{semiplanos en } \mathbb{R}^2\}$ es una subbase de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Observación 3.1.1. Sea X un conjunto y $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos tal que $\displaystyle\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$. Entonces $\mathcal{S}$ es subbase de una topología. De hecho

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i : S_i \in \mathcal{S}, i = 1, ..., n \text{ para algún } n \right\}$$

es base puesto que la unión es todo X e intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$ está en $\mathcal{B}$.

[3] Este es un nombre bastante infeliz pero que ha quedado en la literatura



3.2. Topología relativa

Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea Y un subconjunto de X. Podemos dotar a Y de una topología de la siguiente manera:

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}.$$

Es claro que τ_Y es una topología en Y llamada *topología relativa*. Al espacio (Y, τ_Y) también se le conoce como *subespacio topológico* de (X, τ). Un conjunto $A \in \tau_Y$ se llama *abierto en* Y pero tener cuidado que no necesariamente es un abierto en X sino que es la intersección de un abierto en X cortado con Y. Observemos también que un conjunto B es *cerrado* en Y con la topología relativa si B es la intersección de un conjunto cerrado en X con Y.

Veamos algunos ejemplos:

• Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y sea $Y = [0, 1)$ con la topología relativa. Resulta que $[0, 1)$ es abierto y cerrado en Y (ya que todo el espacio siempre es abierto y cerrado), que $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en Y y que $[\frac{1}{2}, 1)$ es cerrado en Y.

• Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual y sea $Y = \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$. La topología relativa en $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ resulta ser la topología usual de $\mathbb{R}$.

• Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subset X$ un subconjunto. Si restringimos la métrica d a Y tenemos que (Y, d) es un espacio métrico. La topología inducida por (Y, d) es la misma que la topología relativa en Y.

• La topología relativa es muy útil para dar topologías a subconjuntos. Por ejemplo, S^1 hereda una topología como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, S^n hereda una topología como subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, y $Gl(n, \mathbb{R})$ hereda una topología como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Observación 3.2.1. • Sea (X, τ) es un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto con la topología relativa τ_Y. Sea $A \subset Y$. Se tiene que la clausura de A en τ_Y es igual a la clausura de A en τ cortado con Y :

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y.$$

• Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de la topología. Sea Y un subconjunto de X. Entonces $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es base de la topología relativa en Y.

Hay algunas propiedades de espacios topológicos que se *comportan bien* al considerar topología relativa. Este es el caso de ser Hausdorff o tener base numerable:

Proposición 3.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$ un subconjunto con la topología relativa τ_Y. Entonces:*

1. *Si (X, τ) es Haudorff también lo es (Y, τ_Y).*

2. *Si (X, τ) tiene base numerable entonces (Y, τ_Y) también tiene base numerable*

Demostración. Ejercicio. □

Sin embargo, ser separable (tener un conjunto numerable y denso) no necesariamente se hereda con la topología relativa. Sea $X = \mathbb{R}$ con la siguiente topología $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$. Es decir, un abierto es cualquier subconjunto que contenga al punto $\{0\}$. Resulta que $(\mathbb{R}, \tau)$ es separable ya que $\{0\}$ es denso!!! Sin embargo, si consideramos $Y = \mathbb{R} - \{0\}$ como subconjunto de X con la topología relativa, obtenemos la topología discreta en $\mathbb{R} - \{0\}$ que no es separable.

3.3. Continuidad

Vamos a definir ahora la noción de *función continua*. Como la topología está definida a partir de abiertos, también la continuidad se define a partir de conjuntos abiertos.

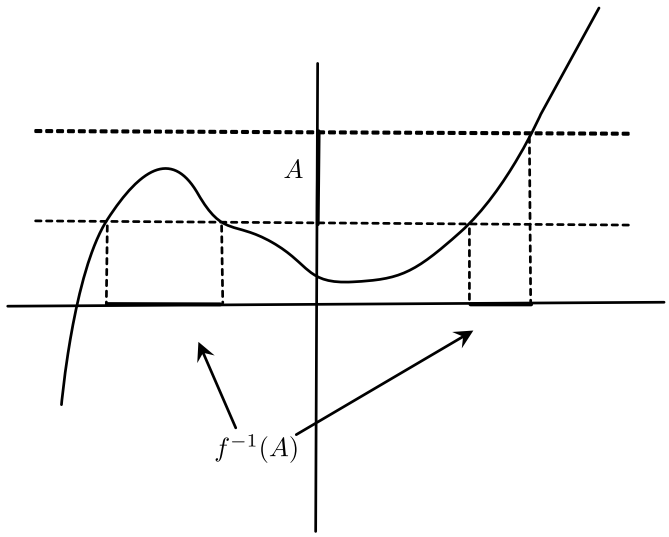


Figura 3.7: La preimagen de un abierto A por una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definición 3.3.1. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es *continua* si para todo abierto $A \in \tau_Y$ se tiene que su preimagen $f^{-1}(A)$ es un abierto en X, es decir, $f^{-1}(A) \in \tau_X$.

En pocas palabras una función es continua si *preimágenes de abiertos son abiertos*. Veamos otras formas equivalentes de la continuidad, en particular que lleva puntos cercanos en puntos cercanos expresado de la siguiente manera: si p está en la clausura de A entonces $f(p)$ está en la clausura de $f(A)$.

Teorema 3.3.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua*
2. *Dado $x \in X$ y V un abierto en Y que contiene a $f(x)$ entonces existe U_x abierto que contiene a x tal que $f(U_x) \subset V$.*
3. *Para todo $A \subset X$ se tiene que si $p \in \overline{A}$ entonces $f(p) \in \overline{f(A)}$.*
4. *Sea B cerrado en Y, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en X. (preimágenes de cerrados son cerrados).*

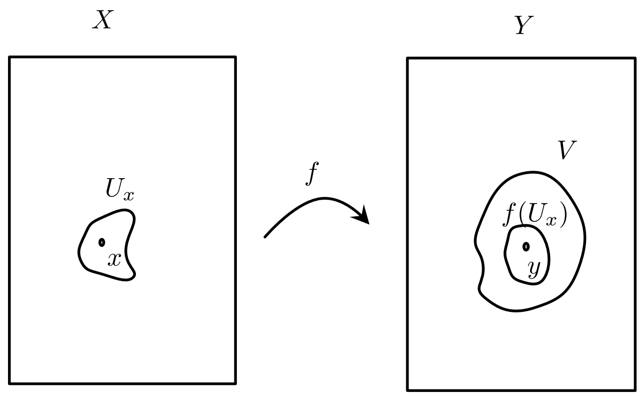


Figura 3.8: Otra forma de la continuidad

Demostración. Veamos que $1 \Rightarrow 2$. Resulta evidente ya que $f^{-1}(V)$ es un abierto que contiene a x.

Para ver que $2 \Rightarrow 3$ supongamos que $f(p) \notin \overline{f(A)}$ y sea V abierto tal que $f(p) \in V \subset \overline{f(A)}^c$. Luego existe un entorno U_p de p tal que $f(U_p) \subset V$. Pero entonces $U_p \cap A = \emptyset$ y concluimos que $p \notin \overline{A}$.

$3 \Rightarrow 4$. Sea B cerrado en Y y sea $A = f^{-1}(B)$. Sea $p \in \overline{A}$, entonces $f(p) \in \overline{f(A)} = \overline{B} = B$ y por lo tanto $p \in A$, es decir $\overline{A} = A$ y A es cerrado.

$4 \Rightarrow 1$. Como $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ se verifica inmediatamente el resultado.

$\square$

Veamos algunos ejemplos:

- En $\mathbb{R}^k$ consideremos la topología usual. La continuidad de una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ coincide con la noción de continuidad vista en los cursos de cálculo.

- Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y solamente si dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x_0, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

- En $X = \mathbb{R}$ consideramos la topología usual τ_u y τ_f la topología del complemento finito. Entonces $id : (\mathbb{R}, \tau_f) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ no es continua. Sin embargo, $id : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_f)$ si es continua. Esto resulta de que τ_u es mas fina que τ_f.

- Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 0$ si $x \leq 0$ y $f(x, y) = 1$ si $x > 0$. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Si consideramos la topología usual en $\mathbb{R}^2$ entonces es claro que f NO es continua. Pero si consideramos la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ resulta que f es continua pues la preimagen de 0 es $\{(x, y) : x \leq 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) < (0, n)\}$ que es abierto con el orden lexicográfico, y la preimagen de 1 también es abierta (es abierta con la usual y por lo tanto también con el orden lexicográfico).

- Sea $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ acotada } \}$ donde decimos que f es acotada si existe M_f tal que $|f(x)| \leq M_f$ para todo $x \in [0, 1]$. Al espacio X le podemos dar una topología inducida por una métrica: $d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$. Sea $x_0 \in [0, 1]$ y consideremos la función evaluación $ev_0 : X \to \mathbb{R}$ definida por $ev_0(f) = f(x_0)$. Resulta que ev_0 es continua pues si A es un abierto de $\mathbb{R}$ y se tiene que $ev_0(f) \in A$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $g \in B(f, \varepsilon)$ resulta que $ev_0(g) \in A$, es decir $ev_0^{-1}(A)$ es abierto. Ver Figura 3.9.

Veamos ahora como se comportan las proyecciones con respecto a la topología producto:

Lema 3.3.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y consideremos la topología producto en $X \times Y$. Las proyecciones*

$$p_X : X \times Y \to X \quad y \quad p_Y : X \times Y \to Y$$

definidas como $p_X(x, y) = x, p_Y(x, y) = y$ son funciones continuas. Mas aún, la topología producto es la menor topología en $X \times Y$ que hace a las proyecciones p_X y p_Y continuas.

Demostración. Si A_X es abierto en X entonces $p_X^{-1}(A_X) = A_X \times Y$ es abierto en $X \times Y$ (de forma análoga p_Y es continua).

Por otra parte, sea τ es un topología en $X \times Y$ donde las proyecciones sean continuas. Dado $A_X \in \tau_X$ y $B_Y \in \tau_Y$ se tiene entonces que $A_X \times Y \in \tau$ y $Z \times B_y \in \tau$. Luego $A_X \times B_Y \in \tau$. Es decir, τ contiene la base de la topología producto. Esto nos dice que τ es mas fina que la topología producto. $\square$

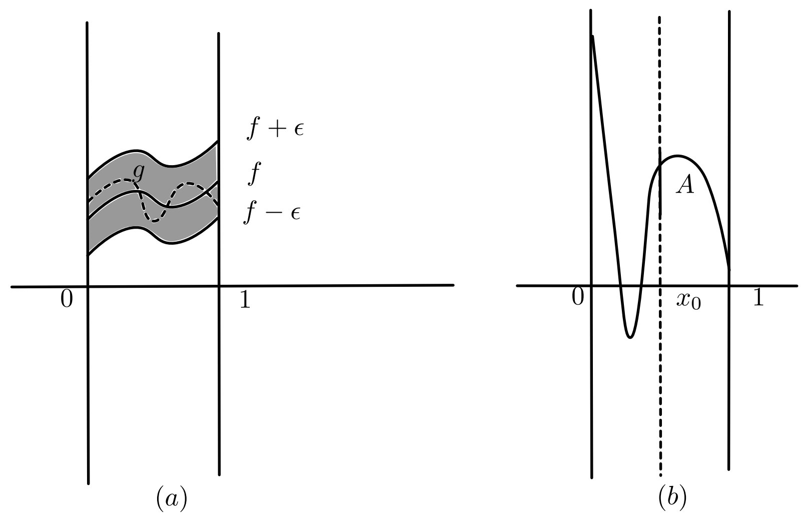


Figura 3.9: (a) Cualquier función cuyo gráfico esté en la zona gris está en $B(f,\varepsilon)$ (b) Cualquier función cuyo gráfico pase por la "ventana" A está en $ev_0^{-1}(A)$

Proposición 3.3.1. *Sean $(X,\tau_X),(Y,\tau_Y)$ y (Z,τ_Z) espacios topológicos. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. *Sea $y_0 \in Y$ y sea $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Entonces f es continua (es decir, las funciones constantes siempre son continuas).*
2. *Sea $f : X \to Y$ continua y $A \subset X$ con la topología relativa. Entonces la restricción de f a A : $f_{/A} : A \to Y$ es continua.*
3. *Sea $A \subset X$ con la topología relativa. La inclusión de A en $X, i : A \hookrightarrow X$ es continua*
4. *Si $f : X \to Y$ es continua y $g : Y \to Z$ también lo es entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Son todas afirmaciones casi triviales. La primera resulta de que la preimagen de un abierto por una función constante es vacío o es todo el espacio, y por lo tanto la preimagen de abiertos es abierta. La segunda sigue de que $f_{/A}^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A$ y por lo tanto la preimagen de un abierto B de Y por $f_{/A}$ es un abierto de A con la topología relativa. La tercera es inmediata igualmente. Que la composición de funciones continuas es continua sigue de que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$: si C es abierto en Z entonces $g^{-1}(C)$ es abierto en Y y luego $f^{-1}(g^{-1}(C))$ es abierto en X.

□

Definición 3.3.2. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es un *homeomorfismo* si f es continua, biyectiva y su inversa f^{-1} también es continua. Dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos.

Veamos algunos ejemplos:

- Sea $\mathbb{R}^n$ con la topología usual. Entonces la bola $B(0,1)$ (con la topología relativa) es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (de hecho cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$). La función $f : \mathbb{R}^n \to B(0,1)$ por $f(x) = \frac{1}{1+\|x\|}x$ es un homeomorfismo ya que es claramente continua, biyectiva y su inversa es $f^{-1}(y) = \frac{1}{1-\|y\|}y$ también es continua.

- Hemos visto en la introducción que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ con las topologías usuales NO son homeomorfos. El teorema de la invariancia del dominio (o de la dimensión) dice que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con las topologías usuales son homeomorfos si y solamente si $n = m$ (ver Sección 9.2).

- Consideremos el intervalo $[0, 1)$ con la topología relativa de $\mathbb{R}$ con la usual y S^1 con la topología relativa heredada de $\mathbb{R}^2$ con la usual. La función $f : [0, 1) \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi it}$ es continua, biyectiva pero su inversa *no* es continua y por lo tanto f *no* es un homeomorfismo.

- Veamos que $S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ (con la topología heredada de la usual en $\mathbb{R}^2$) y el conjunto $SO(2) = \{P \in Gl(2, \mathbb{R}) : PP^t = I, \det(P) = 1\}$ de las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ con determinante positivo (es decir, el conjunto de las rotaciones) con la topología heredada de la usual en $GL(2, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ son homeomorfos. Sea $f : S^1 \to SO(2)$ definida por $f(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Es claro que f es continua, biyectiva (puesto que si $P \in S0(2)$ y $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ entonces $c = -b, d = a$ y $a^2 + b^2 = 1$). La inversa es claramente continua ya que

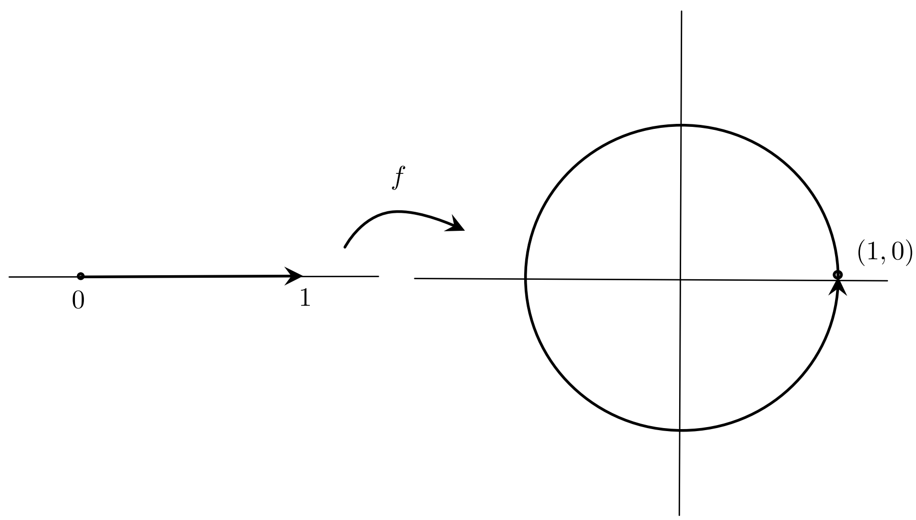


Figura 3.10:

es mirar la primer columna de P.

Definición 3.3.3. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$. Decimos que f es *abierta* (*cerrada*) si la imagen por f de un conjunto abierto (cerrado) en X es abierto (cerrado) en Y.

Observación 3.3.1. Podría parecer al principio que las nociones de función abierta y cerrada son los mismo. CUIDADO, esto no es cierto! La razón de esto es que f *no se comporta bien* respecto de los complementos como sí lo hace f^{-1}. Una función constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con la topología usual) es cerrada pero no es abierta. Por otra parte, si $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ son espacios topológicos y consideramos $X \times Y$ con la topología producto entonces las proyecciones p_X, p_Y son siempre *abiertas:* si W es abierto en $X \times Y$ y $A = p_X(W)$ entonces A es abierto pues si $a \in A$ existe un elemento de la base de la topología producto $U_X \times V_Y \subset W$ tal que $a \in U_X$ y por lo tanto $U_X \subset p_X(W)$. Hemos probado que todo $a \in A$ es interior a A. Por otro lado las proyecciones en general *no son* cerradas. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual el conjunto $B = \{(x, y) : xy = 1$ es cerrado (ya que es la preimagen de $\{1\}$ por la función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy)$ sin embargo la proyección sobre la primera coordenada es $\mathbb{R} - \{0\}$ que no es cerrado.

Corolario 3.3.1. *Una función $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo si y solamente si f es continua biyectiva y abierta. Vale también cambiando abierta por cerrada.*

Observamos que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entonces preimágenes de abiertos son abiertos y también lleva abiertos en abiertos. Por lo tanto tenemos la siguiente regla de oro de la topología: *Cualquier propiedad topológica que se exprese en términos de conjuntos abiertos es invariante por homeomorfismos (o es un invariante topológico).*

3.4. Ejercicios

3.4.1. Topologías, bases y subbases

(1) Determinar si las siguientes son topologías en los conjuntos X que se indican.

a) Sea X un conjunto infinito y $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A^c$ es numerable$\}$.

b) En $\mathbb{N}$, sea p un primo y la familia $\tau = \{A \subset \mathbb{N} : p^n \in A\ \forall n \geq n_0$ para algún $n_0\} \cup \{\emptyset\}$.

c) En $\mathbb{R}^2$ y $\tau = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}.\}$.

(2) Sea X un conjunto con un orden total $\leq$. Probar que $\tau = \{x \in X : a < x < b, a, b \in X.\}$ es una topología (llamada topología del orden).

(3) Sea $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico. Es la topología usual de $\mathbb{R}^2$? Es una mas fina que otra?

(4) Sea X un conjunto. Probar que

a) La intersección de una colección cualquiera de topologías en X es una topología en X.

b) La unión de dos topologías en X puede no ser una topología en X.

c) Sea $\{\tau_\alpha\}$ una familia de topologías en X. Mostrar que existe una único topología en X menor entre todas aquellas que contienen a todas las τ_α y que existe una única topología mayor entre todas aquellaas que están contenidasen todas las τ_α.

d) Si $X = \{a, b, c\}$ sean $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$. Encontrar la menor que contiene a ambas y la mayor contenida en las dos.

(5) Mostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología de X entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la interesección de todas las topologías de X que contienen a $\mathcal{B}$. Probar lo mismo para una subbase.

(6) Decidir si las siquientes familias de conjuntos son subbases para las topologías indicadas.

a) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento finito.

b) $\{X - \{x\}\}$ para la topología del complemento numerable

(7) *a*) Mostrar que $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es base de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

b) Mostrar que los discos en $\mathbb{R}^2$ cuyos centros tienes ambas coordenadas racionales y cuyo radio es racional es una base de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

c) Es $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ base de $\mathbb{R}_\ell$ (topología del límite inferior en $\mathbb{R}$)?

3.4.2. Clausura, interior, frontera...

(9) Hallar interior, clausura y frontera de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. Determinar si son abiertos y si son cerrados.

a) $A = \{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}$.

b) $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q} \text{ o } y \in \mathbb{Q}\}$.

c) $C = \{(x, y) : x \neq 0, y = \sin(\frac{1}{x})\}$.

d) $C = \{(x, y) : xy = \frac{1}{n}$ para algún entero positivo $n\}$.

(10) Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) $\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$, dar un ejemplo en que la inclusión sea estricta.

d) Las igualdades $\overset{\circ}{(A \cup B)} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ no son ciertas en general.

e) $\overline{A} = A \cup \partial A$ y $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.

f) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Dar un ejemplo en que la inclusión sea estricta.

g) $(\overset{\circ}{A^c}) = \left(\overline{A}\right)^c$ y $\overline{(A^c)} = \left(\overset{\circ}{A}\right)^c$.

h) un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera y es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.

i) ¿Es cierto que si A es abierto $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$?

(11) *a*) Probar que $\mathcal{S} = \{[a, \infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ es sub-base de una topología τ en $\mathbb{R}$

b) Describir los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados de $(\mathbb{R}, \tau)$.

c) Dar la clausura e interior de los siguientes conjuntos, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(I) $\{x\}$.

(II) $\{x, y\}$ donde $x \neq y$.

(III) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > y\}$.

(IV) $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > y, x \notin \mathbb{N}\}$.

3.4.3. Base numerable, espacios separables y Hausdorff

(12) En los siguientes ejemplos determinar si el espacio topológico es separable, tiene base numerable o es Haudorff.

a) $\mathbb{R}$ con la topología usual.

b) $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito.

c) $\mathbb{R}$ con la topología del complemento numerable

d) $\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior

e) $\mathbb{R}^2$ con la topología usual

f) $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

g) $\mathbb{R}^2$ con la topología $\tau = \{(-\infty, a) \times (-\infty, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(13) Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que es Hausdorff. Probar que es separable si y solamente si tiene base numerable.

(14) Dar un ejemplo de un espacio métrico que no sea separable.

(15) Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son espacios topológicos Hausdorff, separables o con base numerable. Averiguar si $X \times Y$ con la topología producto también lo son.

3.4.4. Topología relativa

(16) Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Consideremos A con la topología relativa.

a) Probar que si A es abierto en X y B es abierto en A entonces B es abierto en X.

b) Probar que si A es cerrado en X y B es cerrado en A entonces B es cerrado en X.

c) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = [0, 1) \cup \{2\}$. Cuales son los subconjuntos de A que son a la vez abiertos y cerrados en A?

(17) Consideremos $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos X con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Podemos dotar a X también una topología dado por el orden lexicográfico en X. ¿Son la misma?

3.4.5. Funciones continuas

(18) Sean X y τ_1, τ_2 dos topologías en X.

a) Probar que τ_1 es mas fina que τ_2 si y solamente si $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua.

b) Probar que $\tau_1 = \tau_2$ si y solamente si $id_X : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es un homeomorfismo.

(19) Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y sean $f : (X, \tau_X) \to (X, \tau_X)$ y $g : (Y, \tau_Y) \to (Y, \tau_Y)$ funciones continuas. Probar que $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ dada por $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ es continua con la topología producto.

(20) Probar que las propiedades de un espacio topológico ser *separable, tener base numerable, ser Hausdorff* se preserva por homeomorfismos.

(21) Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y consideremos $X \times Y$ con la topología producto. Probar que las proyecciones $\Pi_X : X \times Y \to X$ y $\Pi_Y : X \times Y \to Y$ son funciones continuas y abiertas.

(22) Consideramos en lo reales $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 dada por la usual, τ_2 dado por los complementos finitos,y τ_3 dada por la aquellos conjuntos que contienen al cero.

a) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_2) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_1)$ como espacio de salida.

b) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_3) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida.

c) Muestre que toda función continua respecto $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida, lo es respecto $(\mathbb{R}, \tau_1)$ como espacio de salida.

(23) Recordemos que una función es *abierta* si manda abiertos en abiertos

a) Sea $[0, 1)$ con la topología relativa y $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología relativa heredada de $\mathbb{R}^2$ con la usual. Sea $f : [0, 1) \to S^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$. ¿Es f un homemorfismo? ¿Es f biyectiva? ¿Es f abierta?

b) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y abierta. Probar que es inyectiva. ¿Es necesariamente sobreyectiva?

c) Encontrar una función $f : S^1 \to S^1$ que sea continua, abierta, sobreyectiva pero no inyectiva.

d) ¿Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, abierta y sobreyectiva necesariamente un homemorfismo?

(24) Identificación de algunas superficies.

a) Sean X e Y dos espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ dos funciones continuas tales que $f(A) = B$, $g(B) = A$ y $f\ |_A$ y $g\ |_B$ son inversa una de la otra. Probar que A y B son homeomorfos.

b) Probar que el disco abierto $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.

c) Sean $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < ||x|| < 2\}$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$, y $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| = 1\}$ probar que son homeomorfos $\mathbb{A}$, C, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ donde la topología del último espacio está generada por los conjuntos $U \times (a, b) := \{(\theta, x) \ / \ \theta \in U \ , \ x \in (a, b)\}$ siendo U una abierto relativo de $\mathbb{S}^1$.

d) Probar que el disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ son homeomorfos.

e) Probar que el disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y un conjunto de la forma $\mathbb{D}^2 \setminus C_\theta$ con $C_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0, \ \theta|x| < y\}$ son homeomorfos para todo $\theta \in [0, +\infty)$. Probar que los interiores de dichos conjuntos son homeomorfos.

f) Si consideramos ahora el disco abierto $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{D}^2 \setminus \{(x, y)y \geq 0\}$, son estos conjuntos homeomorfos?

Capítulo 4

Conexión y Compacidad

En este capítulo veremos dos conceptos fundamentales en topología y que son invariantes topológicos: conexión y compacidad. La conexión se refiere a que el espacio *no* está " dividido o partido". La compacidad se refiere a cierto tipo de "finitud" del espacio. Ambos conceptos forman parte del día a día del matemático.

4.1. Conexión

Definición 4.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es *conexo* si NO es unión de dos conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos. En otras palabras, X es conexo si cuando $X = A \cup B$ con A, B abiertos, $A \cap B = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

En caso contrario, si $X = A \cup B$, con A, B abiertos, no vacíos y disjuntos, decimos que X es no conexo o inconexo (o desconexo[1]), y al par A, B con esta propiedad lo llamamos una *división o separación* del espacio.

Algunas formas equivalentes para la conexión son:

Lema 4.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es conexo*

[1]Aunque desconexo no es una palabra del idioma español, es generalmente usada por traducción del ingles disconnected.

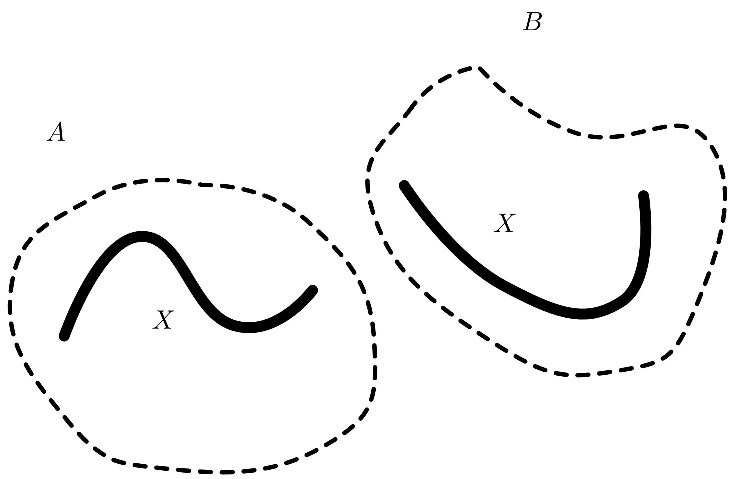


Figura 4.1: Un conjunto inconexo X

2. *X no es unión de dos conjuntos cerrados no vacíos y disjuntos.*

3. *Los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*

Demostración. La demostración es enteramente directa. Veamos $1 \Rightarrow 2$: Supongamos que $X = A \cup B$ con A, B cerrados, no vacíos y disjuntos. Luego $B = A^c$ y $A = B^c$ por lo tanto A y B son también abiertos y esto contradice la conexión de X. Hagamos $2 \Rightarrow 3$. Sea $\emptyset \neq A \subsetneq X$ un conjunto abierto y cerrado y sea $B = A^c$, entonces $X = A \cup B$ con A, B cerrados, disjuntos y no vacíos. La prueba de $3 \Rightarrow 1$ es igual. $\square$

Veamos algunos ejemplos:

- Un punto siempre es un conjunto conexo.

- $\mathbb{R}$ con la topología usual es *conexo*. Supongamos por absurdo que $\mathbb{R} = A \cup B$ con A, B abiertos no vacíos y disjuntos. Sean $a \in A, b \in B$ (que existen pues ambos conjuntos son no vacíos). Supongamos que $a < b$ (de lo contrario se razona igual). Sea $S = \{x \in A \cap [a, b]\}$ y $s = \sup S$. Tenemos que $a \leq s \leq b$. Ahora, si $s \in B$ existe un intervalo conteniendo s y contenido en B lo que contradice que s es supremos de S. Pero si $s \in A$ existe un intervalo conteniendo s y contenido en A lo que implica que s no es supremo. En cualquier caso llegamos a un absurdo.

• $\mathbb{R}^2$ con el orden *lexicográfico* es *inconexo*. Ya vimos anteriormente (ver Sección 3.3) que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ es abierto y $B = \{(x, y) : x > 0\}$ también es abierto.

• Sea X un conjunto cualquiera con mas de un punto. Entonces X con la topología *discreta* es *inconexo*.

• Sea $X = \mathbb{N}$ con la topología del *complemento finito*. Entonces X es *conexo*, ya que dos abiertos no vacíos cualesquiera se intersecan.

Para buscar ejemplos/contraejemplos y tener una idea mas cabal de la conexión es útil mirar *subconjuntos*:

Definición 4.1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea S un subconjunto de X. Decimos que S es *conexo* si es un espacio topológico conexo con la topología relativa.

Lema 4.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $S \subset X$. Son equivalentes:*

1. *S es conexo*
2. *No existen dos abiertos A, B en X tales que $X \subset A \cup B, A \cap S \neq \emptyset, B \cap S \neq \emptyset$ y $A \cap B \cap S = \emptyset$.*
3. *No existen dos cerrados A, B en X tales que $X \subset A \cup B, A \cap S \neq \emptyset, B \cap S \neq \emptyset$ y $A \cap B \cap S = \emptyset$.*
4. *No existen dos subconjuntos no vacíos $C, D \subset S$ tales que $S = C \cup D$, $\overline{C} \cap D = \emptyset$ y $\overline{D} \cap C = \emptyset$.*
5. *Si $S \subset A \cup B$ con A, B abiertos y $A \cap B \cap S = \emptyset$ entonces $S \subset A$ o $S \subset B$.*

Demostración. Las primeras tres afirmaciones son consecuencia inmediata de la definición de topología relativa y la definición de conexión en términos de abiertos y cerrados. La equivalencia con la cuarta sigue del hecho de que si existen tales conjuntos C, D entonces D y C son abiertos en S. (Observar que la clausura puede ser tanto en S como en X!). La quinta es una reformulación de la segunda. □

El siguiente resultado, si bien elemental y concreto, es *fundamental*!

Teorema 4.1.1. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces los únicos subconjuntos conexos son los intervalos.*

Demostración. Un intervalo I en $\mathbb{R}$ se puede caracterizar de la siguiente forma: para todo par de puntos $a, b \in I$ entonces el intervalo $[a, b]$ (o $[b, a]$) está en I. Que los intervalos son conexos se demuestra igual que la conexión de $\mathbb{R}$. Sea ahora S un subconjunto conexo y sean $a, b \in S, a \neq b$ y supongamos que $[a, b] \nsubseteq S$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $c \notin S$. Pero entonces $A = (-\infty, c) \cap S$ y $B = (c, +\infty) \cap S$ son dos abiertos (en S) disjuntos y no vacíos cuya unión es S contradiciendo la conexión de S. □

Por otro lado, el siguiente resultado (abstracto) forma parte del *abc* del topólogo y es consecuencia de la regla de oro:

Teorema 4.1.2. *Sean $(X, \tau_x), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo. En particular, si X e Y son homeomorfos y X es conexo, también lo es Y.*

Demostración. Supongamos que existan U y V abiertos en Y tales que:

- $U \cap f(X) \neq \emptyset$ y $V \cap f(X) \neq \emptyset$
- $f(X) \subset U \cup V$
- $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$

Sean $A = f^{-1}(U)$ y $B = f^{-1}(V)$. Como f es continua, A y B son abiertos en X. Por otro lado, de lo anterior concluimos:

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
- $X = A \cup B$.
- $A \cap B = \emptyset$.

contradiciendo la conexión de X.

□

Corolario 4.1.1 (Teorema de Bolzano o valor intermedio)**.** *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la topología usual y sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces* f *toma todos los valores entre* $f(a)$ *y* $f(b)$*.*

Demostración. Como $[a, b]$ es conexo, entonces $f([a, b])$ es un conexo (i.e. intervalo) que contiene a $f(a)$ y $f(b)$ y por lo tanto a todos los valores entre ambos. $\square$

Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es *localmente constante* si para todo $x \in X$ existe un entorno U_x de x tal que $f(y) = f(x)$ para todo $y \in U_x$.

Proposición 4.1.1. *Sean* $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ *espacios topológicos con* X *conexo y* $f : X \to Y$ *una función localmente constante. Entonces* f *es constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y sea $A = \{y \in X : f(y) = f(x_0)\}$. Deducimos que A es abierto (pues f es localmente constante) y no vacío pues $x_0 \in A$. Por otro lado A^c también es abierto, pues f es localmente constante. Como X es conexo resulta que $A = X$. $\square$

Corolario 4.1.2. *Sea* (X, τ_X) *un espacio topológico conexo y sea* (Y, τ_Y) *un espacio topológico discreto. Toda función* $f : X \to Y$ *continua es constante.*

Demostración. Resulta de la Proposición anterior ya que si Y es discreto y $f : X \to Y$ continua entonces f es localmente constante. $\square$

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}$ (con las topologías usuales) es continua, entonces es constante.

Observación 4.1.1. Vale también el reciproco, si (X, τ_X) no es conexo e (Y, τ_Y) tiene la topología discreta y consiste en mas de un punto, existe una función continua no constante $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, ya que si A, B es una separación de X e y_0, y_1 son puntos diferentes de Y, la función $f(A) = y_0$ e $f(B) = y_1$ es continua.

El siguiente resultado es muy útil para probar la conexión de un conjunto.

Proposición 4.1.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sea* $C \subset X$ *un conexo. Sea también* $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ *una familia de subconjuntos conexos de* X *tales que* $C \cap X_\alpha \neq \emptyset$ *para cualquier* $\alpha \in I$*. Entonces* $S = C \bigcup \cup_{\alpha \in I} X_\alpha$ *es conexo.*

Demostración. Sea A, B abiertos tales que $S \subset A \cup B$ y tales que $A \cap B \cap S = \emptyset$. Como C es conexo, resulta que $C \subset A$ o $C \subset B$. Supongamos que $C \subset A$. Como $C \cap X_\alpha \neq \emptyset$ resulta que $X_\alpha \cap A \neq \emptyset$ y por la conexión de X_α concluimos que $X_\alpha \subset A$ para todo $\alpha \in I$. Pero entonces, $S \subset A$ lo que prueba que S es conexo. Ver Figura 4.2. □

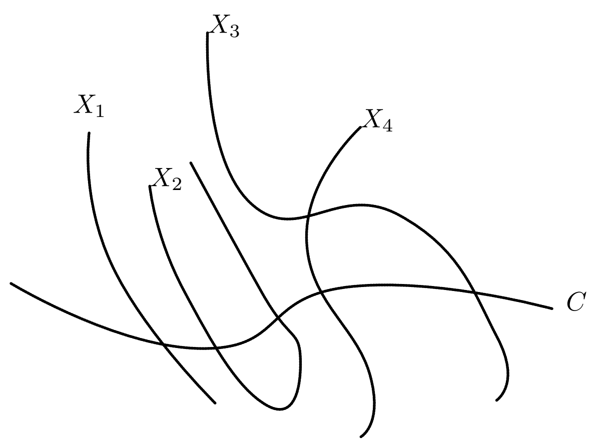


Figura 4.2:

Corolario 4.1.3. *Sean* $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ *espacios topológicos conexos, entonces* $X \times Y$ *con la topología producto es conexo.*

Demostración. Sea $y \in Y$ un punto cualquiera. Como X y $X \times \{y\}$ son homeomorfos, tenemos que $X \times \{y\}$ es conexo. Además $\{x\} \times Y$ también es conexo para cada $x \in X$ y $\{x\} \times Y \cap X \times \{y\}$ es no vacío. Por la proposición resulta que $X \times Y = (\cup_{x \in X} \{x\} \times Y) \cup X \times \{y\}$ es conexo. □

- Veamos como ejemplo que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es conexo. Para cada $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, el conjunto $\{tv : t \in \mathbb{R}\}$ es conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{R}$. Ahora, $\mathbb{R}^n = \cup\{tv : t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n\}$ es unión de conjuntos conexos y que todos contienen a 0. Por le resultado anterior, es conexo. Resulta además que cualquier bola $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ es conexo por ser homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

- Sea (X,τ) un espacio topológico y consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $I \subsetneqq \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f : I \to X$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un subconjunto conexo de X. En particular, consideremos $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ ya que $graf(f) = F(I)$ donde $F : I \to \mathbb{R}^2$ esta dado por $F(t) = (t, f(t))$ que es continua.

Proposición 4.1.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $S \subset X$ un subconjunto conexo. Entonces $\overline{S}$ es un conjunto conexo. Mas aún, si $S \subset R \subset \overline{S}$ entonces R es conexo.*

Demostración. Sea A, B cerrados tales $\overline{S} \subset A \cup B$ y $A \cap B \cap \overline{S} = \emptyset$. Se tiene que $S \cap A \neq \emptyset$ o $S \cap B \neq \emptyset$. Como S es conexo resulta que $S \subset A$ o $S \subset B$. Pero como A y B son cerrados, entonces o bien $\overline{S} \subset A$ o bien $\overline{S} \subset B$ y hemos probado que $\overline{S}$ es conexo. Exactamente la misma prueba sirve para mostrar que R es conexo para cualquier $R, S \subset R \subset \overline{S}$. $\square$

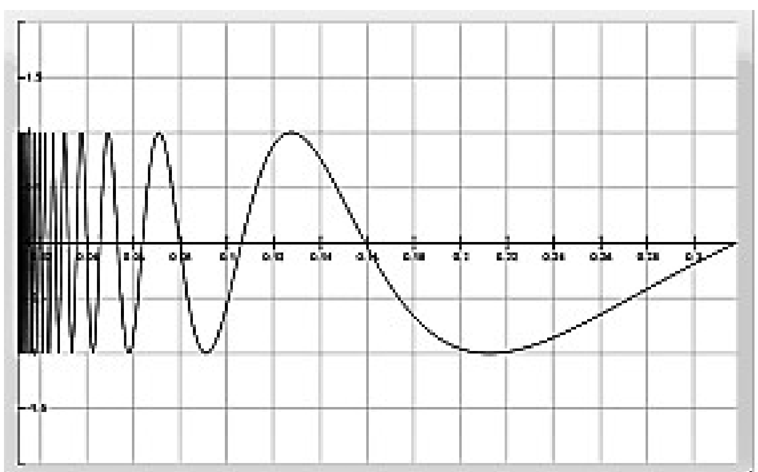


Figura 4.3: Curva de seno del topólogo.

Usando esta proposición podemos dar un ejemplo básico y famoso de un conjunto conexo en $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) conocido como la *curva de seno del topólogo*. Consideremos la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ y consideremos su gráfica $S = graf(f)$. Por ser la gráfica de una función continua, resulta que S es conexo. Por la proposición resulta que $\overline{S}$ es conexo. Observemos que

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1, 1] \cup S.$$

Un ejemplo similar es el *peine roto del topólogo*: Consideremos en $\mathbb{R}$ una sucesión a_n con $a_0 = 1$ y $a_n \searrow 0$ y el conjunto $K = \{a_n : n \geq 0\}$. Y consideremos el conjunto en $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual)

$$R = \{0\} \times [1/2, 1] \cup (0, 1) \times \{0\} \cup K \times [0, 1]$$

Resulta entonces que R es conexo ya que es fácil ver que $S = (0, 1) \times \{0\} \cup K \times [0, 1]$ es conexo y $S \subset R \subset \overline{S}$. Ver Figura 4.4. Otro ejemplo del mismo estilo podría ser considerar $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y consideremos $q \in \mathbb{Q}_0$. Y formemos el conjunto en $\mathbb{R}^2$ dado por $S = [0, 1] \times \{0\} \cup (\mathbb{Q}_0 - \{q\}) \times [0, 1] \cup \{q\} \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

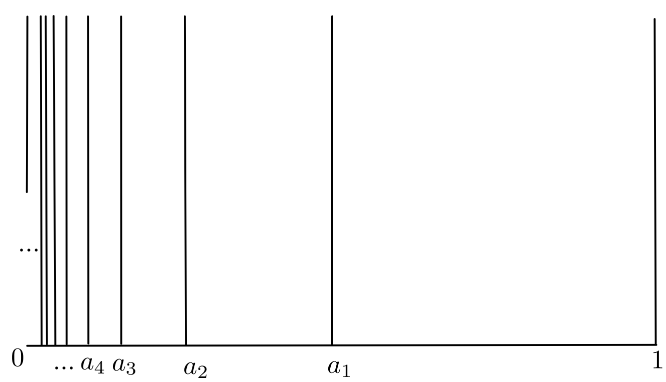


Figura 4.4: Peine roto del topólogo

Estos ejemplos llaman al principio la atención pues parecen estar "partidos" sin estarlo realmente. Lo que sucede es que no son *conexo por caminos*

4.1.1. Conexión por caminos

Una forma muy sencilla de estudiar la conexión es ver si un conjunto es conexo por caminos. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un *camino* en X uniendo los puntos x e y es (la imagen por) una función $\alpha : [0,1] \to X$ continua tal que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ (estamos considerando $[0,1]$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ con la usual). El punto $\alpha(0)$ se llama punto inicial, y $\alpha(1)$ punto final. Por el Teorema 4.1.2 tenemos que un camino es un subconjunto conexo. Cuando tenemos dos caminos α y β donde el punto final de α es el punto inicial de β podemos *concatenar* los dos caminos y obtener un camino γ que va desde el punto inicial de α al punto final de β así:

$$\gamma : [0,1] \to X,\ \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

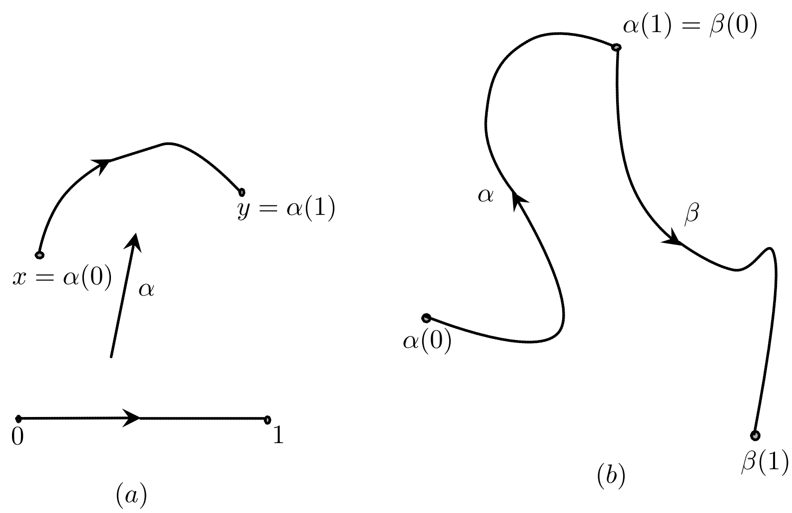


Figura 4.5: (a) Un camino α. (b) Concatenación de caminos

Definición 4.1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es conexo por caminos si dados cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un camino en X

uniendo x con y. Un subconjunto $S \subset X$ es conexo por caminos si lo es con la topología relativa

La conexión por caminos es mas fuerte que la conexión a secas:

Proposición 4.1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico conexo por caminos. Entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo y sean A, B abiertos nos vacíos tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Como A y B son no vacíos, existen $a \in A$ y $b \in B$. Como X es conexo por caminos tenemos que existe $\alpha : [0, 1] \to X$ continua tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. La división de X resulta en una división del camino lo cual no puede ser por la conexión del mismo. Con mas detalles: como α es continua tenemos que $U = \alpha^{-1}(A)$ y $V = \alpha^{-1}(B)$ son abiertos no vacíos de $[0, 1]$, claramente $[0, 1] = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$ violando la conexión de $[0, 1]$. $\square$

Observemos que la conexión por caminos es un invariante topológico:

Observación 4.1.2. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos con X conexo por caminos. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $f(X)$ es conexo por caminos, ya que si y_0 e y_1 son dos puntos de $f(X)$, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_i) = y_i$. Sea $\alpha : [0, 1] \to X$ un camino que una x_0 con x_1. Entonces el camino $\beta = f \circ \alpha$ es un camino en $f(X)$ uniendo y_0 e y_1.

Veamos algunas aplicaciones/ejemplos:

- Es claro que $\mathbb{R}^n$ (con la topología usual) y también $B(a, r)$ (con la métrica euclídea) son conexos por caminos.

- Veamos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo si $n > 1$.. De hecho es conexo por caminos pues dado x e y en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tomamos el segmento que une x con y si este no pasa por 0. Si este segmento pasa por 0 elegimos un punto $z \neq 0$ que no este en la recta determinada por x e y Luego, el segmento de x a z no pasa por 0 y el camino de z a y no pasa por 0.

El siguiente corolario es la prueba del Teorema 1.0.2 que prometimos en la Introducción.

Corolario 4.1.4. *R^n y $\mathbb{R}$ (con las topologías usuales) no son homeomorfos si $n > 1$, pues si existiera un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathbb{R} - \{f(0)\}$ sería homeomorfos pero el primero es conexo y el segundo no.*

- La esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ donde la norma proviene de la métrica euclídea de $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideramos a S^n con la topología relativa. Afirmamos que S^n es conexo si $n \geq 1$. La función $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$ definida por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es una función continua y sobreyectiva. Como $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es conexo (por caminos) si $n \geq 1$ resulta que S^n es conexo (y conexo por caminos) vía el Teorema 4.1.2 (o de la Observación 4.1.2).

- $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ con la topología relativa de la usual de $\mathbb{R}^2$ es conexo por caminos y por lo tanto conexo. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ entonces $x_1 \notin Q$ o $x_2 \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto la recta horizontal por x o la recta vertical por x esta totalmente contenida en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$. Utilizando esto se puede unir dos puntos x e y que están en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ por un camino compuesto por segmentos horizontales y verticales contenidos en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ que une x con y.

- Veamos que el conjunto $\overline{S} \subset \mathbb{R}^2$ que es la *curva de seno del topólogo* no es conexo por caminos. Recordemos que

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1,1] \cup S, \quad S = graf(f), f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Es claro que no hay un camino de un punto cuya primera coordenada es 0 con un punto del gráfico S. De todas maneras hagamos lo detalles. Supongamos por absurdo que es conexo por caminos. Entonces existe $\alpha : [0,1] \to \overline{S}, \alpha(t) = (x(t), y(t))$ que une un punto de $\{0\} \times [-1,1]$ con un punto de S. Existe $b = \sup\{t : x(t) = 0\}$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $b = 0$ (reparametrizando y haciendo $[b,1] = [0,1]$). Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x(t) > 0$ si $t \in (0, \varepsilon]$. Sea $\delta = x(\varepsilon)$. Como α es continua entonces $x([0,\varepsilon]) \supset [0, \delta]$. Por lo tanto existe $t_n \to 0$ tal que $x(t_n) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ de donde $y(t_n) = (-1)^n$. Por lo tanto $\alpha(t_n) = (\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}, (-1)^n)$ que no tiene límite cuando $n \to \infty$ contradiciendo la continuidad de α en 0.

El siguiente es un resultado clásico y servirá para resultados posteriores. También el argumento utilizado es un *argumento clásico* de conexión.

Proposición 4.1.5. *Sea $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces A es conexo si y solamente si es conexo por caminos.*

Demostración. Ya sabemos que si A es conexo por caminos entonces es conexo. Veamos que si A es conexo, entonces es conexo por caminos. Fijemos $a \in A$ y sea $U = \{x \in A : \exists \text{ camino uniendo } a \text{ con } x\}$. Es claro que $U \neq \emptyset$ ya que $a \in U$. Por otro lado U es abierto, ya que si $x \in U$ y $r > 0$ es tal que $B(x,r) \subset A$ entonces

$B(x,r) \subset U$ concatenando el camino de a hasta x y luego de x a $y \in B(x,r)$. Por otro lado $U^c \cap A$ también es abierto, ya que si $x \in U^c \cap A$ y $r > 0$ es tal que $B(x,r) \subset A$ entonces $B(x,r) \subset U^c$ pues si pudiéramos conectar por un camino a con un punto de $B(x,r)$ podríamos conectar a con x lo que sería absurdo. Luego, por la conexión de A deducimos que $U^c \cap A = \emptyset$ y por lo tanto $U = A$ y A es conexo por caminos. Ver Figura 4.6 □

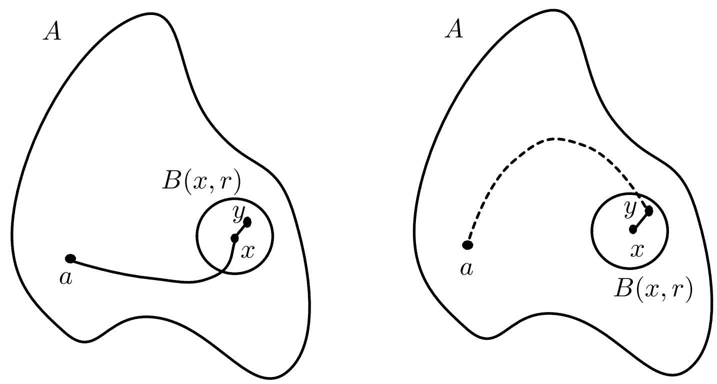


Figura 4.6:

4.1.2. Componentes conexas

Sea (X, τ) un espacio topológico. Podría ser que X no es conexo. Pero entonces podríamos tratar de dividir a X en una unión de subconjuntos conexos *maximales*. Esto lo podemos hacer así: definamos una relación en X diciendo $x \sim_c y$ si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x y a y. Veamos que $\sim_c$ es una relación de equivalencia:

- $x \sim_c x$ pues siempre ocurre que $\{x\}$ es conexo
- Si $x \sim_c y$ entonces $y \sim_c x$ trivialmente.

- Si $x \sim_c y$ e $y \sim_c z$ entonces $x \sim_c z$. De hecho, existe un conexo C_1 que contiene a x y a y, y existe un conexo C_2 que contiene a y y a z. Como $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ pues $y \in C_1 \cap C_2$ por la Proposición 4.1.2 resulta que $C_1 \cup C_2$ es un conexo que contiene a x y a z.

Definición 4.1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Llamamos *componente conexa* de x a $C_x = \{y \in X : x \sim_c y\}$ la clase de equivalencia de x según la relación de equivalencia $\sim_c$.

Veamos algunas propiedades de las componentes conexas (y que en particular justifica su nombre):

Proposición 4.1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Entonces*

1. *La componente conexa C_x es un conjunto conexo*
2. *La componente conexa C_x es el mayor conexo que contiene a x. Es decir, si $x \in D$ y D es conexo, entonces $D \subset C_x$.*
3. *Las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Demostración. La primera parte parte resulta directa de la Proposición 4.1.2 ya que C_x es la unión de todos los conexos que contienen a x. La segunda parte es evidente: sea D conexo, $x \in D$ y sea $y \in D$, luego resulta que $y \sim_c x$ y por lo tanto $y \in C_x$, es decir $D \subset C_x$. La tercera parte resulta inmediata de la Proposición 4.1.3 ya que si C_x es conexo entonces $\overline{C_x}$ también es conexo y por la segunda parte $\overline{C_x} \subset C_x \subset \overline{C_x}$ de donde obtenemos la igualdad. □

Para clarificar estas nociones veamos ejemplos:

• Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $X = [0, 1) \cup \{2\} \cup [3, 4]$ con la topología relativa. Entonces las componentes conexas de X son $[0, 1), \{2\}$ y $[3, 4]$.

• Cuando un espacio topológico X no es conexo es posible dividirlo en conjuntos abiertos y disjuntos. Esto podría conducir a la idea de que las componentes conexas sean abiertas. Esto es falso. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología. La componente conexa de $\{0\}$ en X es el propio $\{0\}$ que *no* es abierto en X.

• Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Ya vimos que no es conexo. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces la componente conexa $C_{(x,y)}$ es $\{x\} \times \mathbb{R}$.

Para el caso de la conexión por caminos podemos seguir la misma idea. Sea (X,τ) un espacio topológico y definimos una relación en X por $x \sim_{cc} y$ si existe un camino en X uniendo x con y. Resulta que es una relación de equivalencia:

- $x \sim_{cc} x$ considerando el camino constante en x.
- si $x \sim_{cc} y$ entonces $y \sim_{cc} x$ obviamente, pues el mismo camino sirve (revirtiendo orientación).
- Si $x \sim_{cc} y$ e $y \sim_{cc} z$ entonces $x \sim_{cc} z$ por concatenación de caminos.

Definición 4.1.5. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Lamamos componente conexa por caminos de X a la clase de x según la relación $\sim_{cc}$ a $CC_x = \{y \in X : y \sim_{cc} x\}$.

Proposición 4.1.7. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces CC_x es conexo por caminos.*

Demostración. Es evidente a partir de la definición: si $y, z \in CC_x$ entonces hay un camino de y a x y de x a z y por lo tanto de y a z. □

Uno podría preguntarse acerca de la naturaleza de CC_x (¿es abierto, cerrado, o que?). No hay nada que se pueda decir en general. Ya vimos con el ejemplo de la curva de seno del topólogo que la conexión por caminos no pasa a la clausura. De hecho en la curva de seno del topólogo

$$\overline{S} = \{0\} \times [-1,1] \cup S, \quad S = graf(f), f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

tenemos que las componentes conexas por caminos son S y $\{0\} \times [-1,1]$ donde una es abierta y la otra cerrada (con la topología relativa). "Jugando" con este ejemplo uno podría hacer componentes conexas por caminos que no sean ni abiertas ni cerradas.

4.1.3. Conexión local

La conexión *no* es una propiedad hereditaria localmente, en el sentido que el espacio puede consistir de una sola pieza, pero mirado localmente esto puede no ser así.

Definición 4.1.6. Se (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Decimos que X es localmente conexo en x si para todo abierto A que contiene a x existe un *abierto conexo* C tal que $x \in C \subset A$. Dicho de otra manera, X es localmente conexo en x si existe una base de entornos abiertos de x formado por conjuntos conexos. Decimos que X es un *espacio localmente conexo* (abreviadamente l.c.) si es localmente conexo para todo $x \in X$.

- La curva de seno del topólogo es un espacio conexo pero no es localmente conexo ya que si $x \in \{0\} \times [-1, 1]$ no hay entornos arbitrariamente chicos (en la topología relativa) de x que sean conexos.

- Un espacio puede ser localmente conexo pero no ser conexo. Si $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ con la topología relativa heredada de la usual en $\mathbb{R}$ es localmente conexo pero no es conexo.

- $\mathbb{Q}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ con la usual no es ni conexo ni localmente conexo.

Proposición 4.1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es localmente conexo*

2. *Las componentes conexas de los conjuntos abiertos son abiertas.*

3. *Existe una base τ formada por abiertos conexos.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Supongamos que X es localmente conexo y sea A un abierto y sea C una componente conexa de A. Tomemos $x \in C$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo U tal que $x \in U \subset A$. Pero entonces $U \subset C$ y por lo tanto x es interior a C y tenemos que C es abierto.

$2 \Rightarrow 3$: Supongamos que las componentes conexas de los abiertos son abiertas. Sea $\mathcal{B} = \{C \in \tau : C \textit{es conexo}\}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es una base de la topología pues todo punto pertenece a una componente conexa de un abierto que lo contiene, y si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_i \in \mathcal{B}$ entonces la componente conexa de $B_1 \cap B_2$ que contiene a x esta en $\mathcal{B}$.

$3 \Rightarrow 1$: Sea $x \in X$ y sea A un abierto que contiene a x. Entonces existe un elemento B de la base tal que $x \in B \subset A$. Como los elementos de la base son abiertos conexos tenemos el resultado. $\square$

Recordemos que en la sección anterior, cuando estudiamos las componentes conexas de un espacio, vimos que siempre son *cerradas* pero no necesariamente abiertas. De la proposición anterior tenemos:

Corolario 4.1.5. *Si (X, τ) es un espacio topológico locamente conexo entonces las componentes conexas de X siempre son abiertas y cerradas.*

Como todo conjunto es unión disjunta de sus componentes conexas resulta:

Corolario 4.1.6. *En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, todo abierto es unión disjunta de (numerables) abiertos conexos. En el caso $n = 1$ resulta que todo abierto es unión disjunta de (numerables) intervalos abiertos.*

Podemos estudiar también la conexión local por caminos:

Definición 4.1.7. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $x \in X$. Decimos que X es *localmente conexo por caminos* (abreviadamente l.c.c) en x si dado un abierto A que contiene a x existe un abierto C que es conexo por caminos y tal que $x \in C \subset A$. Dicho de otra manera, X es localmente conexo por caminos en x si existe una base de entornos de x que son a su vez conexos por caminos. Decimos que X es localmente conexo por caminos si lo es en cada uno de sus puntos.

Es claro que si (X, τ) es l.c.c. entonces es l.c. La siguiente proposición es análoga a la Proposición 4.1.8 y la demostración queda como ejercicio.

Proposición 4.1.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *X es localmente conexo por caminos.*
2. *Las componentes conexas por caminos de un abierto son abiertas.*
3. *Existe una base τ formada por abiertos que son conexos por caminos.*

Veamos ahora una resultado similar a la Proposición 4.1.5:

Proposición 4.1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente conexo por caminos. Sea A un abierto conexo, entonces A es conexo por caminos. En particular las componentes conexas de un abierto coinciden con las componentes conexas por caminos, y las componentes conexas (por caminos) de X son ambas abiertas y cerradas.*

Demostración. Sea A un abierto conexo y sea $a \in A$. Sea

$$U = \{y \in A : \exists \text{ camino que une } a \text{ con } y\}$$

Es claro que $U \neq \emptyset$. Como X el l.c.c tenemos que U es abierto. Por otra parte U^c también es abierto y como A es conexo resulta que $U = A$, concluyendo que A es conexo por caminos.

Como X es l.c.c (y por lo tanto l.c) ya vimos que las componentes conexas de una abierto A son abiertas. Luego tenemos que las componentes conexas de un abierto coinciden con las componentes conexas por caminos de A. Como las componentes conexas de X son siempre cerradas tenemos que las componentes conexas de X son abiertas y cerradas, y lo mismo para las componentes conexas por caminos. □

Finalmente, es claro que tanto la conexión local como la conexión local por caminos es invariante por *homeomorfismos*. Pero no son invariantes por funciones continuas: es posible construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de forma que su imagen contenga la curva de seno del topólogo que no es ni localmente conexo ni localmente conexo por caminos (ver figura 10.3). Sin embargo, si $f : X \to Y$ es *continua y abierta* y X es l.c (o l.c.c.) entonces $f(X)$ también lo es (ejercicio).

4.2. Compacidad

La compacidad es en cierto modo una noción de finitud. Como ejemplos para tener en mente: el plano no es compacto pero la esfera sí lo es. El intervalo $[0, 1]$ en la recta real es compacto pero $\mathbb{R}$ no lo es. Tampoco lo es el intervalo abierto $(0, 1)$ en $\mathbb{R}$ ya que la compacidad es invariante por homeomorfismos. La definición se da en términos de conjuntos abiertos. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset \tau : \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos. Decimos que $\mathcal{U}$ cubre (o es un cubrimiento de) X si $X \subset \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Si una subfamilia de $\mathcal{U}$ también cubre a X decimos que es un subcubrimiento.

Definición 4.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es *compacto* si todo cubrimiento (por abiertos) de X admite un subcubrimiento finito: dado $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset \tau : \alpha \in I\}$ tal que $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Decimos que un subconjunto $Y \subset X$ es un subconjunto compacto de X si lo es con la topología relativa.

Observemos que $Y \subset X$ es un subconjunto compacto de X si y solamente si todo cubrimiento de Y por abiertos de X admite un subcubrimiento finito (ejercicio). Veamos algunos ejemplos:

• Sea (X, τ) un espacio topológico. Los conjunto formados por un solo punto $\{x\}$ *siempre* son compactos.

• $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto, pues la familia $\mathcal{U} = \{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ es un cubrimiento por abiertos que no admite ningún subcubrimiento finito.

• Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ el espacio de los reales con la topología usual. Entonces $(0, 1]$ no es un subconjunto compacto pues $\mathcal{U} = \{(1/n, 1]\}$ es un cubrimiento por abiertos que no admite un subcubrimiento finito. Pero el subconjunto $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ es compacto, ya que si $\mathcal{U}$ es una familia que cubre a Y tomamos $A \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in A$. Luego $Y \cap A^c$ es finito y para cada elemento elegimos un abierto que lo contenga. Veamos que un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ es siempre compacto con la topología usual.

Lema 4.2.1. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $Y = [a, b]$. Entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de $[a, b]$. Sea $A = \{x \in [a, b] : [a, x]$ admite subcubrimiento finito$\}$. El conjunto A es no vacío pues $a \in A$. Sea $s = \sup A$. Queremos probar que $s = b$ y es un máximo. Sea $U_s \in \mathcal{U}$ tal que $s \in U_s$ y tomemos $x \in A$ tal que $x \in U_s$. Como $[a, x]$ admite subcubrimiento finito tenemos que, adjuntándole a lo sumo U_s, $s \in A$ (es decir s es máximo) y si $s < b$ llegamos a un absurdo pues tomando $s < y < b$ con $y \in U_s$ llegaríamos a que $y \in A$. $\square$

• $\mathbb{R}$ con la topología cofinita es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}$. Sea $A = A_0$ un abierto cualquiera (no vacío) de $\mathcal{U}$. Sea $\{x_1, ..., x_n\} = A^c$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento resulta que para cada i existe un $A_i \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in A_i$. Luego: $\mathbb{R} = \cup_{i=0}^{n} A_i$.

Lema 4.2.2. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y sea $Y \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces Y es un subconjunto compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos que cubre Y. Entonces $\mathcal{U} \cup Y^c$ es una familia de abiertos que cubre X. Como X es compacto, admite un subcubrimiento finito $\{U_1, \ldots U_n, Y^c\}$. Pero entonces $\{U_1, \ldots, U_n\}$ cubre a Y. □

Observación 4.2.1. No es cierto en general que un subconjunto compacto de un espacio (X, τ_X) (compacto o no) sea cerrado. Por ejemplo, ya vimos que $\mathbb{R}$ con la topología cofinita es compacto. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $C = \mathbb{R} - \{c\}$. Resulta que C es compacto pero no es cerrado! También si consideramos $\mathbb{R}$ con la topología de las semirrectas a izquierda $\tau = \emptyset \cup \mathbb{R} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ tenemos que *cualquier* subconjunto que tenga máximo es compacto (y ninguno de estos es cerrado). Sin embargo es cierto que un compacto es cerrado si el espacio es Hausdorff:

Lema 4.2.3. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff y sea $C \subset$ un subconjunto compacto. Entonces es cerrado.*

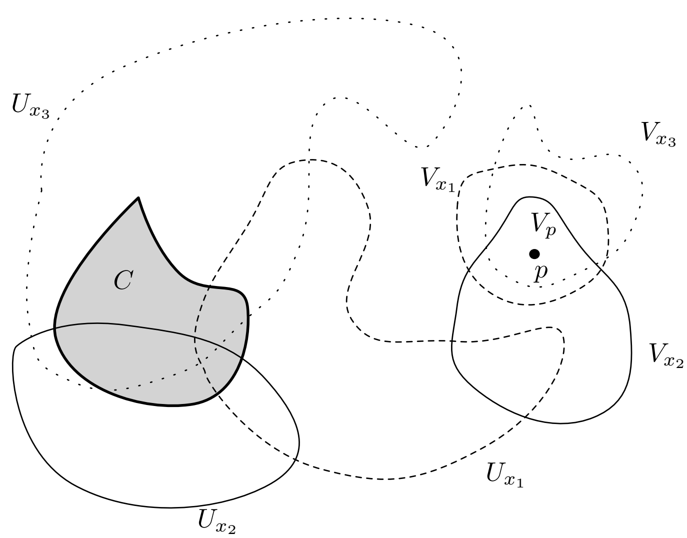


Figura 4.7:

Demostración. Veamos que C^c es abierto. Sea $p \notin C$. Como X es Hausdorff, para cada $x \in C$ existen abiertos U_x, V_x tales que $x \in U_x, p \in V_x$ y $U_x \cap$

$V_x = \emptyset$. Luego $\mathcal{U} = \{U_x : x \in C\}$ es un cubrimiento por abiertos de C. Como C es compacto, tenemos que existen $x_1, ...x_n$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Ahora, sea $V_p = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Resulta entonces que $V_p \cap U_{x_i} = \emptyset$ para todo $i = 1, ..n$. Pero entonces $V_p \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) = \emptyset$, es decir $V_p \cap C = \emptyset$. Ver Figura 4.7 $\square$

Caractericemos ahora los subconjunto compactos de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Corolario 4.2.1. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $C \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solamente si C es cerrado y acotado.*

Demostración. $(\Rightarrow)$: C es acotado pues sea $\mathcal{U} = \{U_n = (n, n+2) : n \in \mathbb{Z}$ es un cubrimiento por abiertos de C. Resulta que admite un subcubrimiento finito $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\}$. Tomando que $m = \text{mín}\{n_i\}, M = \text{máx}\{n_i + 2\}$ tenemos que $C \subset [m, M]$ y C está acotado. Para probar que es cerrado, podríamos usar que $\mathbb{R}$ con la usual es Hausdorff, pero se puede hacer sencillamente directamente. Sea $p \notin C$. La familia $\mathcal{U} = \{U_r = [p - r, p + r]^c : r > 0\}$ es un cubrimiento por abiertos de C. Luego admite un subcubrimiento finito $\{U_{r_i} : i = 1, , .n\}$. Sea $r, 0 < r < \text{mín}\{r_i\}$. Resulta entonces que $(p - r, p + r) \cap C = \emptyset$ de donde resulta que C^c es abierto.

$(\Leftarrow)$. Sea C cerrado y acotado. Entonces existen a, b tales que $C \subset [a, b]$. Como ya sabemos que $[a, b]$ es compacto y C es un subconjunto cerrado de $[a, b]$ concluimos por Lema 4.2.2 que C es compacto. $\square$

El siguiente resultado es de suma utilidad, y está en el portafolio de cualquier matemático. Es consecuencia de que la definición de compacidad está dada en términos de conjuntos abiertos. Dicho de manera esquemática: la compacidad se preserva por funciones continuas.

Teorema 4.2.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Sea $C \subset X$ un subconjunto compacto de X. Entonces $f(C)$ es un subconjunto compacto de Y.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha \in \tau_Y : \alpha \in I\}$ un familia de abiertos de Y que cubre a $f(C)$. Luego $\mathcal{U} = \{U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in I\}$ es una familia de abiertos (pues f es continua) de X que cubre a C. Por la compacidad de C tenemos que existen

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Pero entonces $f(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ y concluimos que $f(C)$ es compacto. $\square$

Como consecuencia inmediata tenemos entre otras cosas el famoso Teorema de Weierstrass:

Corolario 4.2.2 (Teorema de Weierstrass)**.** *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces:*

1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f([a, b])$ tiene máximo y mínimo. Más aún, existen c, d tal que $f([a, b]) = [c, d]$.*

2. *Mas en general, sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(X)$ tiene máximo y mínimo. Si además X es conexo existen $c, d \in \mathbb{R}$ tal que $f(X) = [c, d]$.*

Demostración. Es claro que la primera afirmación es consecuencia de la segunda. Tenemos que $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$ que es un cerrado y acotado, por lo que tiene máximo d y mínimo c. Si además X es conexo, sabemos que $f(X)$ es conexo y por lo tanto $f(X) = [c, d]$. $\square$

El siguiente corolario también resulta muy útil:

Corolario 4.2.3. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función . Entonces*

1. *Si X es compacto, Y es Hausdorff y f es continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

2. *Si X es compacto, Y es conexo Hausdorff y f es continua, inyectiva y abierta, entonces f es un homeomorfismo*

Demostración. Para la primera parte, basta ver que f^{-1} es una función continua, por lo que basta ver que f es cerrada. Sea $C \subset X$ cerrado. Entonces C es compacto y por lo tanto $f(C)$ es compacto. Como Y es Hausdorff, $f(C)$ es cerrado en Y.

Para la segunda parte, basta ver que f es sobreyectiva. Como X es compacto, $f(X)$ es compacto y por lo tanto cerrado en Y. Como f es abierta, $f(X)$ también es un conjunto abierto en Y. Como Y es conexo, deducimos que $f(X) = Y$. $\square$

El siguiente resultado es fundamental y es una herramienta para formar o saber que ciertos espacios son compactos.

Teorema 4.2.2. *Sean* $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ *espacios topológicos compactos. Entonces* $X \times Y$ *con la topología producto es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos que cubre $X \times Y$ y sea $x \in X$. Como Y es compacto, $\{x\} \times Y$ es un subconjunto compacto de $X \times Y$. La familia $\mathcal{U}$ cubre $\{x\} \times Y$ y por lo tanto existen $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tales que $\{x\} \times Y \subset \cup_j U_j$. Para cada $(x, y) \in \{x\} \times Y$ sea $A_{(x,y)}, B_{(x,y)}$ abiertos de X e Y respectivamente tal que $(x, y) \in A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} \subset \cup_j U_j$. La familia de abiertos $\{A_{(x,y)} \times B_{(x,y)} : (x, y) \in \{x\} \times Y\}$ cubre $\{x\} \times Y$ y por lo tanto admite un subcubrimiento finito $\{A_i \times B_i : i = 1, .., m\}$ Ahora $W_x = \cap A_i$ es un abierto que contiene a x y $W_x \times B_i \subset A_i \times B_i$. Resulta que $W_x \times Y \subset \cup_i A_i \times B_i \subset \cup_j U_j$. Es decir, para cada $x \in X$ encontramos un abierto $W_x, x \in W_x \subset X$ tal que el "tubo" $W_x \times Y$ es recubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ (ver Figura 4.8). Como X es compacto, encontramos $W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}$ tal que $X \subset \cup_k W_{x_k}$ Ahora, $X \times Y = \cup_k W_{x_k} \times Y$, es decir $X \times Y$ es recubierto por un número finito de tubos que a su vez son recubiertos por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Luego, encontramos un subconjunto finito de elementos de $\mathcal{U}$ que cubre $X \times Y$. $\square$

Obviamente, el mismo resultado que acabamos de ver vale, por inducción para producto finito de espacios compactos:

Corolario 4.2.4. *Sean* $(X_i, \tau_i), i = 1, ..., n$ *espacios topológicos compactos. Entonces* $X_1 \times \ldots \times X_n$ *es compacto con la topología producto.*

Corolario 4.2.5. *En* $\mathbb{R}^n$ *con la topología usual, tenemos que:*

1. $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *es compacto*

2. $C \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto si y solamente si* C *es cerrado y acotado.*

Demostración. El primer ítem se deduce del corolario anterior y del Lema 4.2.1. El segundo ítem es similar al Corolario 4.2.1. De hecho, si C es compacto, como las proyecciones sobre cada coordenada son continuas, concluímos que la proyección de C es compacta en cada $\mathbb{R}$; deducimos que C es acotado y por Lema 4.2.3 es cerrado. Recíprocamente, si C es cerrado y acotado, entonces es un cerrado de un subconjunto del tipo de la parte anterior y por lo tanto compacto. $\square$

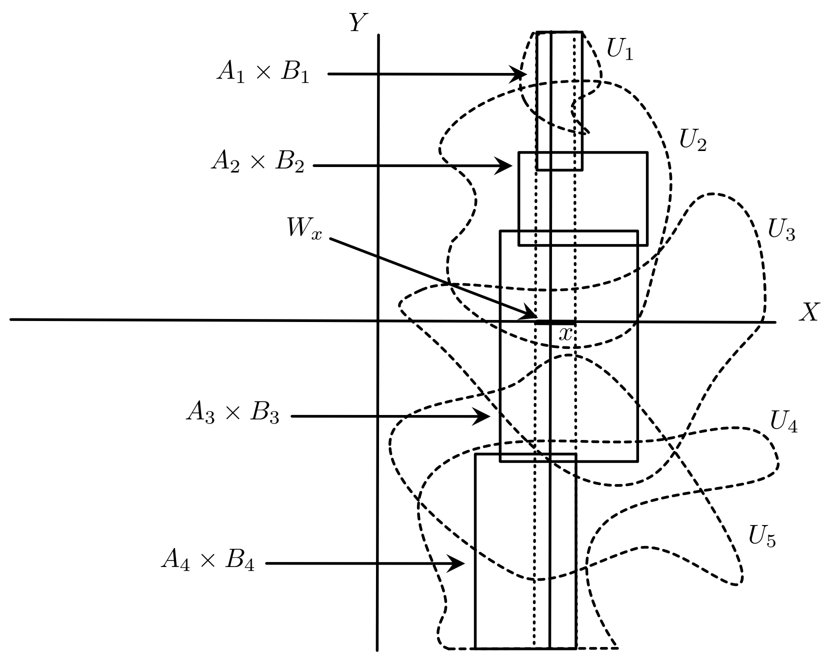


Figura 4.8:

Los espacios topológicos compactos verifican que todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación[2]. Esta propiedad se conoce como la *Propiedad de Bolzano-Weierstrass*.

Proposición 4.2.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y sea $A \subset X$ un conjunto infinito. Entonces A tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos por absurdo que A no tiene puntos de acumulación. Entonces para cada $x \in X$ existe un abierto U_x que contiene a x tal que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Ahora $X = \cup_{x \in X} U_x$. Como X es compacto resulta que existen $x_1, ..., x_n$ tal que $X = \cup_i U_{x_i}$. Pero entonces $A \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} - \{x_i\}) \right) = \emptyset$ lo que implica que $A \subset \{x_i : i = 1, ..., n\}$, es decir, A es finito. $\square$

Observación 4.2.2. No es cierto que si (X, τ_X) es un espacio topológico y todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación entonces (X, τ_X) es compacto. Tomemos $\mathbb{R}$ con la topología de las semirrectas a izquierda $\tau = \emptyset \cup \mathbb{R} \cup \{(-\infty, a) :$

[2] De hecho esta fue la primera definición de compacidad que luego se desechó por la que vimos.

$a \in \mathbb{R}\}$. Es claro que no es compacto ya que $\mathcal{U} = \{(-\infty, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento de $\mathbb{R}$ que no tiene subcubrimiento finito. Sin embargo, cualquier conjunto infinito tiene un punto de acumulación. De hecho, si $A \neq \emptyset$ cualquier punto p tal que existe $a \in A, a < p$ es punto de acumulación de A.

Los espacios métricos sabemos que son un excelente prototipo de espacios topológicos en donde nuestra intuición se manifiesta mas plenamente. Para los espacios métricos, tenemos varias caracterizaciones de la compacidad que son muy importantes y que ya seguramente se vieron en primeros cursos de Análisis o Cálculo.

Teorema 4.2.3. *Sea (X, d) espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

1. *X es compacto*
2. *Todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación*
3. *Toda sucesión tiene una subsucesión convergente*[3]

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: esto es la Proposición 4.2.1 y vale en general.

$(2 \Rightarrow 3)$: Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en X. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que es constante y por lo tanto converge. Supongamos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito y por lo tanto tiene un punto de acumulación p. Ahora, para cada $k \geq 1$ existe $x_{n_k} \in B(p, 1/k)$ y tenemos que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ converge a p.

$(3 \Rightarrow 1)$: Veamos primero que en estas condiciones (X, d) tiene base numerable. Para esto basta ver que X es separable. Para cada n existe un conjunto finito E_n tal que $\cup_{x \in E_n} B(x, 1/n) = X$. Veamos que tal conjunto E_n existe. Sea $x = x_1$ un punto cualquiera de X. Si $B(x_1, 1/n) = X$ tomamos $E_n = \{x_1\}$, si no elegimos x_2 tal que $x_2 \notin B(x_1, 1/n)$. Inductivamente, construimos $\{x_1, ..., x_k\}$ tal que $d(x_i, x_j) > 1/n$ para cualquier i, j. Luego este proceso debe terminar en algún momento pues de lo contrario conseguimos una sucesión $\{x_n\}$ que no tiene subsucesión convergente. Concluimos entonces que $\cup_n E_n$ es un conjunto numerable y denso. Por lo tanto X es separable y por lo tanto tiene base numerable $\mathcal{B}$.

Sea ahora $\mathcal{U}$ una familia de abiertos que cubre X. Como cada abierto $U \in \mathcal{U}$ es unión de elementos de la base, la familia $\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}\}$ cubre X y es numerable; y la numeramos $\mathcal{V} = \{B_n : n \in \mathbb{N}.\}$. Queremos

[3]Cuando un espacio tiene esta propiedad se le llama *secuencialmente compacto*

ver que existe una subfamilia finita $\mathcal{V}$ que cubre X. Supongamos por absurdo que no. Entonces para cada n elegimos $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_n$. Por hipótesis, esta sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ a un cierto punto p. Ahora, como $\mathcal{V}$ cubre X existe m tal que $p \in B_m$. Pero entonces, para todo $k \geq k_0$ se tiene que $x_{n_k} \in B_m$ para cierto k_0. Pero existe $k \geq k_0$ tal que $n_k > m$. Esto implica que $x_{n_k} \in B_m$ contradiciendo la construcción de la sucesión $\{x_n\}$. Hemos probado que existe una subfamilia finita $\{B_1, ..., B_n\}$ de $\mathcal{V}$ que cubre X. Sea entonces, para cada $i = 1, ..., n$ un elemento $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $B_i \subset U_i$. Concluimos que $\cup_i U_i = X$ y hemos probado que X es compacto. □

Veamos ahora una caracterización importante de la compacidad que es consecuencia de la dualidad entre abiertos y cerrados y complementos. Dicho de otra forma es la traducción de la compacidad en términos de conjuntos cerrados tomando complementos. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos cerrados de X. Decimos que la familia $\mathcal{C}$ tiene la *propiedad de intersección finita* (PIF) si la intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía, es decir, si $C_{\alpha_i} \in \mathcal{C} : i = 1, ..., n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{C}$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Teorema 4.2.4. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces X es compacto si y solamente si cualquier familia de cerrados $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in I\}$ con la PIF verifica que $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$: Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de cerrados con la PIF. Supongamos por absurdo que $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha = C_\alpha^c : \alpha \in I\}$. Como $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$ resulta que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X$, es decir la familia $\mathcal{U}$ cubre X. Como X es compacto, existen $\alpha_i : i = 1, ..., n$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Pero entonces

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}$$

contradiciendo que $\mathcal{C}$ tenía la PIF.

$(\Leftarrow)$: Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de abiertos que cubre X. Supongamos que ninguna familia finita de elementos de $\mathcal{U}$ cubre X, es decir, si

$\alpha_i \in I, i = 1, ..n$ entonces $\bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i} \subsetneq X$. Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha = U_\alpha^c : \alpha \in I\}$. Resulta que $\mathcal{C}$ es una familia de cerrados con la PIF. Pero luego $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$ lo que implica que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \neq X$ lo que contradice que $\mathcal{U}$ era un cubrimiento de X. □

Corolario 4.2.6. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto y sea $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de cerrados no vacíos y encajados, es decir, $C_{n+1} \subset C_n$. Entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Si además cada C_n es conexo, entonces $\cap_n C_n$ es conexo.*

Observación 4.2.3. Los conjuntos compactos y conexos juegan un rol muy importante y en particular tienen nombre propio: se les llaman *continuos*. Hay mucha literatura al respecto, así como ejemplos muy contraintuitivos: hay continuos que *no son* localmente conexo en ningún punto! A continuación vamos a mostrar un ejemplo famoso de un conjunto compacto conexo (un continuo) que es frontera de tres abiertos a la vez.

Ejemplo: Los lagos de Wada[4] Este es un ejemplo de un *continuo* del plano (es decir, un conjunto compacto y conexo) que es la frontera de tres abiertos disjuntos del plano. Comencemos con I_1 que es un disco del plano al que se le remueven dos discos interiores (ver Figura 4.9), por ejemplo el disco de centro el origen y radio 4 menos las bolas de radio uno centradas en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, $I_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\} - (B((2, 0), 1) \cup B((-2, 0), 1))$ El conjunto I_1 se puede pensar como una *isla con dos lagos*, donde el exterior del disco es el mar (agua salada). Uno de los lagos tiene agua azul y el otro de los lagos tiene agua verde. El complemento de I_1 son tres abiertos A_1 (agua salada), B_1 (agua azul) y C_1 (agua verde). Se construye un canal que lleva agua salada a la isla y que es 1-denso en la isla (es decir todo punto de I_1 esta a distancia menor que 1 del canal) y de forma que I_1 menos el canal es conexo: obtenemos I_2. Luego trazamos un canal del lago azul que lleve agua azul a I_2 y que sea 1/2-denso en I_2 y de forma que el resto de la isla sea conexo obteniendo I_3. Luego trazamos un canal desde el lago verde de forma que sea 1/3 denso en I_3 y que

[4]Takeo Wada (1882-1944) fue un matemático japones, autor de este ejemplo. Pero fue Brouwer [Br2] quien dió el primer ejemplo de un continuo del plano que es borde de tres abiertos aunque de construcción mas compleja. El resultado de Brouwer hechaba por tierra una teoría de las curvas planas por Schonflies, en donde en particular definía una curva como la frontera común a dos abiertos del plano -es decir- tomaba como definición de curva el resultado del Teorema de Jordan sobre curvas en el plano.

el complemento sea conexo y obtenemos I_4 Ahora extendemos el canal de agua salada para que sea $1/4$ denso, etc. Es decir, para cada n I_{n+1} se obtiene de I_n extendiendo un canal (agua salada si $n = 1(mod 3)$, agua azul si $n = 2(mod 3)$ y agua verde si $n = 3(mod 3)$) de forma que sea $1/n$-denso en I_n y que I_{n+1} sea conexo. La familia I_n es una sucesión encajada de compactos conexos. Sea $C = \cap_n I_n$. Tenemos que C es un compacto conexo no vacío. Para cada n, el complemente de I_n son tres abiertos A_n, B_n y C_n disjuntos dos a dos, y que forman una sucesión creciente de abiertos. El complemento de I es unión de tres abiertos A, B y C que son disjuntos e I es frontera de cada uno de ellos. El continuo I es *indescomponible:* NO es unión de dos subconjuntos propios compactos, conexos y no vacíos.

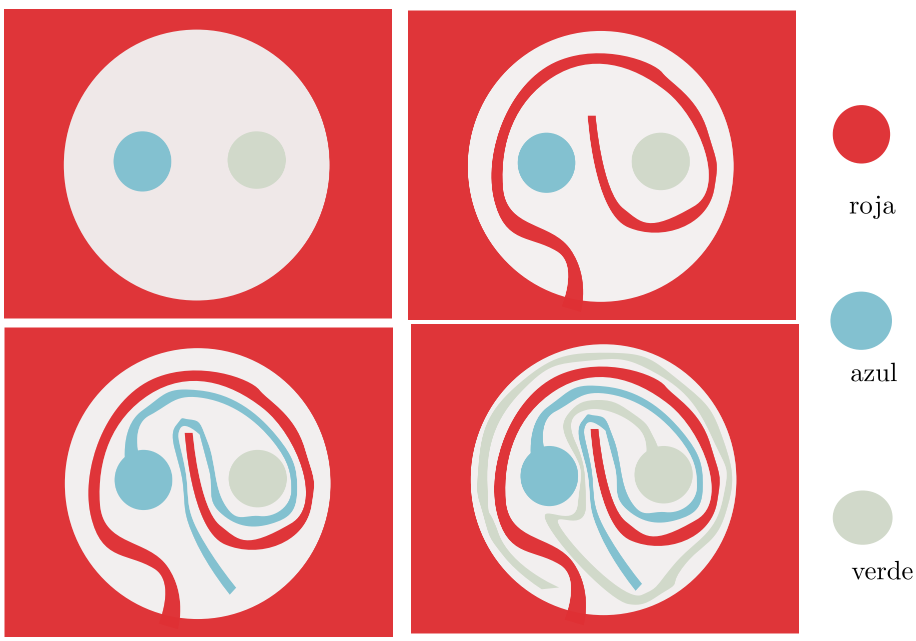


Figura 4.9: Primeras contrucciones de los canales de agua roja, azul y verde

4.2.1. El conjunto de Cantor

Veremos aquí la construcción del clásico ejemplo del Conjunto de Cantor *usual*. Es un ejemplo paradigmático en Matemática, tanto por sus propiedades como por su construcción. Un hecho significativo es que sus propiedades caracterizan el conjunto y son todos *homeomorfos*. Un conjunto de cantor aparece en diferentes formas y en diversos ambientes, pero el que vamos a ver a seguir, conocido como el Cantor *usual*, es un subconjunto de la recta real.

Hagamos la siguiente notación: si $I = [a, b]$ es un intervalo de la recta denotamos por $\hat{I}$ lo que se obtiene de remover de I el tercio central:

$$\hat{I} = [a, b] - \left(a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3}\right) = \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[a + \frac{2(b-a)}{3}, b\right].$$

Si tenemos una unión disjunta de intervalos $C = \cup_k I_k$ denotamos por $\hat{C} = \cup_k \hat{I}_k$ lo que se obtiene de remover de C cada tercio central de cada intervalo que compone C.

Comencemos con $C_0 = [0, 1]$. Sea $C_1 = \hat{C}_0 = [0, 1/3] \cup [2/3,1]$. En general $C_{n+1} = \hat{C}_n$ (ver Figura 4.10). La familia $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$ es una familia encajada de conjunto compactos de $\mathbb{R}$ (con la topología usual). Cada C_n es una unión disjunta de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Se define el conjunto de Cantor como

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

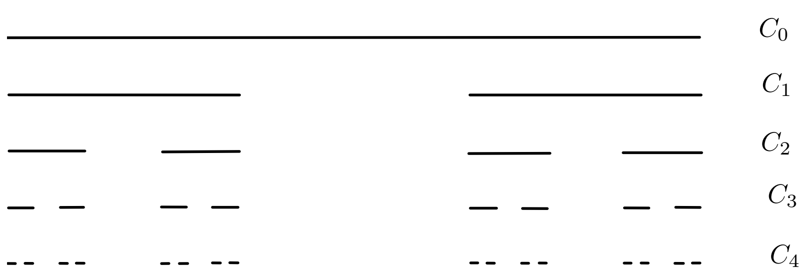


Figura 4.10: Primeros pasos de la construcción del Conjunto de Cantor

Por el Corolario 4.2.6 tenemos que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Veremos algunas propiedades de este conjunto. Decimos que un subconjunto C de un espacio topológico (X, τ_X) es *perfecto* si C es igual al conjunto de sus puntos de acumulación C'. Dicho de otra forma, C es cerrado y todo punto de C es punto de acumulación de C.

Teorema 4.2.5. *El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *Es perfecto*

2. *Es totalmente inconexo, es decir, las componentes conexas son puntos.*

3. *Es homeomorfo al conjunto* $\Sigma_0 = \{a : \mathbb{N} \to \{0,2\}\}$ *con la distancia* $d(a,b) = \sum_{n\geq 0} \frac{|b(n)-a(n)|}{3^n}$ *y también homeomorfo a* $\Sigma_1 = \{a : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ *con la distancia* $d(a,b) = \sum_{n\geq 0} \frac{|b(n)-a(n)|}{2^n}$*. En particular* $\mathcal{C}$ *tiene la potencia del continuo.*

4. *Existe una función* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continua, monótona y sobreyectiva tal que* $f(\mathcal{C}) = [0,1]$.

Demostración. Ya sabemos que $\mathcal{C}$ es cerrado. Veamos que cada punto de $\mathcal{C}$ es punto de acumulación de $\mathcal{C}$. Sea $c \in \mathcal{C}$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea n tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Luego $c \in I_n$ donde I_n es uno de los intervalos de C_n y además $c \in I_n \subset B(c,\varepsilon)$. Luego $\hat{I}_n$ consta de dos intervalos disjunto I_{n+1} e J_{n+1} que están incluidos en C_{n+1}. Ahora c está en alguno de estos, digamos $c \in I_{n+1}$. Como $\mathcal{C} \cap J_{n+1} \neq \emptyset$ resulta que $\mathcal{C} \cap B(x,\varepsilon) - \{c\} \neq \emptyset$.

El mismo tipo de argumento muestra que $\mathcal{C}$ es totalmente inconexo. Para la ultima parte, consideramos la expansión triádica de un real $r \in [0,1]$ $r = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n}$ donde $a_n \in \{0,1,2\}$. Si para algún n se tiene que $a_n = 1$ entonces r pertenece a alguno de los tercios centrales que fueron removidos. Los puntos de borde, que son de la forma $\frac{k}{3^n}$ admiten dos expansiones distintas, pero solo una donde los a_n son 0 o 2. Es decir, si $r \in \mathcal{C}$ existe una única sucesión $a : \mathbb{N} \to \{0,2\}$ tal que $r = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{3^n}$. Es claro que esta asociación es un homeomorfismo. Es claro también que Σ_0 es homeomorfo a Σ_1.

Finalmente consideremos $\mathcal{C} = \Sigma_1$ y sea $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ donde $f(r) = f((a_n)) = \sum_n \frac{a_n}{2^n}$. Como el orden en $\mathcal{C}$ (como subconjunto de $\mathbb{R}$) es igual al orden lexicográfico en Σ_1 (considerando $0 < 1$) resulta que f es monótona en $\mathcal{C}$. Por otra parte $f(\mathcal{C})$ es compacto y denso en $[0,1]$ por lo que $f(\mathcal{C}) = [0,1]$. Como es además monótona y sobreyectiva, se extiende (de forma única) a una función continua y monótona definida en todo $[0,1]$. $\square$

Las primeras dos condiciones *caracterizan* los conjuntos de Cantor, como enunciamos a seguir. La demostración del teorema excede el alcance de este curso (ver por ejemplo [HY]).

Teorema 4.2.6. *Sea* (X,d) *un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente inconexo. Entonces* (X,d) *es homeomorfo al conjunto de Cantor usual* $\mathcal{C}$.

Así, a un (X, d) es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente inconexo lo llamaremos *un conjunto de Cantor*.

Haremos ahora un par de digresiones que son interesantes e ilustrativas pero sin entrar en formalidades.

El collar de Antoine

Veamos un ejemplo particular de un conjunto de Cantor en $\mathbb{R}^3$, conocido como el *Collar de Antoine*[5], que tiene una particularidad interesante: su complemente en $\mathbb{R}^3$ NO es simplemente conexo![6]

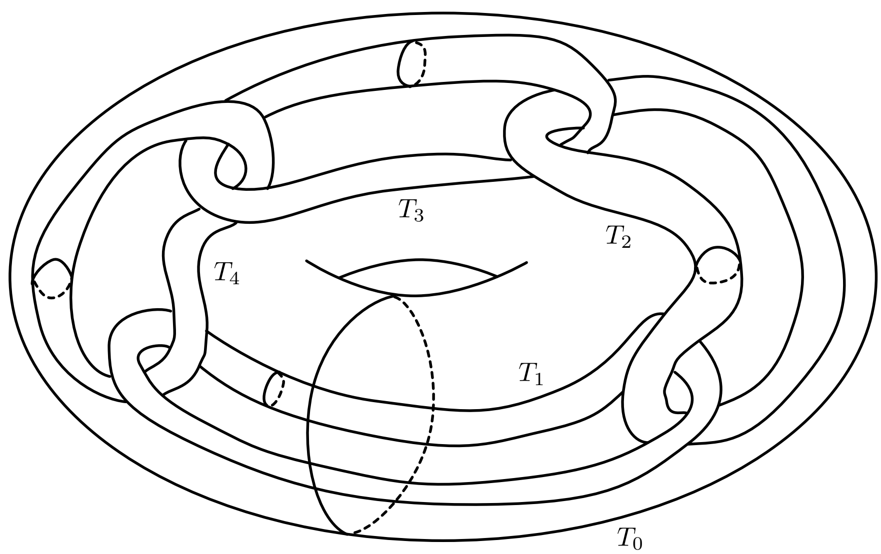


Figura 4.11: Primer paso de la construcción del Collar de Antoine

Comenzamos con toro sólido en T_0 en $\mathbb{R}^3$. Dentro de $C_0 = T_0$ consideramos

[5] Louis Antoine (1888-1971) fue un matemático francés. Cuando estudiaba en la Ecole Normal Superior, fue movilizado para pelear en la primera guerra mundial, en donde perdió la vista a causa de la heridas de guerra. H. Lebesgue lo motivó a seguir estudiando e investigando, motivándolo a dedicarse a la topología en dimensiones bajas. En 1921 defiende su doctorado en donde exhibe el ejemplo que describimos en esta sección, [A]

[6] Un espacio X es simplemente conexo si toda curva cerrada es homotópica a un punto, es decir, si para toda función continua $\alpha : S^1 \to X$ existe $h : S^1 \times [0, 1] \to X$ continua tal que $h(t, 0) = \alpha(t)\, \forall t \in S^1$ y $h(t, 1) = p\, \forall t \in S^1$ para algún $p \in X$.

$C_1 = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ unión de 4 toros sólidos disjuntos cuyo diámetro es a lo sumo la mitad de T_0 y enlazados como en la Figura 4.11. En el siguiente paso consideramos C_2, que consiste en realizar la misma operación en cada toro de C_1, es decir, colocamos 4 toros sólidos disjuntos pero enlazados, y así sucesivamente... El conjunto $T = \cap_n C_n$ es el llamado Collar de Antoine. Es fácil ver que T es un conjunto de cantor en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo una curva simple en $\mathbb{R}^3$ que le da una vuelta al toro original, no puede ser deformada a un punto en $\mathbb{R}^3 - T$.

La conjetura de Schoenflies y la esfera cornuda de Alexander.

Es conocido el Teorema de la curva de Jordan[7]: *una curva cerrada simple en el plano divide al mismo en dos componentes conexas*. Recordemos que una curva simple cerrada en el plano es un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a S^1. Es posible extender este homeomorfismo a todo $\mathbb{R}^2$? Es decir , ¿existe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo tal que $f = F_{/S^1}$ es un homeomorfismo entre S^1 y $\mathcal{C}$? Esto es verdad y es un resultado de A. Schoenflies[8]:

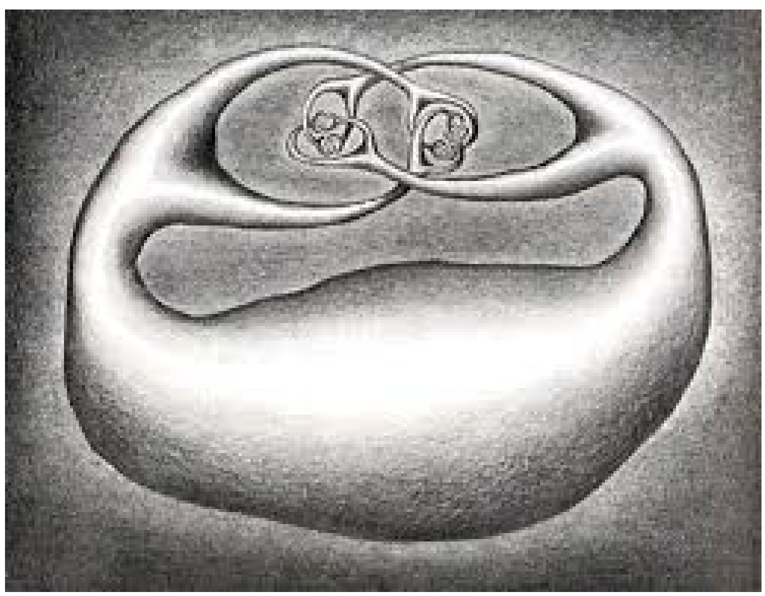


Figura 4.12: La esfera cornuda de Alecander

[7]Camille Jordan (1838-1922), matemático francés.
[8]Arthur Shoenflies (1853-1928), matemático alemán.

Teorema de Schoenflies: *Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada del plano, entonces existe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismos tal que $F_{/S^1}$ es un homeomorfismo entre S^1 y $\mathcal{C}$.*

Una formulación equivalente es: una curva simple cerrada en la esfera S^2 divide a la esfera en dos componentes conexas que son homeomorfas a la bola $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ (y que la componente conexa junto con la bola es homeomorfo a la bola cerrada). Schoenflies se preguntó (o conjeturó) si esto sería cierto en dimensiones mayores: Sea S un subconjunto de S^{n+1} que es homeomorfo a S^n, entonces $S^{n+1} - S$ es unión de dos bolas de dimensión $n+1$? Observemos que el Teorema de Jordan vale en dimensiones mayores, así que $S^{n+1} - S$ tiene dos componentes conexas. La pregunta es: estas componentes son (homeomorfas) a bolas?

J. W. Alexander [9] probó que esto no es cierto. Dio un ejemplo de subconjunto de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a la esfera cuya componente no acotada no es simplemente conexa. Este ejemplo es conocido como la *esfera cornuda de Alexander* (ver Figura 4.2.1).

Una forma de pensarlo es imaginar una bola pesada que está "colgada"del Conjunto de Cantor usual, ver Figura 4.13. Luego 'intercambiamos"lo que cuelga de "2"por lo de "3", y obtenemos entonces lo que se vé en la Figura 4.14(a). Luego, intercambiamos lo que cuelga de "$2'$"por "$3'$" y a su vez "$2''$"por '$3''$"para obtener Figura 4.14(b). Si seguimos con este proceso obtenemos la Esfera Cornuda de Alexander.

En este ejemplo hay un conjunto de Cantor de *puntos singulares*. El problema de Schoenflies se modificó pidiendo que no haya puntos singulares (por ejemplo que S sea difeomorfa a S^n). En este caso el problema tiene solución positiva (demostrada por M. Brown en 1960). [10]

[9] James Waddell Alexander II (1888-1971), matemático estadounidense, desarrolló su carrera en Princeton. Era muy buen escalador, habiendo logrado subir a los Alpes Suizos y a las Montañas Rocallosas. Le gustaba también escalar los edificios de Princeton y dejaba abierta la ventana de su oficina en el piso mas alto de Fine Hall en Princeton para poder ingresar en ella escalando el edificio.

[10] También se puede preguntar sobre la estructura diferenciable del complemento, el caso $n = 3$ sigue abierto.

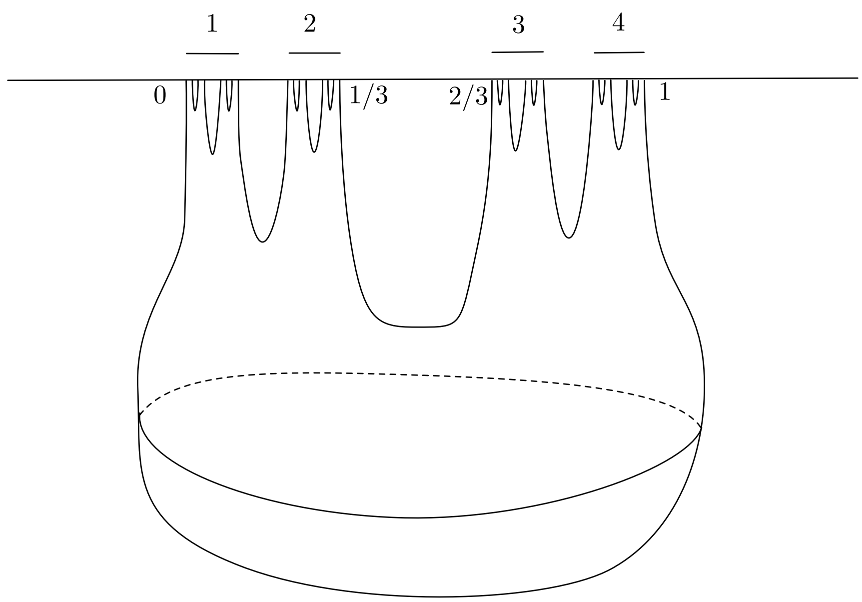


Figura 4.13:

4.2.2. Compacidad local

Hemos hablado de que la compacidad tiene que ver con cierta “finitud”. Hay espacios, por ejemplo $\mathbb{R}$ con la topología usual, que no son compactos, pero que “localmente” si lo son, es decir, esa “finitud” se ve localmente. Hay diferentes nociones en la literatura sobre la compacidad local, que refieren a diferentes aspectos de lo que uno podría entender como dicho concepto y que están reflejadas en las afirmaciones del siguiente teorema. Sin embargo, todas ellas coinciden cuando el espacio en cuestión es Hausdorff.

Teorema 4.2.7. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff y sea $x \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un compacto C que contiene a x en su interior.*
2. *Dado U abierto que contiene a x existe un compacto C_U que contiene a x en su interior y $C_U \subset U$.*
3. *Dado U abierto que contiene a x existe V abierto tal que $\overline{V}$ es compacto y $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

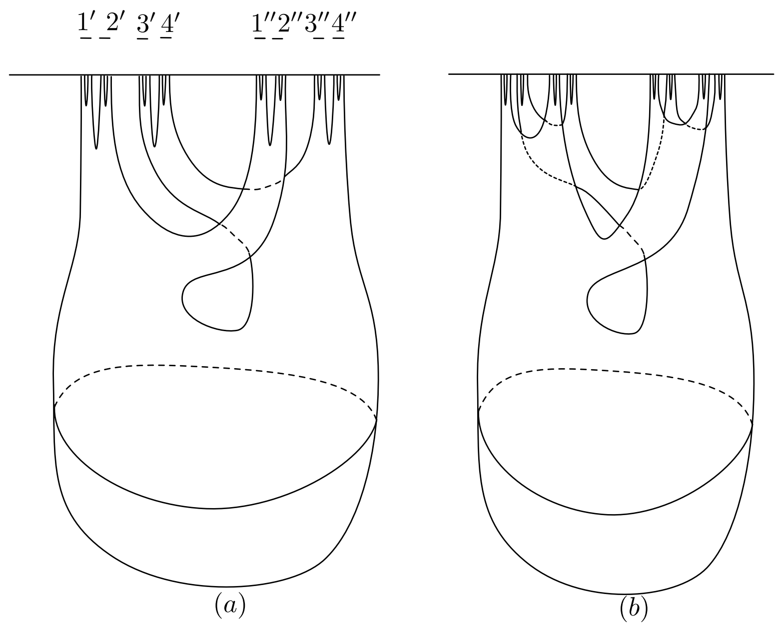


Figura 4.14:

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: Sea U un abierto que contiene a x. Podemos suponer que $U \subset C$. Luego $C_1 = U^c \cap C$ es un cerrado de C y por lo tanto compacto. Además $x \notin C_1$. Para cada $c \in C_1$ existe un abierto U_c y un abierto $V_c \subset U$ tal que $c \in U_c, x \in V_c$ y $U_c \cap V_c = \emptyset$. La familia $\{U_c : c \in C_1\}$ cubre a C_1 y por la compacidad de este, concluimos que tiene un subcubrimiento finito $\{U_{c_1}, ..., U_{c_k}\}$. Sea $A = \cup_i U_{c_i}$ y $V = \cap_i V_{c_i}$. Resulta que A y V son abiertos, $C_1 \subset A, x \in V \subset U \subset C$ y $A \cap V = \emptyset$. Sea $A_1 = A \cup C^c$. Tenemos que A_1 es abierto. Tomemos $C_U = A_1^c$. Concluimos que $x \in V \subset C_U \subset C$ y C_U es cerrado. Como C es compacto resulta C_U compacto. Por lo tanto C_U es un compacto contenido en U y que contiene a x en su interior, como queríamos probar.

$(2 \Rightarrow 3)$: es inmediato, ya que basta tomar V como el interior de C_U. Como X es Hausdorff, C_U es cerrado y $\overline{V} \subset C_U$ y es compacto.

$(3 \Rightarrow 1)$: trivial. $\square$

La definición de compacidad local la haremos solamente para espacios Hausdorff.

Definición 4.2.2. Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff y sea $x \in X$.

Decimos que X es *localmente compacto en x* si se verifica cualquiera de la afirmaciones del Teorema 4.2.7, por ejemplo: dado un abierto $U, x \in U$ existe un abierto V con $x \in V$ tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$. Decimos que X es localmente compacto si lo es en cada uno de sus puntos.

Otra forma de expresar la compacidad local es *todo punto tiene una base de entornos compactos*. Sin embargo, por el teorema anterior, basta que un punto tenga un entorno compacto para que tenga un base de entornos compactos! Veamos algunos ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es localmente compacto.
- $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es localmente compacto
- Un conjunto X con la topología discreta es localmente compacto.
- $\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior no es localmente compacto
- $\mathbb{Q}$ con la topología heredada de la usual en $\mathbb{R}$ no es localmente compacto.

• Consideremos en $\mathbb{R}$ la distancia $d_S(x,y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$. Observar que induce la topología usual. Ahora consideremos $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ con la distancia

$$d((a_n),(b_n)) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_S(a_n,b_n)}{2^n}$$

(esta es una distancia que induce la topología producto en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, ver Capítulo 5). Veamos que no es localmente compacto. Basta ver que dado $\varepsilon > 0$ entonces $B(\mathbf{0},\varepsilon)$ no tiene clausura compacta, donde $\mathbf{0}$ es la sucesión que es 0 para todo n. De hecho, si n_0 es tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ resulta que $K = \{(a_n) : a_n = 0\, \forall n \neq n_0\} \subset B(\mathbf{0},\varepsilon)$ y por lo tanto la sucesión de elementos en K dada por $a_n^{(m)} = 0$ para todo $n \neq n_0$ y $a_{n_0}^{(m)} = m$ no tiene subsucesión convergente.

• Observemos que si bien $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto, está metido en un espacio ($\mathbb{R}$) que si lo es. Por otra parte $\mathbb{R}_\ell$ no es localmente compacto y no es un espacio metrizable. Veamos entonces un ejemplo mas "auténtico", un espacio métrico sin "agujeros" como sí los tiene $\mathbb{Q}$ (aunque esto quedará claro mas adelante cuando veamos completitud en el Capítulo 7). Consideremos el *espacio de Hilbert* $\ell^2(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n\geq 0} a_n^2 < \infty\}$ con $d(a,b) = \left(\sum_{n\geq 0}(a_n-b_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.[11] Tomemos la sucesión $a_n = 0$ para todo n

[11] Veremos mas adelante en el Capítulo 7 que efectivamente es una distancia. De hecho $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial y la distancia proviene del producto interno $\langle (a_n),(b_n)\rangle = \sum_n a_n b_n$.

y que le llamaremos $\mathbf{0}$. Veamos que no hay ningún compacto C que contiene a $\mathbf{0}$ en su interior. Como es un espacio métrico, si tal conjunto compacto C existiera, tendríamos que si $\varepsilon > 0$ es tal que $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \subset C$ entonces cualquier sucesión en $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ tendría una subsucesión convergente. Veamos que esto no es así; esto se debe al hecho que $\ell^2(\mathbb{N})$ tiene "dimensión infinita". Sea $\varepsilon_1 < \varepsilon$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $b^{(m)} = \{b_n^{(m)} : n \in \mathbb{N}\}$ donde $b_n^{(m)} = 0$ si $n \neq m$ y $b_m^{(m)} = \varepsilon_1$. Ahora, para todo m tenemos que $\left(\sum_n (b_n^{(m)})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_1$ y por lo tanto $b^{(m)} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Sin embargo, cualquiera sean $m_1 \neq m_2$ tenemos que $d(b^{(m_1)}, b^{(m_2)}) = \sqrt{2}\varepsilon_1$ y por lo tanto $b^{(m)}$ no tiene una subsucesión convergente.

Proposición 4.2.2. *Valen las siguientes afirmaciones.*

1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff y compacto. Entonces X es localmente compacto*

2. *Sea (X, τ_X) un espacio localmente compacto y sea Y un subconjunto cerrado de X. Entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. La primera afirmación surge inmediatamente del Teorema 4.2.7. La segunda afirmación sigue del hecho de que como (X, τ_X) es Hausdorff, los conjuntos compactos son cerrados y por lo tanto si Y es cerrado y C compacto entonces $Y \cap C$ es un cerrado de C y por lo tanto compacto. $\square$

La compacidad local NO es un invariante por funciones continuas. Veamos un ejemplo. Sea $X = \{-1\} \cup (0, 1)$ subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología relativa de la usual. Es claro que X es localmente compacto. Sea $f : X \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(-1) = (0, 0)$ y si $x \in (0, 1)$ entonces $f(x) = (x, \sin \frac{1}{x})$. Es claro que f es continua. Tenemos que $f(X)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la gráfica de $\sin \frac{1}{x}$ junto con el origen, que no es un espacio localmente compacto. Sin embargo, como sucede con las propiedades locales, la compacidad local es preservada por *funciones continuas y abiertas*.

Proposición 4.2.3. *Sea (X, τ_X) un espacio localmente compacto y sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función continua y abierta donde Y es Hausdorff. Entonces $f(X)$ es localmente compacto.*

Demostración. Como Y es Hausdorff, tenemos que $f(X)$ es Hausdorff. Sea $y = f(x) \in f(X)$ y sea V_y un abierto que contiene a y. Luego $f^{-1}(V_y)$ es un abierto que contiene a x. Como X es localmente compacto, existe U abierto, tal que $\overline{U}$

es compacto y $x \in U \subset \overline{U} \subset f^{-1}(V_y)$. Como f es abierta, tenemos que $f(U)$ es una abierto que contiene a $y = f(x)$. Como f es continua, $f(\overline{U})$ es un compacto, contenido en V_y y conteniendo a y en su interior. □

Proposición 4.2.4. *El producto de dos espacios localmente compactos es localmente compactos.*

Demostración. Ejercicio □

4.3. Sucesiones y Redes

Las sucesiones son un instrumento importante, sobre todo en espacios métricos, puesto que permiten expresar varias propiedades topológicas en términos de sucesiones. Por ejemplo:

Teorema 4.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Valen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $A \subset X$ entonces $x \in \overline{A}$ si y solamente si existe $\{x_n\} \subset A$ tal que x_n converge a x.*

2. *Una función $f : X \to Y$ es continua si y solamente si para todo $x \in X$ y toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a x se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.*

3. *X es compacto si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. 1)($\Leftarrow$) : esta afirmación *vale siempre* y se deja como ejercicio. Veamos ($\Rightarrow$) : Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Luego se cumple que $\{x_n\}$ converge a x.

2)($\Rightarrow$) : esta afirmación también *vale siempre*. Sea $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}$ que converge a x. Sea V abierto que contiene a $f(x)$. Luego $f^{-1}(V)$ es un abierto que contiene a x y por lo tanto existe n_0 tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para todo $n \geq n_0$. Pero entonces $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq n_0$ y resulta que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

2)($\Leftarrow$) : Sea $A \subset X$ y $x \in \overline{A}$. Luego, existe $\{x_n\} \subset A$ que converge a x (por la primera parte). Pero entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$ y concluimos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Por lo tanto $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para cualquier $A \subset X$ y por lo tanto f es continua.

El ítem 3) fue demostrado en el Teorema 4.2.3. □

De hecho, las equivalencias en los items 1) y 2) del teorema anterior vale en un contexto mas general.

Definición 4.3.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Decimos que X tiene *base local numerable* o que *verifica el primer axioma de numerabilidad* (o es $N1$) si para todo $x \in X$ existe una base $\mathcal{N}_x$ de entornos de x que es numerable.

Observación 4.3.1. Observar (ejercicio) que los items 1) y 2) del teorema anterior valen si se sustituye (X, d) espacio métrico por (X, τ_X) con base local numerable. De hecho la misma prueba sirve.

Sin embargo, en contextos mas generales las afirmaciones del teorema anterior no son válidas. Veamos un ejemplo. En $\mathbb{R}$ consideramos la topología usual y en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ consideramos la topología τ inducida por la base $\mathcal{B} = \{\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n : B_n \text{ abierto en } \mathbb{R}\}$ (esta es la topología box que veremos en el capítulo siguiente). Observar que una sucesión $\{a_n^{(m)} : n \in \mathbb{N}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\{b_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en esta topología si y solamente si $\lim_n a_n^{(m)} = b_n$ para todo m y existe m_0 y n_0 tal que $a_n^{(m)} = b_n$ para $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$.

Ahora, consideremos $A = \{(a_n) : a_n > 0 \ \forall\, n\}$. Entonces $\mathbf{0} \in \overline{A}$ pero ninguna sucesión en A converge a $\mathbf{0}$. Esto da un contraejemplo para el ítem 1) $\Rightarrow$.

Además, tomemos $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ por $f((a_n)) = 0$ si $a_n = 0$ excepto para finitos $n's$ y $f((a_n)) = 1$ en otro caso. Resulta que si $(a_n^{(m)}) \to_m (b_n)$ entonces $f((a_n^m)) \to_m f((b_n))$ pero f no es continua ya que la preimagen de 0 no es un abierto (de paso comentamos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no conexo con esta topología, ver Capítulo 5). Esto nos dá un contraejemplo para el ítem 2) $\Leftarrow$. En particular tenemos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con esta topología no es metrizable.

Hay una noción que extiende el concepto de sucesión y que juega el papel de las sucesiones en espacios métricos pero en espacios topológicos generales, es el concepto de *red*. Para ello precisamos la noción de conjunto dirigido.

Definición 4.3.2. Un conjunto $(D, \leq)$ con un orden parcial es un conjunto dirigido si dados $d_0, d_1 \in D$ existe $d \in D$ tal que $d_0 \leq d$ y $d_1 \leq d$.

- El conjunto de los naturales con el orden usual es un conjunto dirigido.

- Este es un ejemplo importante: Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $x \in X$. Entonces, una base $\mathcal{N}_x$ de entornos de x con la relación de inclusión es un conjunto dirigido.

• Si $(D, \leq_D)$ y $(E, \leq_E)$ son conjuntos dirigidos, entonces $D \times E$ con el orden lexicográfico es un conjunto dirigido.

Definición 4.3.3. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $(D, \leq)$ un conjunto dirigido. Una *red* en X es una función $T : D \to X$. En general la denotaremos por $(T_d)_{d \in D}$. Decimos que la red converge a $x \in X$ si dado un entorno U de x existe d_0 tal que $T_d \in U$ para todo $d \geq d_0$.

Si $(E, \leq_E)$ es un conjunto dirigido y $S : E \to D$ es una función que satisface que para todo $d_0 \in D$ existe $e_0 \in E$ tal que $d_0 \leq S(e)$ para todo $e_0 \leq e$ entonces $\hat{T} = T \circ S$ se llama *subred* de la red $T : D \to X$.

El siguiente teorema caracteriza propiedades topológica en términos de redes.

Teorema 4.3.2. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Valen las siguiente afirmaciones.*

1. *Sea $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solamente si existe una red $(T_d)_{d \in D} \subset A$ que converge a x.*

2. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y solamente si para todo $x \in X$ y toda red $(T_d)_{d \in D}$ que converge a x se tiene que la red $f \circ T$ converge a $f(x)$.*

3. *X es compacto si y solamente si toda red tiene una subred convergente.*

Demostración. 1) $\Leftarrow$: es igual que para el caso de sucesiones y se deja como ejercicio. Veamos 1) $\Rightarrow$: Sea $x \in \overline{A}$ y consideremos un base local $\mathcal{N}_x$ de entornos de x con el orden dado por la inclusión. Para cada $N_x \in \mathcal{N}_x$ elegimos un punto de $A \cap N_x$ que llamaremos T_{N_x}. Esto nos da una red en A definida en $(\mathcal{N}_x, \subseteqq)$. Esta red converge a x puesto que si U es un abierto que contiene a x existe $N_{x,0} \subset U$ y se tiene que $T_{N_x} \in U$ para todo $N_x \subset N_{x,0}$.

2) $\Rightarrow$: es igual que en el caso de sucesiones. El caso 2) $\Leftarrow$ es igual que en el caso de sucesiones una vez que sabemos la equivalencia en 1).

Veamos el ítem 3) $\Rightarrow$: Sea $(T_d)_{d \in D}$ una red en X. Para cada $d \in D$ definamos el subconjunto $A_d = \overline{\{T_{d'} : d' \geq d\}}$. Tenemos que $\{A_d : d \in D\}$ es una familia de cerrados y afirmamos que tiene la PIF. Sean $d_0, \ldots, d_n$ elementos en D. Luego, existe $d \in D$ tal que $d_i \leq d$ para todo $i = 0, \ldots, n$ y por lo tanto $T_d \in A_{d_i}$ para todo $i = 0, \ldots n$. Como X es compacto, resulta entonces que existe $x \in \cap_{d \in D} A_d$. Sea $\mathcal{N}_x$ una base de entornos de x con la relación de inclusión y consideremos

$D \times \mathcal{N}_x$ con el orden $(d, U) \leq (d', U')$ si $d \leq d'$ y $U' \subset U$.. Sea $S : D \times \mathcal{N}_x \to D$ tal que $S(d, U) = d'$ donde d' es tal que $d \leq d'$ y $T_{d'} \in U$. Luego $T \circ S$ es una subred. Veamos que converge a x. Sea V un abierto de x y sea $U_0 \in \mathcal{N}_x$ tal que $U_0 \subset V$. Como $x \in \cap_d A_d$ entonces existe d_0 tal que $T_{d_0} \in U_0$. Pero entonces para todo $(d, U) \geq (d_0, U_0)$ tenemos que $T \circ S(d, U) \in U_0 \subset V$.

Hagamos ahora 3) $\Leftarrow$: Sea $\mathcal{C}$ una familia de cerrados con la PIF. Veamos que la $\cap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{B}$ la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Tenemos que $\mathcal{B}$ también es una familia de cerrados con la PIF. Ordenemos $\mathcal{B}$ con la inclusión, lo que hace $(\mathcal{B}, \subseteqq)$ un conjunto dirigido. Para cada $B \in \mathcal{B}$ elegimos $T_B \in B$. Esto es una red en X. Por hipótesis tenemos una subred T_{B_d} convergente, digamos a $z \in X$. Afirmamos que $z \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Sea U abierto que contiene a z y sea $B \in \mathcal{B}$. Pero entonces, sabemos que existe d tal que $B_d \subset B$ y $T_{B_d} \in U$. Esto implica que $z \in \overline{B}$, pero como B es cerrado concluimos que $z \in B$. Entonces $z \in \cap_{B \in \mathcal{B}} B \subset \cap_{C \in \mathcal{C}} C$. Hemos probado que X es compacto.

$\square$

4.4. Ejercicios

4.4.1. Conexión

(1) Sean D_1 y D_2 dos discos abiertos en el plano tal que $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$ se intersectan en un solo punto (es decir, los circulos del borde de los discos son tangentes). Cuales de los conjuntos $D_1 \cup D_2, \overline{D_1} \cup D_2, \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ son conexos?

(2) Dar un ejemplo de un subconjunto conexo C en $\mathbb{R}^2$ tal que ∂C no sea conexo.

(3) Sean τ y τ' dos topologías en X. Si $\tau' \supset \tau$, la conexión de X según una topología, que consecuencia tiene sobre la conexión en la otra?

(4) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico (X, τ). Supongamos que $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$. Probar que $\cup_\alpha A_\alpha$ es conexo.

(5) Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subconjunto. Sea $C \subset X$ un subconjunto conexo. Probar que si $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap A^c \neq \emptyset$ entonces $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

(6) Es $\mathbb{R}_\ell$ (es decir, $\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior) conexo? Que subconjuntos de $\mathbb{R}_\ell$ son conexos?

(7) Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ (con las topologías usuales) una función continua. Probar que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.[12]

(8) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua (con la topología usual). Probar que existe x tal que $f(x) = x$. Si consideramos la topología heredada de $\mathbb{R}_\ell$, es cierto el resultado?

(9) Probar que el producto de dos espacios conexos por caminos es conexo por caminos.

(10) Probar que S^n es conexo por caminos.

(11)

a) Sea $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y sea T es subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que consiste de la union de todos los segmentos que unen los puntos de $\mathbb{Q}_0$ con $p = (0,1)$. Probar que T es conexo, pero es localmente conexo solo en p.

b) Hallar un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo pero no sea localmente conexo en ningún punto.

(12) Determinar si son conexos o conexos por caminos los siguientes subconjuntos Y de $\mathbb{R}^2$ (con la topología relativa de la usual). Si no lo son determinar su componentes conexas y componentes conexas por caminos. Determinar si son o no localmente conexos o localmente conexos por caminos o en que puntos lo son.

a) Y es la curva del seno del topólogo $\overline{S}$ donde $S = \{(x, \sin \frac{1}{x} : x \in (0,1]\}$.

b) $Y = S \cup (0,-1) \cup (0,1)$ donde S es como en la parte anterior.

c) $Y = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \times [0,1] \cup \{0\} \times [0,1]$

d) $Y = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \times [0,1] \cup \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$.

e) $Y = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(x, \sin \frac{1}{x-n}) : x \in (n, n+1)\}$.

(13) Dar un ejemplo de un subconjunto Y de $\mathbb{R}^2$ que sea conexo y $p \in Y$ tal que Y sea localmente conexo en p pero no localmente conexo por caminos en p.

[12]Es el caso unidimensional del Teorema de Borsuk-Ulam: una función $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ continua tiene igual imagen en un par de puntos antipodales, es decir, existe x tal que $f(x) = f(-x)$. Esto se acostumbra a ejemplificar diciendo que siempre hay en la Tierra dos puntos antipodales donde la temperatura y la presión son iguales.

(14) Dar un ejemplo de una función continua que no preserve la conexión local o la conexión local por caminos.

(15) Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Decimos que $x \in X$ es un *punto separador* si $X - \{x\}$ no es conexo.

a) Sean X, Y espacios topológicos conexos y sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Probar que puntos separadores de X se corresponden via f en puntos separadores de Y. Deducir que X e Y tienen la misma cantidad de puntos separadores y de puntos no separadores.

b) Utilizar lo anterior para determinar que ningun par de los siguientes espacios son homeomorfos:

(i) Intervalo cerrado $[a, b]$.

(ii) Intervalo abierto (a, b).

(iii) El círculo S^1.

(iv) Una figura del tipo 8: dos círculos tangentes en el plano

(v) Tres circulos tangentes en el plano dos a dos.

(vi) Tres circulos A, B, C en el plano tal que A tangente con B, A tantente con C y A y C disjuntos.

(vii) Tres segmentos en el plano que tienen solamente un punto en común entre ellos y es un extremo de los segmentos (una "hélice").

(16) Utilizar el Teorema de Jordan (*toda curva cerrada simple en S^2 separa la esfera en dos componentes conexas*) para mostrar que S^2 y $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ no son homeomorfos.

(17) Recordemos que un espacio X es simplemente conexo si cualquier $f : S^1 \to X$ continua es *homotópica* a una constante. [13]

a) Probar que la conexión simple es un invariante topológico.

b) Probar que $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

[13] A pesar de ser intuitivo lleva cierto trabajo probar en general que un espacio no es simplemente conexo, por ejemplo en el caso de S^1. Este estudio, que lleva a la noción de grupo fundamental, excede los propósitos de este curso.

4.4.2. Compacidad

(18) Sea (X, τ) un espacio topológico.

- *a*) Probar que la unión finita de compactos es compacto.
- *b*) Mostrar que la intersección de dos conjuntos compactos puede no ser compacta.
- *c*) Probar que si X es Hausdorff, entonces la intersección de compactos es compacta.

(19)
- *a*) Sea $\mathbb{R}_f$ la topología cofinita en los reales. Probar que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}_f$ es compacto.
- *b*) Estudiar la compacidad de $[0,1] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_\ell$, la topología del límite inferior en los reales.

(20) Probar que si $f : X \to Y$ es continua con X compacto e Y Hausdorff, entonces es cerrada.

(21) Sean A, B subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff X. Probar que existen abiertos U, V disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

(22) Probar que si Y es compacto entonces la proyección $p_1 : X \times Y \to X$ es cerrada para todo X.

(23) Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.

- *a*) Probar que si Y es Hausdorff y f es continua entonces el gráfico de $f, G_f = \{(x, f(x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
- *b*) Probar que si Y es compacto Hausdorff y el gráfico G_f de f es cerrado en $X \times Y$ entonces f es continua. Sugerencia, si V es un abierto de $f(x_0)$ entonces $G_f \cap (X \times (Y - V))$ es cerrado.

(24) Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos cerrados y conexos, linealmente ordenada por la inclusión. Probar que $\cap_{A \in \mathcal{A}} A$ es compacto y conexo.

(25) Sea X un espacio topológico que tiene la propiedad de Bolzano Weiestrass, es decir, todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación.

- *a*) Si $f : X \to Y$ es continua, $f(X)$ satisface la propiedad de B-W.?

b) Si A es un subconjunto cerrado de X , satisface A la propiedad de B-W?

c) Si X es un subespacio de un espacio Hausdorff Z, es X cerrado en Z?

(26) Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ donde $\tau = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R}, a \geq 0\} \cup \emptyset \cup \mathbb{R}$.

a) Hallar un compacto que no sea cerrado

b) Hallar un compacto cuya clausura no sea compacta.

c) Probar que $(\mathbb{R}, \tau)$ verifica la propiedad de Bolzano-Weiestrass.

(27) Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$ y $x \in X$. Definimos $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$.

a) Probar que $d(x, A) = 0$ si y solamente si $x \in \overline{A}$.

b) Probar que si A es compacto, entonces $d(x, A) = d(x, a)$ para algún $a \in A$.

c) Se define el ε-entorno de A como $U_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$. Probar que $U_\varepsilon(A) = \cup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

d) Si A es compacto y U es un abierto que contiene a A entonces existe ε tal que $U_\varepsilon(A) \subset U$. Muestre que si A no es compacto, la afirmación puede ser falsa.

(28) Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $f : X \to X$ es una isometría si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Pruebe que si X es compacto y f es una isometría, entonces f es biyectiva y un homeomorfismo.

(29) Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ se dice *contráctil* si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Se dice que f es una contracción si existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

a) Probar que si f es una contracción entonces es contráctil. Probar que toda aplicación contráctil es continua.

b) Probar que si X es compacto y $f : X \to X$ es una contracción, entonces tiene un *punto fijo*, es decir, existe x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.

c) Dar un ejemplo de un espacio X compacto y $f : X \to X$ contráctil que no sea una contracción.

d) Probar que si X es compacto y $f : X \to X$ es contráctil, entonces tiene un punto fijo.

(30) *Compactificación con un punto o de Alexandroff*. Este ejercicio encaja todo espacio topológico en un espacio topológico compacto. Sea (X, τ) un espacio topológico y designemos por ∞ un elemento que no está en X. Consideremos $X^* = X \cup \{\infty\}$. Definimos una base $\mathcal{B}$ de X^* así: los abiertos de X, y los conjuntos formados por ∞ unión complementos de compactos y cerrados de X.

a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de una topología en X^*, que X^* es compacto con esta topología y que $\overline{X} = X^*$.

b) Probar que la inclusión $i : X \hookrightarrow X^*$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

c) Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto[14], entonces X^* es Hausdorff.

(31) Si entre dos espacios topológicos X e Y con Y compacto existe un mapa $f : X \to Y$ que es un homeomorfismo sobre su imagen y tal que $f(X)$ es denso en Y, entonces decimos que Y es una *compactificación* de X. (Por simplicidad, identificamos a X con $f(X)$ en Y). El espacio X^* construido anteriormente se denomina *compactificación por un punto* o *compactificación de Alexandroff* de X. Este problema dice que la compactificación por un punto es esencialmente única:

a) Probar que si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto e Y es una compactificación de X tal que $Y \setminus X$ es sólo un punto, entonces existe un homeomorfismo entre Y y X^* que es la identidad en X.

(32) *a*) Probar que la compactificación con un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo S^n.

b) Dar una descripción de la compactificación con un punto en los siguientes casos:

I El cilindo $S^1 \times (0, 1)$.

[14] En realidad, la compactificación a un punto tiene gracia cuando el espacio es localmente compacto

II La banda $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$.

III Un cuadrado sin los vertices.

Capítulo 5

Espacio Producto y Cociente

En este capítulo vamos a ver como construir espacios topológicos a partir de otros espacios topológicos. Por un lado vamos a estudiar producto arbitrario de espacios topológicos (no solamente productos finitos que ya vimos como darle una topología y hemos estudiado algunas de sus propiedades) y por otro lado vamos estudiar como dar una topología cuando tenemos una relación de equivalencia en un espacio topológico.

5.1. Producto de Espacios topológicos

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia arbitraria de espacios topológicos (no vacíos). Recordemos que

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \; \forall\, \alpha \in I\}$$

y el axioma de elección nos dice que este conjunto es no vacío.

Como definir una topología en el producto? Recordemos el caso del producto finito e intentemos ver como generalizar al caso de producto infinito. Sean $(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)$ una cantidad finita de espacios topológicos y sea $X = X_1 \times ... \times X_n$ el producto. Definimos $p_i : X \to X_i$ (la proyección sobre la i-ésima coordenada) como $p_i((x_1, ..., x_n)) = x_i$. Hemos definido la topología producto en X dando una base $\mathcal{B}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times ... \times A_n : A_i \in \tau_i\}$$

Hemos observado (ver Sección 3.3) que:

- Si X tiene la topología producto, entonces las proyecciones $p_i : X \to X_i$ son funciones continuas.
- La topología producto en X es la menor topología que hace a las proyecciones p_i continuas.

Observemos que utilizando las proyecciones, podemos definir una subbase de la topología producto en X :

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(A_i) : A_i \in \tau_i, i = 1, ..., n\}$$

Observemos que $p_i^{-1}(A_i) = X_1 \times X_2 \times ...A_i \times ...X_n$. Efectivamente $\mathcal{S}$ es una subbase de la topología producto ya que las intersecciones finitas de elementos en $\mathcal{S}$ nos da la base $\mathcal{B}$ de la topología producto. Observemos que tenemos gratis que $\mathcal{S}$ es subbase de la menor topología que hace a las proyecciones continuas.

Podemos entonces generalizar ambas ideas al caso de productos arbitrarios, pero no conducen a la misma topología.

Definición 5.1.1. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \, \alpha \in I\}$ el producto y sea $p_\alpha : X \to X_\alpha$ la proyección sobre la coordenada α definida como $p_\alpha(f) = f(\alpha)$.

- Definimos la **topología box** en X como la topología inducida por la base
$$\mathcal{B}_b = \{\prod_{\alpha \in I} A_\alpha : A_\alpha \in \tau_\alpha\}.$$
- Definimos la **topología producto** en X como la topología inducida por la subbase $\mathcal{S} = \{p_\alpha^{-1}(A_\alpha) : A_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in I\}$ que induce la base
$$\mathcal{B}_p = \{\prod_{\alpha \in I} A_\alpha : A_\alpha \in \tau_\alpha \text{ donde } A_\alpha = X_\alpha \text{ excepto para un numero finito}\}$$

Se ve claramente que la topología box es mas fina que la topología producto. Vamos a preferir la topología producto frente a la topología box pues varios resultados que cabría esperar valen en la topología producto pero no en la box.

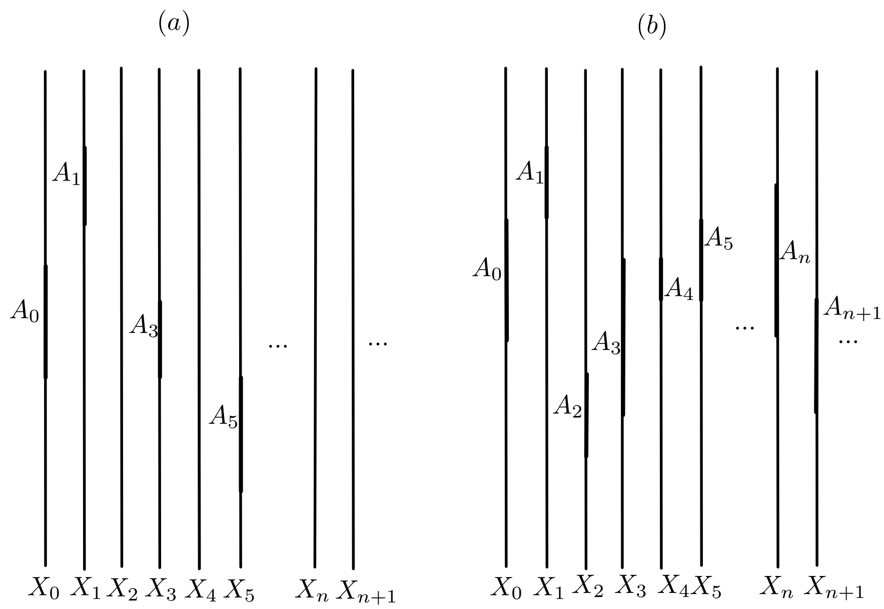


Figura 5.1: (a) Un elemento de la base de la topología producto permite un numero finito de ventanas
(b)Un elemento de la base de la topología box permite un numero arbitrario de ventanas

Por ejemplo, veremos que el producto de espacios compactos es compacto con la topología producto. Veamos con dos ejemplo, la diferencia entre estas topologías.

• Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, es decir, las sucesiones con valores en $\{0,1\}$. Al espacio $\{0,1\}$ le damos la topología discreta. Resulta entonces que:

- Σ con la topología producto es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ como vimos en el Teorema 4.2.5. La métrica $d((a_n),(b_n)) = \sum_{n\geq 0} \frac{|a_n-b_n|}{2^n}$ en Σ induce la topología producto, pues si $d((a_n),(b_n)) < \frac{1}{2^m}$ entonces $a_n = b_n$ para $0 \leq n \leq m$.

- Σ con la topología box tiene la topología discreta.

• $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es metrizable, basta consideremos la distancia $d((a_n),(b_n)) = \sum_n \frac{\text{mín}\{|a_n-b_n|,1\}}{2^n}$. Sin embargo, vimos en la Sección 4.3 que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología box no es metrizable.

El siguiente ejemplo, muestra que la topología box es en cierta forma contraintuitiva. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la sucesiones a valores reales con la topología box. Sea $f : \mathbb{R} \to X$ dada por $f(t) = (t, t, t, ...)$. La función f no es continua! Tomemos el abierto $A = \prod_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ en la topología box que contiene a $f(0)$. Si f fuera continua, existiría $\delta > 0$ tal que $f((-\delta, \delta)) \subset A$ y por lo tanto $(-\delta, \delta) \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ para todo n lo que es absurdo.

El siguiente teorema nos dice que la topología producto es "natural" ya que recuerda un resultado básico de Cálculo: una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde $f = (f_1, ..., f_m)$ es continua si y solamente si las funciones coordenadas $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ son continuas.

Teorema 5.1.1. *Sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con la topología producto, y sea (Z, τ_Z) un espacio topológico y $f : Z \to X$ una función. Entonces f es continua si y solamente si $p_\alpha \circ f : Z \to X_\alpha$ es continua para todo $\alpha \in I$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$: Sea $f : Z \to X$ continua. Luego, como $p_\alpha : X \to X_\alpha$ es continua con la topología producto, entonces $p_\alpha \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas.

$(\Leftarrow)$: Supongamos que $p_\alpha \circ f : Z \to X_\alpha$ es continua para todo $\alpha \in I$, y veamos que f es continua. Basta ver que preimagen por f de elementos de la base $\mathcal{B}_p$ de la topología producto es abierto en Z. Sea $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ donde $A_\alpha = X_\alpha$ excepto para $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Luego $f^{-1}(A) = \cap_{i=1}^{n} (p_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(A_{\alpha_i})$ que es intersección finita de abiertos en Z (puesto que $p_\alpha \circ f$ continua) que es un abierto en Z. $\square$

Aclaración: De ahora en adelante cuando hablamos de producto de espacios topológicos, nos referiremos a la *topología producto*, a menos que se explicite en contrario.

Observación 5.1.1. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con la topología producto. Sean $A_\alpha \subset X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Entonces $\overline{\prod_{\alpha \in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$.

Teorema 5.1.2. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos Hausdorff. Entonces $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha)$ dos puntos distintos en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Entonces existe α_0 tal que $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$. Como X_{α_0} es Hausdorff, existen A_1 y A_2

abiertos disjuntos de X_{α_0} tal que $x_{\alpha_0} \in A_1$ e $y_{\alpha_0} \in A_2$. Pero entonces $p_{\alpha_0}^{-1}(A_1)$ y $p_{\alpha_0}^{-1}(A_2)$ son dos abiertos disjuntos conteniendo a x y a y respectivamente. $\square$

Ahora veremos que el producto de espacios conexos es conexo. Veamos un ejemplo ilustrativo primero: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Es claro que para cada $m > 0$, el subconjunto $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \, \forall \, m > n\}$ con la topología relativa es homeomorfo $\mathbb{R}^m$ y por lo tanto conexo. Pasaremos a identificar $\mathbb{R}^m$ como subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ahora, $S := \cup_{m \geq 1} \mathbb{R}^m$ es por lo tanto un subconjunto conexo (pues todos contienen a $(a_n) : a_n = 0 \ \forall n$). Veamos que es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sea A un elemento de la base de la topología producto, $A = \prod_n A_n$ donde $A_n = \mathbb{R}$ excepto para finitos $n_1, ..., n_k$. Sea $m > \max n_1, ..., n_k$. Resulta entonces que $A \bigcap \mathbb{R}^m$ es no vacío. Tenemos entonces S es un subconjunto conexo y denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y por lo tanto su clausura, que es todo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es conexo.

Teorema 5.1.3. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos conexos. Entonces $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es conexo.*

Demostración. Fijemos un punto $x = (x_\alpha) \in X$. Sea $K \subset I$ un conjunto finito y sea $S_K = \{y = (y_\alpha) \in X : y_\alpha = x_\alpha \ \forall \alpha \notin K\}$. Tenemos que S_K es homeomorfo al producto finito $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ y por lo tanto conexo. Sea $S = \bigcup_{K \subset I \text{ finito}} S_K$. Resulta que S es conexo por ser unión de conexos que contienen a un mismo punto x. Veamos que S es denso en X. Sea B un elemento de la base de la topología producto, $B = \prod A_\alpha$ donde A_α es abierto en X_α y $A_\alpha = X_\alpha$ excepto para un conjunto finito de índices K'. Pero entonces $B \cap S_{K'} \neq \emptyset$ y por lo tanto S es denso en X. Como la clausura de un conexo es conexo deducimos que X es conexo. $\square$

Ahora veremos el teorema mas importante de esta sección: producto de compactos es compacto. Es un teorema debido a Tychonoff y que estableció la importancia de la topología producto, llamada a veces topología de Tychonoff. Este teorema usa de manera crucial el Axioma de Elección y de hecho es equivalente al mismo.

Teorema 5.1.4 (Teorema de Tychonoff)**.** *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos compactos. Entonces $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto.*

Demostración. Para probar que X es compacto podríamos probar que todo cubrimiento admite un subcubrimiento finito o que en toda familia de cerrados con la PIF la intersección de todos los miembros de la familia es no vacío. Usaremos la segundo idea. La idea central es que si se tiene una familia con la PIF, proyectando sobre cada coordenada tengo una familia con la PIF en cada X_α y por lo tanto su intersección es no vacía. Nos gustaría elegir un punto de cada una de estas intersecciones y ver que esta en la intersección de la familia de cerrados en X. El problema es que hay mucha “libertad” para elegir los puntos en cada coordenada y esto podría no dar el punto que queremos. Para ellos, vamos a extender nuestra familia con la PIF a una familia maximal. Esto será suficiente para el elegir el punto que queremos.

Sea entonces $\mathcal{C} = \{C_\beta : \beta \in J\}$ una familia de cerrados con PIF en X. Sea $\mathcal{E}$ la colección de todas las familias $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X tales que:

- $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$
- $\mathcal{F}$ tiene la PIF.

Observar que no hemos pedido que sean familias de cerrados. Ordenamos $\mathcal{E}$ por la inclusión, es decir $\mathcal{F} < \mathcal{F}'$ si todo miembro de $\mathcal{F}$ es miembro de $\mathcal{F}'$. Veamos que $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal, para lo que usaremos el Lema de Zorn (ver Sección **??**). Sea $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in K\}$ una colección de familias de subconjuntos de X totalmente ordenada. Sea $\tilde{\mathcal{F}} = \cup\{B \in \mathcal{F}_\gamma : \gamma \in K\}$ la familia de todos los miembros de $\mathcal{F}_\gamma$ para algún $\gamma \in K$. Afirmamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es cota de la cadena ordenada. Por un lado contiene a $\mathcal{C}$. Por otro lado tiene la PIF: sean $A_1, ..., A_n \in \tilde{\mathcal{F}}$, resulta que existe $\gamma_0 \in K$ tal que $A_i \in \mathcal{F}_{\gamma_0}, i = 1, ..., n$ y por lo tanto $\cap_i A_i \neq \emptyset$. Usando el Lema de Zorn, tenemos que $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal que llamaremos $\mathcal{M}$. Ahora afirmamos que :

- intersección finita de miembros de $\mathcal{M}$ pertenece a $\mathcal{M}$
- Si A intersecta todo miembro de $\mathcal{M}$ entonces pertenece a $\mathcal{M}$.

Probemos esta afirmación. Veamos la primera parte. Sean $M_1, ..., M_\ell \in \mathcal{M}$ y sea $B = \cap_i M_i$. Tenemos que $\mathcal{M} \cup B$ contiene a $\mathcal{C}$ y tiene la PIF, por la maximalidad de $\mathcal{M}$ resulta $B \in \mathcal{M}$. La segunda parte es similar. Tomemos $\mathcal{M} \cup A$, es claro que contiene a $\mathcal{C}$, si vemos que tiene la PIF, entonces por maximalidad tenemos que $A \in \mathcal{M}$. Pero es evidente que tiene la PIF ya que si $M_1, ..., M_k$ están en M tenemos que $\cap_i M_i$ pertenece a $\mathcal{M}$ por la primera parte y entonces $A \cap (\cap_i M_i) \neq \emptyset$ por hipótesis. Hemos probado entonces que $A \in \mathcal{M}$.

Sea ahora $\alpha \in I$ y tenemos que $\mathcal{M}_\alpha = \{\overline{p_\alpha(M)} : M \in \mathcal{M}\}$ es una familia de cerrados con la PIF en X_α y por lo tanto $\cap_{M\in\mathcal{M}}\overline{p_\alpha(M)} \neq \emptyset$. Tomemos x_α en esta intersección y sea $x = (x_\alpha)$. Afirmamos que $x \in \cap_{\beta\in J} C_\beta$. Sea B un elemento cualquiera de la base de la topología producto que contiene a x, $B = \cap_i p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ donde U_i es abierto en X_{α_i} y fijemos $\beta \in J$. Es claro que para cada i se tiene que $p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ interseca cada miembro de $\mathcal{M}$ y por lo tanto pertenece a $\mathcal{M}$ lo que implica entonces que $B \in \mathcal{M}$. Por lo tanto $B \cap C_\beta \neq \emptyset$. Como B es arbitrario y C_β es cerrado, tenemos que $x \in C_\beta$. Hemos probado entonces que $x \in \cap_\beta C_\beta$ y por lo tanto esta intersección es no vacía y concluimos que X es compacto. □

5.2. Espacio Cociente

Vamos a estudiar ahora una herramienta muy poderosa, útil y sencilla de fabricar espacios a partir de otros, mediante una forma muy intuitiva: pegar o identificar partes, conjuntos o puntos.

Comencemos con un espacio topológica (X, τ_X) y supongamos que tenemos una relación $\sim$ de equivalencia. Para cada $x \in X$ denotamos por $[x]$ la clase de equivalencia de x, es decir, $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. Al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $X/_\sim$. La función que a cada punto le asocia su clase de equivalencia $p : X \to X/_\sim$ donde $p(x) = [x]$ se llama *mapa cociente* o también *proyección canónica*. Como dar una topología en el espacio cociente $X/_\sim$? Una forma muy natural de decir que un conjunto de clases es abierto si cuando lo miramos como conjunto de puntos en X es un abierto. Otra forma de decirlo es: si le pusiéramos una topología, nos gustaría que el mapa cociente fuese continua: tomemos la menor topología que hace a la proyección canónica una función continua.

Proposición 5.2.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia, $p : X \to X/_\sim$ la proyección canónica. Entonces*

$$\tau = \{U \subset X/_\sim : p^{-1}(U) \in \tau_X\}$$

es una topología en $X/_\sim$. Con esta topología, el mapa cociente p es continuo.

Demostración. La demostración es directa. □

A la topología τ de esta proposición se le llama *topología cociente* y al espacio $(X/_\sim, \tau)$ se le llama *espacio cociente*. Veamos algunos ejemplos:

• Consideremos el interva $I = [0,1]$ y hacemos la siguiente identificación: $0 \sim 1$ y si $x \in (0,1)$ es $x \sim x$. Obtenemos el circulo S^1.

• Tomemos el cuadrado $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ e identificamos el lado izquierdo con el derecho, es decir $(0,y) \sim (1,y)$ y en otro caso la identificación es trivial. Obtenemos el cilindro $S^1 \times [0,1]$.

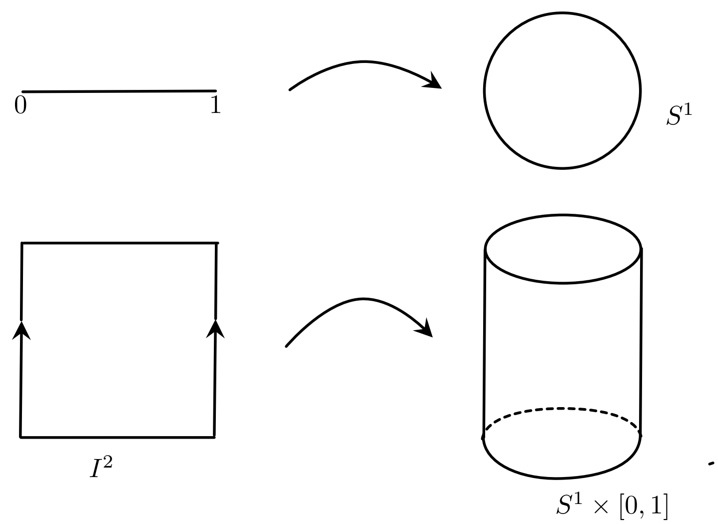


Figura 5.2: El círuclo y el cilindro

• Consideremos el cuadrado $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$ y hagamos la siguiente identificación:

$$(x,y) \sim (x',y') \text{ si } \begin{cases} x = x', y = y' \\ x = 0, x' = 1 \text{ e } y' = 1 - y \end{cases}$$

Es decir, estamos identificando el lado izquierdo del cuadrado ($\{0\} \times [0,1]$) con el lado derecho ($\{1\} \times [0,1]$) pero con las orientaciones cambiadas. El espacio $I^2/_\sim$ se conoce como la *banda de Möbius* (ver Figura 5.3).

• Si en $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ hacemos la identificación $(0,y) \sim (1,y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ y la identificación trivial en otro caso obtenemos el *toro*.

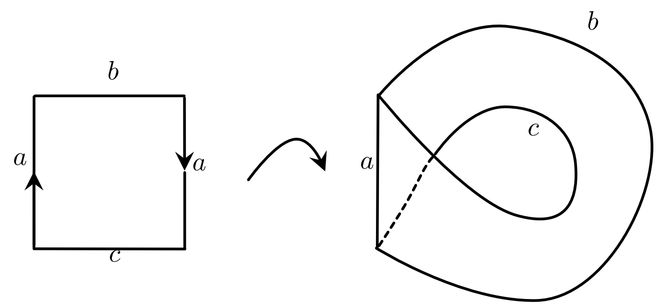


Figura 5.3: La banda de Möbius

• Si en el mismo I^2 del ejemplo anterior modificamos la relación de equivalencia obtenemos la *botella de Klein*:

$$(x,y) \sim (x',y') \text{ si } \begin{cases} x = x', y = y' \\ x = 0, x' = 1 \text{ e } y' = 1 - y \\ y = 0, y' = 1, \text{ y } x = x' \end{cases}$$

es decir, agregamos que el lado superior y el lado inferior del cuadrado se identifiquen (pero sin cambiar la orientación). Ver Figura 5.4

Si en (X, τ_X) tenemos una relación de equivalencia $\sim$ decimos que $B \subset S$ es *saturado* si para todo $x \in B$ se tiene que $[x] \subset B$ es decir, la clase $[x]$ de x esta contenida en B para todo $x \in B$. Sigue fácilmente que B es saturado si $B = p^{-1}(p(B))$. El saturado de un conjunto C es $p^{-1}(p(C))$. Decimos que $\sim$ es abierta (cerrada) si p es abierta (cerrada), o equivalentemente el si el saturado de un abierto (cerrado) es un abierto (cerrado). En muchos casos, p es abierta y cerrada, pero no vale en general que sea abierta y/o cerrada.

Proposición 5.2.2. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia, $X/\sim$ son la topología cociente. Entonces:*

1. *Si X es conexo entonces $X/_\sim$ es conexo.*

2. *Si X es compacto entonces $X/_\sim$ es compacto*

Demostración. Sigue directamente de que $p : X \to X/_\sim$ es continua y sobre. □

Sin embargo no es cierto que si X es Hausdorff, entonces $X/_\sim$ es Hausdorff. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}$ con la topología usual consideramos $\sim$ como $x \sim y$ si

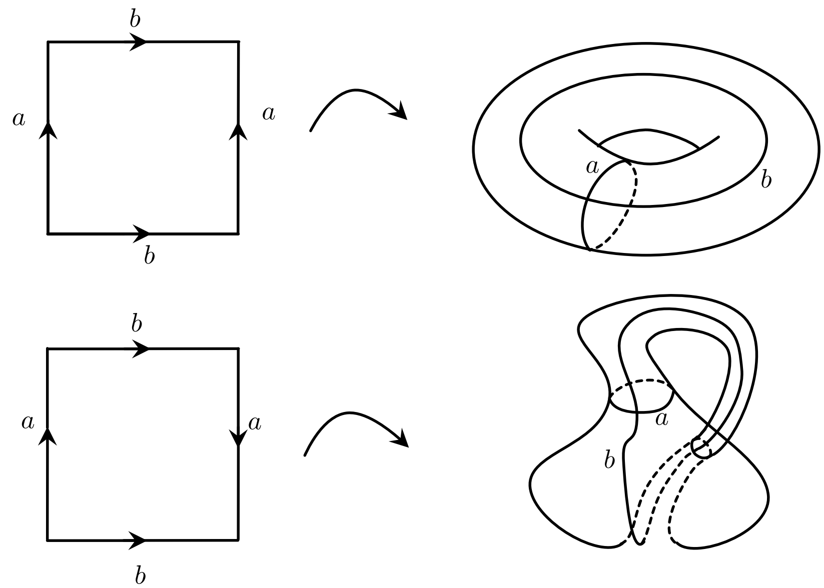


Figura 5.4: El toro y la botella de Klien

$x - y \in \mathbb{Q}$ entonces $X/_\sim$ tiene la topología trivial. Observar que si U es abierto no vacío en $X/_\sim$ entonces $p^{-1}(U)$ es abierto y saturado en $\mathbb{R}$, pero si V es un abierto en $\mathbb{R}$ entonces $[x] \cap V \neq \emptyset$ para cualquier x lo que implica que $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$.

Proposición 5.2.3. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ continua, y una relación de equivalencia en X tal que si $x \sim x'$ entonces $f(x) = f(x')$. Entonces existe $\tilde{f} : X/_\sim \to Y$ continua tal que $\tilde{f} \circ p = f$ donde p es el mapa cociente.*[1]

Demostración. Definamos $\tilde{f} : X/_\sim \to Y$ por $\tilde{f}([x]) = f(x)$. Es claro que $\tilde{f}$ está bien definida, verifica $f = \tilde{f} \circ p$. Además es continua pues si U es abierto en Y entonces $p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ que es abierto en X y por lo tanto $\tilde{f}^{-1}(U)$ es abierto en $X/_\sim$. $\square$

Veamos una forma muy útil de reconocer espacios cociente:

[1] A esta propiedad se le suele llamar *propiedad universal del cociente.*

Proposición 5.2.4. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ continua, abierta y sobreyectiva. Consideremos la relación de equivalencia en X dada por $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$. Entonces el espacio cociente $X/_\sim$ e (Y, τ_Y) son homeomorfos.*

Demostración. Sea $\tilde{f} : X/_\sim \to Y$ por $\tilde{f}([x]) = f(x)$ como en la proposición anterior. Resulta que $\tilde{f}$ es continua y biyectiva. Es inyectiva por construcción y sobreyectiva pues f lo es. Ahora, $\tilde{f}$ también es abierta, ya que si V es abierto en $X/_\sim$ entonces $p^{-1}(V)$ es un abierto en X y como f es abierta resulta que $f(p^{-1}(V)$ es abierto, pero $f(p^{-1}(V)) = \tilde{f}(V)$ probando que $\tilde{f}$ es abierta y por lo tanto $\tilde{f}$ un homeomorfismo. $\square$

Como una función continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es cerrrada (ver Corolario 4.2.3) tenemos que:

Corolario 5.2.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, X compacto, Y Hausdorff y $f : X \to Y$ continua y sobre. Entonces $X/_\sim$ es homeomorfo a Y donde $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$.*

Una forma interesante de construir espacios a través de cocientes es el *pegado*. Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua. Denotamos por $X \cup_f Y$ al espacio cociente que se obtiene en la unión disjunta $X \sqcup Y$ de X e Y (con la topología $\tau_X \sqcup \tau_Y$) y la relación de equivalencia $\sim$ dada por:

- $a \sim f(a)$ si $a \in A$.
- $x \sim x$ si $x \in X - A$.
- $y \sim y$ si $y \in Y - f(A)$.

Al espacio $X \cup_f Y$ obtenido de esta forma se le llama pegado de X e Y a través de f.

Para entender bien el cociente, pegado, etc, es necesario ver varios ejemplos:

• Consideremos el intervalo $X = [0, 1]$ con la topología usual de la recta e identificamos el 0 con el 1, es decir $x \sim y$ si y solamente si $x = y$ si $0 < x < 1$ y $0 \sim 1$. El cociente $X/_\sim$ es (homeomorfo a) S^1. La función $f : [0, 1] \to S^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi i t}$ nos dá la relación de equivalencia. De la misma forma $f : \mathbb{R} \to S^1$ por $f(t) = e^{2\pi i t}$ induce un homeomorfismo $\mathbb{R}/_\sim$ con S^1 donde $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$.

• En el cuadrado $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ donde identificamos el lado izquierdo con el derecho con la misma orientación nos da el cilindro $S^1 \times [0,1]$. La función $f : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ dada por $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, y)$ define la clase de equivalencia.

• En el cuadrado I^2 si identificamos el lado izquierdo y derecho y el lado superior e inferior con la misma orientación obtenemos el toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. La función $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{T}$ dada por $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ nos da la relación de equivalencia. De la misma forma, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$ dada por $f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ induce un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2/\sim$ y $\mathbb{T}$ donde $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^2$.

• La esfera S^2 es la unión de dos discos (cerrados) pegados por el borde. De hecho el hemisferio norte junto con el ecuador es un disco cerrado y el hemisferio sur junto con el ecuador es un disco cerrados. Ambos discos se pegan en el ecuador. La esfera S^2 también se obtiene de un disco cerrado identificando el semicírculo superior del borde del disco con el semicírculo inferior del borde del disco, es decir, si $D^2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y consideramos $\sim$ tal que $(x,y) \sim (x,y)$ si $x^2 + y^2 < 1$ y $(x,y) \sim (x,-y)$ si $x^2 + y^2 = 1$. Y por último la esfera S^2 también se obtiene de identificar en un disco, todo el bordo a un punto, es decir $(x,y) \sim (x,y)$ si $x^2 + y^2 < 1$ y $(x,y) \sim (x',y')$ si $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$.

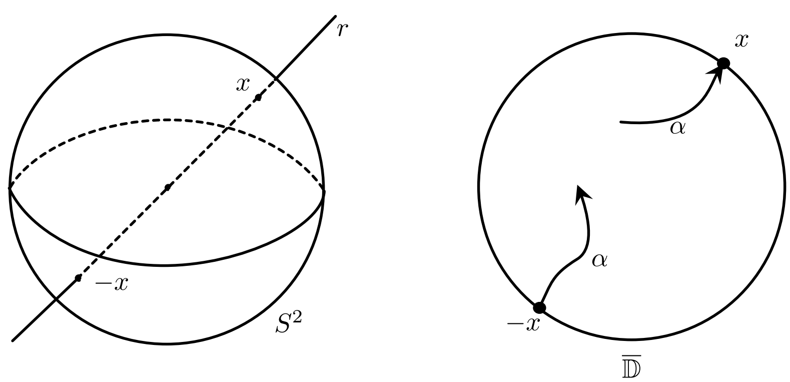


Figura 5.5:

• El espacio o plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es el espacio de las rectas por el origen en $\mathbb{R}^3$. Es decir, consideremos $X = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ con la topología usual y hagamos la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = ty$. El espacio cociente $X/_\sim = \mathbb{R}P2$ es el plano proyectivo. Resulta lo mismo que considerar la esfera S^2 y decir que $x \sim y$ sii $x = -y$, es decir en la esfera S^2 identificamos los puntos antipodales. Resulta también que $\mathbb{R}P^2$ resulta de tomar el hemisferio norte de la esfera S^2 e identificar los puntos antipodales del ecuador, o lo que es lo mismo, tomar el disco unitario cerrado e identificar los puntos antipodales del borde, ver Figura 5.5. La curva α continua sale por x y aparece por $-x$.

• La botella de Klein es la unión de dos bandas de Möbius pegadas por el borde. El espacio proyectivo es la union de una disco con una banda de Möbius pegados por el borde (ver Figura 5.6). Para ver esto, si tomamos un cilindro C alrededor del ecuador e identificamos los puntos antipodales resulta una banda de Möbius! Así, $\mathbb{R}P^2$ es el pegado de un disco (casquete S) con una banda de Möbius a través del borde.

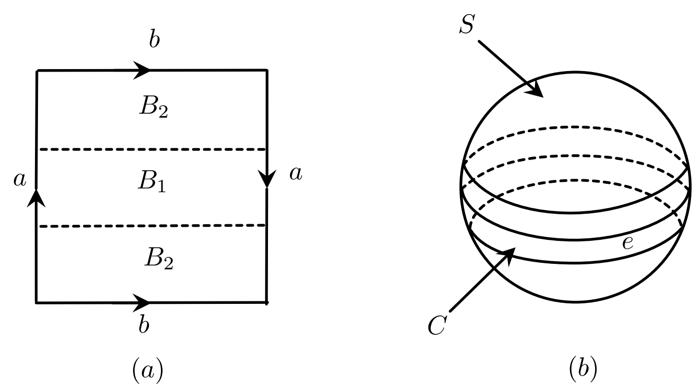


Figura 5.6: (a) La botella de Klein (b) El espacio proyectivo es union de S con la banda de Möbius C.

5.3. Ejercicios

(1) Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donde en $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y en Σ la topología producto. Probar que Σ es (homeomorfo) al conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

(2) Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$

con la topología producto. Sea $A_\alpha \subset X_\alpha$ y sea $A = \prod_\alpha A_\alpha$. Probar que $\overline{A} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$. Vale también con la topología box?

(3) Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto. Sea $\mathbf{x_n}$ una sucesión en X. Probar que $\mathbf{x_n}$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ si y solamente si $\mathbf{x_n}(\alpha) \to \mathbf{x}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Probar que una red $(T_d)_{d\in D}$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ si y solamente si la red $(T_d(\alpha))_{d\in D}$ converge a $\mathbf{x}(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. [2]

(4) Consideremos $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ con la topología producto donde $\mathbb{R}$ tiene la topología usual. Probar que es metrizable. Satisface el primer y/o segundo axioma de numerabilidad? Es separable?

(5) En $\mathbb{R}$ consideremos la distancia $d_S(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1\}$ y en $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ con la *topología uniforme*, es decir con la distancia $d((a_n), (b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_s(a_n, b_n)$. Que relación hay entre esta topología, la topología producto y la topología box? Probar que no es separable (y por lo tanto no tiene base numerable). Cuál es la clausura en esta topología de $A = \{(a_n) : a_n = 0\, \forall n \geq m \text{ para algún } m\}$?

(6) Considemos $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ con la topología box. Probar que

a) No tiene base local numerable

b) No es conexo.

c) Es localmente arcoconexo pero no es arcoconexo.

(7) Sea Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ con la topología producto. Probar que

a) X es localmente compacto si y solamente si X_α es localmente compacto para cada α y X_α es compacto excepto para una cantidad finita de $\alpha' s$.

b) Probar que X tiene base local numerable (satisface primer axioma de numerabilidad) si y solamente si cada X_α tiene base local numerable y todos los X_α, excepto una cantidad *numerable*, tienen la topología trivial.

---

[2] Por este motivo, la topología producto es la topología de la *convergencia puntual*.

c) Probar que X tiene base numerable (satisface segundo axioma de numerabilidad) si y solamente si cada X_α tiene base numerable y todos los X_α, excepto una cantidad *numerable*, tienen la topología trivial.

d) Concluir que $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ con la topología producto, donde $[0,1] \subset \mathbb{R}$ tiene la topología usual, es compacto y no es metrizable.

(8) a) Sea $X = [0,1]$ con la topología usual. Encuentre una relación de equivalencia en X para que el cociente sea finito y tenga al menos un punto aislado. ¿Se podrá hacer un cociente de forma tal de obtener un conjunto finito con la topología discreta?

b) Para el espacio anterior, encuentre una relación de equivalencia para la cual el cociente no sea Hausdorff.

(9) Sea $X = [0,1]$ con la topología usual y se consideran las siguientes relaciones de equivalencia en X:
Defina $(x,y) \in R_1$ si $x = y$ o bien $(x = 0$ e $y = 1)$ o bien $(x = 1$ e $y = 0)$.
Defina $(x,y) \in R_2$ si $x = y$ o si $x = 1 - y$.
En ambos casos, probar que son relaciones de equivalencia, determinar el espacio cociente y hallar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo al cociente. Se pide fórmula explícita para los homeomorfismos correspondientes.

(10) Probar que el cociente de un espacio separable es separable. Es cierto que el cociente de un espacio con base numerable tiene base numerable?

(11) Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia y $X_{/\sim}$ es espacio cociente y $p : X \to X_{/\sim}$ el mapa cociente. Probar que A es cerrado en $X_{/\sim}$ entonces $p^{-1}(A)$ es cerrado. Probar que si $X_{/\sim}$ es Hausdorff, entonces las fibras $p^{-1}(y)$ son cerradas.

(12) Consideremos $\mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$ y la relación de equivalencia $u \sim v$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$. El espacio cociente es la linea proyectiva $\mathbb{R}P^1$. Probar que si en S^1 identificamos puntos antipodales, obtenemos $\mathbb{R}P1$. Probar que $\mathbb{R}P1$ es homeomorfo a S^1.

(13) En $\mathbb{R}$ definimos la relación de equivalencia $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Probar que el cociente tiene la topología trivial.

(14) En $\mathbb{R}^2$ consideremos $(x,y) \sim (x',y')$ sii $x - x' \in \mathbb{Z}$. Identificar el cociente.

(15) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la relación $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Z}^2$.

a) Probar que $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $S^1 \times S^1$. A este espacio se lo conoce como toro bidimensional y se lo denota $\mathbb{T}^2$.

b) Consideramos rectas en $\mathbb{R}^2$ dadas por $r_\theta = \{(x,y) \ / \ y = \theta x\}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ tal que $\pi(x,y) = [(x,y)]$. Probar que si θ es racional, entonces $\pi(r_\theta)$ es una curva cerrada en $\mathbb{T}^2$ (es decir, existe $\alpha : [0,1] \to \mathbb{T}^2$ continua con topología usual en $[0,1]$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$), y que si θ es irracional entonces $\pi(r_\theta)$ es un conjunto denso en $\mathbb{T}^2$.

(16) Sea S^2 la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ y $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría con respecto al plano $z = 0$. Definimos la relación en S^2: $x \sim y$ sii ($x = s(y)$ o $x = y$). Pruebe que $\sim$ es de equivalencia y caracterice el espacio $S^2/\sim$.

(17) En $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ se consideran las siguientes relaciones de equivalencia. Identificar los espacios cociente.

a) $(0,y) \sim (1,y)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.

b) $(0,y) \sim (1,1-y)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.

c) $(0,y) \sim (1,y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.

d) $(0,y) \sim (1,1-y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ y $(x,y) \sim (x,y)$ en otro caso.

(18) Probar que al pegar de un disco con una banda de Möbius por el borde se obtiene el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

(19) Probar que al pegar dos bandas de Möbius por el borde se obtiene la botella de Klein.

(20) Consideremos el toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ y el toro sólido $T = S^1 \times D$ donde $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1.\}$. Consideremos $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por $f(x,y) = (y,x)$. Que se obtiene al pegar dos copias de T al identificar los bordes mediante f, es decir $X = T \cup_f T$?

Capítulo 6

Metrización

En este capítulo comenzaremos a estudiar propiedades mas finas de espacios topológicos. Uno de los objetivos es mostrar un teorema de metrización que, por ejemplo, dice que todo espacio compacto, Hausdorff y con base numerable es metrizable. Para ello será clave un teorema fundamental (Lema de Uryshon) que nos da condiciones para "separar" conjuntos cerrados vía funciones continuas.

6.1. Axiomas de separación

Ya hemos mencionado un importante "axioma de separación"[1]: (X, τ_X) es Hausdorff si dados dos puntos x, y existen abiertos U_x, U_y disjuntos tales que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. A un espacio Hausdorff también se le llama $T2$. Veamos otras nociones de separación:

Definición 6.1.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico.

1. Decimos que X es $T0$ si dados dos puntos existe un abierto que contiene a uno y no a otro, es decir dados $x \neq y$ dos puntos de X existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$ o existe un abierto U_y tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$.

2. Decimos que X es $T1$[2] si dados $x \neq y$ existen abiertos de cada uno y no

[1]Los axiomas de separación que vamos a ver se refieren a separar conjuntos por abiertos disjuntos. No confundir con conexión.

[2]La "T" en estos nombres proviene del alemán *Trennungsaxiom* que significa "axioma de separación". Estos nombres o notación han caído en desuso -salvo tal vez $T1$ o $T0$-. Nosotros hablaremos de espacios *Hausdorff, Regular, Normal,...*

contiene al otro, es decir, existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$ y también existe un un abierto U_y tales que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$.

3. Decimos que X es *regular* (o $T3$) si es $T1$ y dado $x \in X$ y un cerrado A con $x \notin A$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $A \subset V$.

4. Decimos que X es *normal* (o $T4$) si es $T1$[3] y dados dos conjuntos cerrados A, B disjuntos existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

La primera observación es que un espacio es $T1$ si y solamente si los puntos son cerrados. Muchas veces se omite el término $T1$ y se dice "sea un espacio topológico donde los puntos son cerrados" o donde los "conjuntos finitos son cerrados".

Lema 6.1.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces es $T1$ si y solamente si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.*

Demostración. ejercicio □

Las nociones que hemos visto se han dado en orden de "jerarquía" cuya demostración es inmediata:

Proposición 6.1.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces:*

$$\textit{Normal} \Rightarrow \textit{Regular} \Rightarrow \textit{Hausdorff} \Rightarrow T1 \Rightarrow T0.$$

Demostración. ejercicio □

Veamos ejemplos donde no se cumplen los recíprocos:

- El espacio $X = \{a, b\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ es T_0 pero no $T1$.
- El espacio $\mathbb{R}_f$ ($\mathbb{R}$ con la topología cofinita) es $T1$ pero no Hausdorff.

Los espacios que *no* son Hausdorff no revisten mayor interés para nosotros. Hemos mencionado los espacios $T0$ y $T1$ solo a título informativo y razones históricas. Nos interesa aquí la relación entre Hausdorff, regular y normal.

Antes de ver otros ejemplos veamos algunas propiedades que caracterizan los espacios regulares y normales que son útiles.

Proposición 6.1.2. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico donde los puntos son cerrados. Entonces*

[3] Tanto para definir regular como normal pedimos $T1$ para evitar ciertos contraejemplos triviales.

1. *X es regular si y solamente si dado $x \in X$ y U abierto con $x \in U$ existe V abierto tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$, es decir, todo punto tiene un base de entornos cerrados.*

2. *X es normal si y solamente si dado un cerrado A y abierto U con $A \subset U$ existe un abierto V tal que $A \subset V$ y $\overline{V} \subset U$.*

Demostración. Veamos la demostración de la primera parte. La segunda parte es completamente análoga. Supongamos que X es regular y U es una abierto que contiene a x. Luego x y U^c son conjuntos cerrados disjuntos. Luego existen V, B abiertos disjuntos tales que $x \in V$ y $U^c \subset B$. Pero entonces $\overline{V} \subset B^c \subset U$. Recíprocamente, sea $x \in X$ y A un conjunto cerrado tal que $x \notin A$. Sea $U = A^c$. Entonces existe V abierto, tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset A^c$. Luego V y $\overline{V}^c$ son abiertos disjuntos conteniendo a x y a A respectivamente. $\square$

• Veamos un ejemplo que es Hausdorff pero no regular. Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología cuya base base esta formada por $x \in \mathbb{R}$ unión $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ donde $x \in (a, b)$. Es claro que $\mathbb{R}$ con esta topología es Hausdorff. Pero no es regular, ya que la clausura del conjunto $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ es el conjunto $[a, b]$.

• Un ejemplo de espacio regular que no es normal. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ el semiplano (cerrado) superior en donde colocaremos la siguiente topología dada por la siguiente base $\mathcal{B}$: formada por los interiores de círculos que no tocan al eje real y x en el eje real unión el interior de un circulo en el semiplano superior que es tangente al eje real en x. Observemos que esta topología fuera del eje real es la misma que la usual. Veamos que es regular y sea $x \in X$ y un abierto B que lo contenga, que podemos suponer de la base. Si x no está en el eje real, entonces tomando un disco mas pequeño, su clausura va a estar contenida en B. Si x está en la recta real, si tomamos un elemento de la base B' que contiene a x pero cuyo circulo tiene radio mas chico que el de B resulta que la clausura (que consiste del disco cerrado) $\overline{B'} \subset B$ y concluimos que X es regular. Ver que no es normal es mas delicado. Primero observemos que cualquier subconjunto de la recta real $\mathbb{R}$ es cerrado con esta topología. Supongamos por absurdo que X fuese normal. La idea es asociar a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}^2$ y de forma inyectiva, esto sería un absurdo pues la cardinalidad de las partes de $\mathbb{R}$ es mayor que la cardinalidad de las partes de $\mathbb{Q}^2$ que tiene la cardinalidad de las partes de $\mathbb{N}$. Siguiendo con la demostración y suponiendo que es normal, para cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ existirían abiertos disjuntos U_A, V_A de X tales que $A \subset U_A$ y $\mathbb{R} - A \subset V_A$. Consideremos $Q_A = U_A \cap \mathbb{Q}^2$. Veamos que si $B \subset \mathbb{R}$ y $B \neq A$ entonces $Q_B \neq Q_A$. Si $B \neq A$ entonces existe $b \in B$ talque $b \notin A$ o viceversa, la demostración es igual en ambos casos. Si $b \notin A$, entonces $b \in \mathbb{R} - A$, y luego existiría un elemento de la base conteniendo a b y contenido a su vez en U_B y en V_A. Pero entonces $Q_A \neq Q_B$. Como las partes de $\mathbb{R}$ tiene mayor cardinalidad de las partes de $\mathbb{Q}^2$ llegamos a un absurdo.

Ya hemos visto que los espacios Hausdorff se comportan bien respecto al producto (Teorema 5.1.2) y es una propiedad también hereditaria. Los mismo sucede para los regulares pero no para los normales (ver ejercicios).

Proposición 6.1.3. *Se cumple que:*

1. *Un subespacio de un espacio regular es regular*
2. *Producto de espacios regulares es regular.*

Demostración. La primera parte es inmediata y se deja como ejercicio. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos regulares. Veamos que $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es regular. Como cada uno es Hausdorff, el producto es Hausdorff y por lo tanto los puntos son cerrados. Sea ahora $x = (x_\alpha) \in X$ y sea U abierto que contiene a x. Tomemos un elemento de la base de la topología producto $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ donde A_α es abierto y $A_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Para cada i sea V_{α_i} abierto tal que $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$ y $\overline{V_{\alpha_i}} \subset A_{\alpha_i}$. Si $\alpha \in I - \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ tomemos $V_\alpha = X_\alpha$. Luego $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un abierto que contiene a x y $\overline{V} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subset U$. Esto muestra, vía la Proposición 6.1.2, que X es regular. $\square$

La "mayoría" de los espacios a que nos enfrentamos regularmente son normales, de hecho el siguiente teorema nos da condiciones bastante naturales para que un espacio sea normal. Hagamos antes una definición más: un espacio (X, τ_X) se llama *Lindelöf* si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento numerable.

Teorema 6.1.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces X es normal si se cumple alguna de la siguientes afirmaciones:*

1. *X es compacto y Hausdorff*
2. *X es regular con base numerable*

3. *X es regular y Lindelöf.*

4. *X es un espacio métrico.*

Demostración. Supongamos primeramente que X es compacto y Hausdorff. Para ver que es normal, veamos primeramente que es regular. Sea x un punto y B un conjunto cerrado, $x \notin B$. La demostración es muy similar a la del Lema 4.2.3. Para cada $b \in B$ existen U_b entorno de x y V_b entorno de b tal que $U_b \cap V_b = \emptyset$. La familia $\{V_b : b \in B$ cubre B y por ser compacto tenemos un cubrimiento finito $V_{b_1}, ..., V_{b_n}$. Pero entonces $V = \cup_i V_{b_i}$ y $U = \cap_i U_{b_i}$ son abiertos disjuntos conteniendo B y x respectivamente y X es regular. Veamos ahora que es normal. Es esencialmente el mismo argumento. Sean A y B dos cerrados disjuntos de X, que por ser cerrados son compactos. Para cada $a \in A$ existen U_a abierto que contiene a a y V_a abierto que contiene a B por ser regular. Ahora, la familia $\{U_a : a \in A\}$ cubre A y por lo tanto tenemos un cubrimiento finito $U_{a_1}, ..., U_{a_m}$. Pero entonces $U = \cup_i U_{a_i}$ y $V = \cap_i V_{a_i}$ son abiertos disjuntos conteniendo A y B respectivamente, probando que X es normal.

Ahora supongamos que X es regular y tiene base numerable $\mathcal{B}$. Sean A y B dos cerrados disjuntos de X. Por ser regular, podemos encontrar un cubrimiento de A por elementos de la base cuya clausura es disjunto de B y recíprocamente. Para ver esto, para cada $a \in A$ existe un elemento de base que contiene a A y es disjunto de (un abierto que contiene a) B. La unión de todos es un cubrimiento de A que es disjunto de B. Sean entonces $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ cubrimientos de A y B respectivamente con U_n disjunto de B para todo n y V_n disjunto de A para todo n (estos cubrimientos son numerables porque X tiene base numerable). Ahora hagamos el siguiente truco y definamos:

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{y} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Sea $U = \cup_n U'_n$ y $V = \cup_n V'_n$. Veamos que son abiertos disjuntos conteniendo A y B respectivamente. Es claro que $A \subset U$ pues todo punto de A pertenece a algún U_n pero a ninguno de los V_m y por lo tanto está en U'_n. De forma análoga $B \subset V$. Ahora $U \cap V = \emptyset$ pues de lo contrario existirían n, m tal que $U'_n \cap V'_m \neq \emptyset$, y digamos que $m \leq n$. Como $V'_i \subset V_i$ para todo i tendríamos que $U'_n \cap V_m \neq \emptyset$ pero esto es absurdo por construcción.

Observar que la misma prueba que acabamos de ver para espacios regulares con base numerable prueba que un espacio regular y Lindelöf es normal, puesto que lo único que se ha utilizado de la base numerable es para obtener un subcubrimiento numerable. Es decir, para cada $a \in A$ existe U_a abierto que contiene a a y tal que $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ y extraemos del cubrimiento $\{U_a : a \in A\}$ un subcubrimiento numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. De la misma forma, encontramos un cubrimiento numerable $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de B tal que $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ para todo n. Haciendo el mismo truco que antes, definiendo $U'_n = U_n - \cup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ y $V'_n = V_n - \cup j = 1^n \overline{U_j}$ encontramos dos abiertos U, V disjuntos que contienen a A y B respectivamente

Veamos finalmente que si X es métrico entonces es normal. Sean A, B cerrados disjuntos en X. Tomemos $a \in A$, entonces existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \cap B = \emptyset$ pues B es cerrado y $a \notin B$. [4] De la misma forma, para cada $b \in B$ existe $r_b > 0$ tal que $B(b, r_b) \cap A = \emptyset$. Sean $U = \cup_{a \in A} B(a, r_a/2)$ y $V = \cup_{b \in B} B(b, r_b/2)$. Es claro que U, V son abiertos que contienen a A y B respectivamente. Veamos que son disjuntos. Si no lo fueran, existirían a, b tales que $B(a, r_a/2) \cap B(b, r_b/2) \neq \emptyset$. Si $r_b \leq r_a$ concluimos que $b \in B(a, r_a)$ lo cual es absurdo por construcción, y si $r_a \leq r_b$ concluimos que $a \in B(b, r_b)$, absurdo también. Hemos probado que X es normal.

□

6.2. Lema de Urysohn

En esta sección demostraremos un profundo resultado sobre separación de conjuntos cerrados por funciones continuas conocido como Lema de Urysohn[5].

[4] Es decir, $d(a, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : b \in B\} > 0$, aunque este ínfimo pueda no ser mínimo. Observar también que $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ puede ser cero como en el caso de $A = \{xy = 0\}$ y $B = \{xy = 1\}$ en $\mathbb{R}^2$.

[5] Pavel Urysohn (1898-1924), matemático ruso. Ingresó a la Universidad de Moscú en 1915 para estudiar física, donde publica su primer trabajo ese mismo año. Se graduó en 1919 y continuó sus estudios doctorales pero ya con interés en la matemática. Se doctoró en 1921 con un trabajo sobre ecuaciones integrales. Después, bajo la influencia de Egorov se inclinó por la topología donde hizo importantes contribuciones, sobre todo en lo que concierne al concepto de dimensión y el problema de metrización (de hecho, probó la existencia de un espacio métrico *universal*). Se hizo colaborador y muy amigo de P. Alexandroff, otro matemático-topólogo famoso. En 1924 hacen un viaje juntos por Alemania, Holanda y Francia, donde visitan a Hilbert, Hausdorff y Brouwer entre otros. En su visita a Hausdorff en Bonn, Alexandroff y Urysohn nadaban a través del Rhin, cosa que disgustaba a Hausdorff por el peligro que corrían. Al final del viaje, se van a Bretaña en la costa francesa de vacaciones y a trabajar donde alquilan una cabaña. En un de sus salidas a nadar en mar abierto, Urysohn muere

Este resultado será fundamental para tratar el teorema de metrización que veremos mas adelante.

Teorema 6.2.1 (Lema de Urysohn)**.** *Sea (X, τ_X) un espacio topológico normal y sean A, B dos conjuntos cerrados disjuntos. Entonces existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.*

Demostración. La idea es la siguiente. Como A, B son cerrados disjuntos existen abiertos U, V disjuntos que los contienen. La idea es entonces definir una función f que valga $1/2$ en el complemento de $U \cup V$, que en U valga $\leq 1/2$ y que en V valga $\geq 1/2$. Luego, usar el mismo procedimiento con A y U^c y también con V^c y B e intentar definir f de forma que valga $1/4$ entre "medio" de A y U^c y $3/4$ entre medio de V^c y B, y así sucesivamente. De todas maneras, esto podría llevar a la idea equivocada de que f es sobre, cosa que no tendría por qué serlo. De hecho, si X no es conexo y A, B es una separación del espacio, entonces la función que buscamos es simplemente $f_{/A} = 0$ y $f_{/B} = 1$. Por este motivo, cambiaremos la idea de la siguiente forma: para cada racional[6] $p \in [0, 1]$ elegiremos un abierto U_p de forma que si $p < q$ entonces $\overline{U_p} \subset U_q$ (ver Figura 6.1). A partir de eso construiremos la función f en x como el ínfimo de los p tal que $x \in U_p$.

Tomemos entonces $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, que es un conjunto numerable, y lo numeramos $\{p_n\}$ de modo que $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$. Construiremos los abiertos U_p de forma inductiva. Comencemos con $U_0 = U_{p_0}$. Como X es normal y A, B son cerrados disjuntos, existe un abierto U_0 tal que $A \subset U_0$ y $\overline{U_0} \cap B = \emptyset$. Luego, existe un abierto $U_1 = U_{p_1}$ disjunto de B tal que $\overline{U_{p_0}} \subset U_{p_1}$.

Supongamos ahora que para $p_1, ..., p_n$ tenemos definidos los abiertos U_{p_n} tal que si $p_i < p_j$ entonces $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_j}$. Veamos como construir $U_{p_{n+1}}$. Como $p_0 = 0$ es el mínimo de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $p_1 = 1$ es el máximo de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tenemos que existen p_i, p_j con $i, j \in \{0, ..., n\}$ tal que $p_i < p_{n+1} < p_j$ y ningún otro p_t está entre p_i y p_j para $t = 0, ..., n$. Luego sabemos que $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_j}$ y por lo tanto $\overline{U_{p_i}} \cap U_{p_j}^c = \emptyset$ que son dos cerrados disjuntos. Luego existe un abierto $U_{p_{n+1}}$ tal que $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_{n+1}}$ y $\overline{U_{p_{n+1}}} \subset U_{p_j}$.

Así inductivamente, tenemos construido para cada $p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ un abierto U_p tal que si $p < q$ tenemos que $\overline{U_p} \subset U_q$. Definimos $f : X \to [0, 1]$ de la

ahogado, a la edad de 26 años y a solo tres de haber comenzado a investigar en topología.

[6] o diádico si lo prefiere para seguir mas de cerca la idea expresada mas arriba

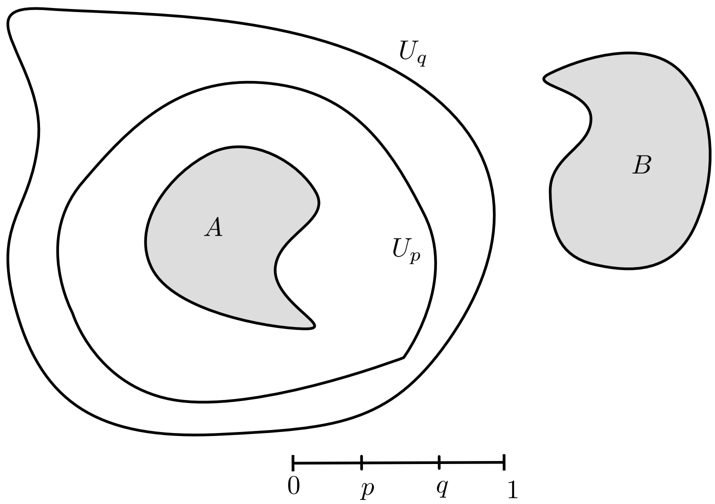


Figura 6.1:

siguiente forma:

$$f(x) = 1 \text{ si } x \notin U_1 \quad \text{y} \quad f(x) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : x \in U_p\} \text{ en otro caso.}$$

Es claro que $f(x) = 1$ si $x \in B$ y que $f(x) = 0$ si $x \in A$. Falta ver que f es continua. Observemos primero que $f(U_p) \subset [0,p]$ y que $f(U_p^c) \subset [p,1]$. Sea $x \in X$ y consideremos un abierto V de $[0,1]$ que contiene a $f(x)$ y que podemos suponer que V es de la forma $[0,c),(c,d)$ o $(d,1]$. En el primer caso, tomamos p tal que $f(x) < p < c$. Luego U_p es una abierto que contiene a x y como $f(U_p) \leq p$ se tiene que $f(U_p) \subset [0,c)$. En el segundo caso, tomamos p,q tales que $c < p < f(x) < q < d$. Luego, $U = \overline{U_p}^c \cap U_q$ es un abierto que contiene a x y $f(U) \subset (c,d)$. Finalmente, el último caso tomemos $d < p < f(x)$. Tomemos $U = \overline{U_p}^c$. Resulta que U es un abierto que contiene a x y $f(U) \subset (d,1]$. En cualquier caso hemos probado que existe un abierto U tal que $f(U) \subset V$ y esto prueba la continuidad de f. $\square$

Decimos que dos conjuntos A,B disjuntos de un espacio topológico (X,τ_X) son separados por una función continua $f : X \to [0,1]$ si $f_{/A} = 0$ y $f_{/B} = 1$.

El Lema de Urysohn no dice que si X es normal y A, B son cerrados disjuntos entonces se pueden separar por una función continua. Una pregunta surge naturalmente, si A, B son cerrados disjuntos de un espacio normal, existe un función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$ y $B = f^{-1}(1)$? La demostración del Lema de Urysohn *no* da esa propiedad. En general no es cierto, pero bajo ciertas condiciones (ver ejercicios) sí es cierto.

6.3. Un teorema de metrización

En esta sección veremos un teorema de metrización debido a Urysohn. La idea es probar que bajo ciertas condiciones, podemos probar que un espacio topológico es homeomorfo a un subconjunto de un espacio métrico y por lo tanto es metrizable, es decir, podemos encontrar un métrica en el espacio que induce la misma topología.

Teorema 6.3.1. *Sea (X, τ_X) un espacio regular y con base numerable. Entonces X es metrizable*

Demostración. Vamos a probar que X es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, que ya vimos que es métrico con la métrica:

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n\geq 0} \frac{\min\{|a_n - b_n|, 1\}}{2^n}$$

Observemos que si para algún n tenemos $a_n = 1$ y $b_n = 0$ entonces

$$d((a_n), (b_n)) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Ahora, como X es regular y tiene base numerable, entonces X es normal (y con base numerable). Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base numerable. Para cada par n, m tal que $\overline{B_n} \subset B_m$ tenemos una función continua $g_{n,m} : X \to [0, 1]$ tal que $g(\overline{B_n}) = 0$ y $g(B_m^c) = 1$ por el Lema de Urysohn. Dados $x, y \in X$ distintos siempre existe n, m tales que $x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m$, e $y \notin B_m$.Como el conjunto de los pares $\{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es numerable, reindexando las funciones $g_{n,m}$ tenemos una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to [0, 1]$ tales que dados puntos $x \neq y$ existe n tal que $f_n(x) = 0$ y $f_n(y) = 1$. Definamos pues

$$F : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{por} \quad F(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...)$$

es decir $F(x) = (f_n(x))$. Por lo que acabamos de ver F es inyectiva. Como cada f_n es continua, tenemos que F es continua pues la topología en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es la topología producto (recordar Teorema 5.1.1). Veremos que X es homeomorfo a $F(X)$ con la topología relativa. Como $F : X \to F(X)$ es biyectiva, basta mostrar que F es abierta. Sea U abierto en X, queremos ver que $F(U)$ es abierto en $F(X)$ con la topología relativa, o lo que es equivalente, que cada $F(x)$ es interior a $F(U)$ para cada $x \in U$. Ahora, podemos encontrar un par k, m tal que $x \in B_k \subset \overline{B_k} \subset B_m \subset U$ y por lo tanto una función f_n tal que $f_n \equiv 0$ en un abierto que contiene x y vale 1 en el complemento de U. Pero entonces $B(F(x), \frac{1}{2^n}) \cap F(X) \subset F(U)$ pues si $F(y) \in B(F(x), \frac{1}{2^n})$ entonces $f_n(y) < 1$ y por lo tanto $y \in U$. Por lo tanto $F(y) \in F(U)$ y entonces $F(x)$ es interior a $F(U)$.

□

6.4. El Teorema de Tietze

En esta sección vamos a ver un famoso teorema que tiene variadas aplicaciones en la matemática, conocido como el Teorema de Extensión de Tietze[7]. Este teorema dice que una función definida en un conjunto cerrado de un espacio normal a valores en un intervalo cerrado se puede extender de forma continua a todo el espacio. Precisamos primeramente un lema sobre convergencia de serie de funciones.

Lema 6.4.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que existe $M > 0$ tal que $\sum_{n \geq 0} M^n < \infty$ y $|f_n(x)| \leq M^n$ para todo n y para todo x. Entonces la función $F : X \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ es continua.*

Demostración. Se tiene que para cada $x \in X$ la serie $\sum_n f_n(x)$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente. Luego está bien definida la función $F : X \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \sum_n f_n(x)$. Veamos que F es continua. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $m > 0$ tal que $2 \sum_{n \geq m} M^n < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otra parte, para cada $j = 0, 1, ..., m$ como f_j es continua existe un abierto U_j conteniendo a x tal que

[7]Henrich Tietze (1880-1964), matemático austríaco. El teorema que vamos a ver fue probado primeramente por Brouwer y Lebesgue para el caso de espacios vectoriales finito dimensionales y fue extendido por Tiezte a un espacio métrico arbitrario. La extensión a espacios normales se debe a Urysohn.

$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2m}$ si $y \in U_j$. Tomemos $U = \cap_{j=0}^m U_j$. Para probar que F es continua basta ver que $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ si $y \in U$. Ahora

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\leq \sum_{n\geq 0} |f_n(y) - f_n(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(y) - f_j(x)| + \sum_{n\geq m} |f_n(y) - f_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.4.1 (Teorema de Extensión de Tietze)**.** *Sea* (X, τ_X) *un espacio topológico normal y sea* $A \subset X$ *un conjunto cerrado y* $f : A \to [a, b]$ *una función continua. Entonces existe una función continua* $\tilde{f} : X \to [a, b]$ *tal que* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *para todo* $x \in A$.

Demostración. La idea es construir un sucesión de funciones definidas en todo X que converjan a f en A. Para ver el paso de inducción, supongamos que tenemos un función $g : A \to [-r, r]$, y veamos que hay una función $g_0 : X \to [-r, r]$ tal que

- $|g(x)| \leq \frac{r}{3}$ para todo $x \in X$.
- $|g(a) - g_0(a)| \leq \frac{2r}{3}$ para todo $a \in A$. En particular $(g - g_0)(A) \subset [-\frac{2r}{3}, \frac{2r}{3}]$.

Para construir tal función g_0 haremos uso del Lema de Urysohn (Teorema 6.2.1). Consideremos $I_1 = [-r, -\frac{r}{3}]$ e $I_2 = [\frac{r}{3}, r]$. Sean $B = g^{-1}(I_1)$ y $C = g^{-1}(I_2)$. Tenemos que B y C son conjuntos cerrados de A (y por lo tanto de X) y disjuntos. Por el Lema de Urysohn, existe $g_0 : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ tal que $g_0(B) = -\frac{r}{3}$ y $g_0(C) = \frac{r}{3}$. Luego tenemos que $|g(x)| \leq \frac{r}{3}$ para todo $x \in X$. Ahora, si $a \in B$ entonces $|g(a) - g_0(a)| \leq \frac{2r}{3}$, lo mismo si $a \in C$. Y si $a \in A$ pero no está ni en B ni en C entonces también sigue que $|g(a) - g_0(a)| \leq \frac{2r}{3}$. Ver Figura 6.2.

Para demostrar el teorema, supongamos sin perdida de generalidad que $[a, b] = [-1, 1]$. Luego, tomando $r = 1$ existe $f_1 : X \to [-1, 1]$ tal que

- $|f_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ para todo $x \in X$.
- $|f(a) - f_1(a)| \leq \frac{2}{3}$ para todo $a \in A$.

Aplicando lo mismo ahora a la función $f - f_1 : A \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Pero entonces, tomando $r = \frac{2}{3}$, existe $f_2 : X \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ tal que

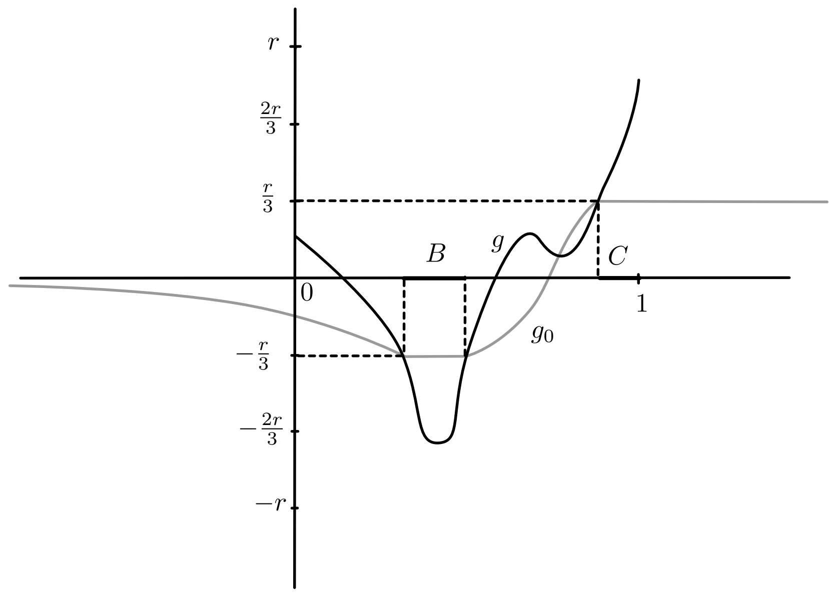


Figura 6.2: Función auxiliar del paso de inducción con $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$

- $|f_2(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$
- $|f(a) - f_1(a) - f_2(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Inductivamente, para $r = (\frac{2}{3})^n$ construimos $f_{n+1} : X \to [-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n]$ tal que

- $|f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ para todo $x \in X$.
- $|f(a) - \sum_{j=1}^{n+1} f_j(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ para todo $a \in A$.

Sea entonces $\tilde{f}(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Resulta que $\tilde{f}$ es continua, $|\tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1$ y además, si $a \in A$ entonces $f(a) = \tilde{f}(a)$.

$\square$

El teorema de extensión de Tietze vale si sustituimos el intervalo $[-1, 1]$ por $\mathbb{R}$ (ver ejercicios). Por otra parte, también vale si el espacio de llegada es por ejemplo el cubo n-dimensional I^n. Es decir si A es un cerrado de un espacio normal y $f : A \to I^n$ es continua entonces, existe $\tilde{f} : X \to I^n$ continua que extiende a f, basta extender *cada coordenada*. Pero no siempre es posible extender una función definida en un cerrado de un espacio normal, depende de la topología del espacio de llegada. Por ejemplo consideremos $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y consideremos el espacio de llegada S^1. Ahora, S^1 es un cerrado de D^2. Consideremos $f : S^1 \to S^1$ que sea una rotación no trivial. Esta función no se puede extender a una función $F : D^2 \to S^1$ que extienda a f, pues tendríamos una función $F : D^2 \to D^2$ continua y, por un famoso teorema debido a Brouwer (ver Teorema 9.1.1 en Capítulo 9.1), F tendría un punto fijo, pero este punto debería estar en S^1 ya que la imagen de F está contenida en S^1, pero F no tiene puntos fijos en S^1!

6.5. Encaje de variedades

Utilizaremos lo anterior para mostrar que toda variedad compacta de dimensión m se puede encajar homeomorficamente en un espacio euclídeo.

Definición 6.5.1. Un espacio topológico (X, τ_X) es una *variedad de dimensión* m si es Hausdorff, tiene base numerable y cada $x \in X$ tiene un entorno que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Una variedad unidimensional es un curva y una variedad de dimensión es una superficie. La esfera, el toro, la botella de Klein y el plano proyectivo son ejemplos de superficies. La esfera y el toro se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, la botella de Klein y el plano proyectivo no se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. De todas maneras veremos que se pueden encajar homeomorficamente en algún $\mathbb{R}^n$.

Para ver esto, precisamos algunas definiciones. Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ una función. El *soporte* de ϕ es:

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, ..., n\}$ un cubrimiento finito de X por abiertos. Una familia $\{\phi_i : X \to [0, 1] : i = 1, ..., n\}$ de funciones continuas es una *partición de la unidad subordinada a* $\mathcal{U}$ si se verifica:

- $supp(\phi_i) \subset U_i$ para todo $i = 1, ..., n$.
- $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Teorema 6.5.1. *Sea* $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\}$ *un cubrimiento finito por abiertos de un espacio normal* X*. Entonces existe una partición de la unidad* $\{\phi_i : X \to [0, 1] : i = 1, ..., n\}$ *subordinada a* $\mathcal{U}$*.*

Demostración. Probemos primero que dado $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, ..., n\}$ un cubrimiento finito por abiertos de X, existe un cubrimiento $\mathcal{V} = \{V_i : i = 1, ..., n\}$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$. Construimos $\mathcal{V}$ inductivamente. Sea $A_1 = X - \cup_{i=2}^n U_i$. Observamos que A_1 es cerrado y $A_1 \subset U_1$. Por ser X normal, existe un abierto V_1 tal que $A_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$. Luego $\{V_1, U_2, ..., U_n\}$ cubre X. Consideremos ahora $A_2 = X - (V_1 \bigcup \cup_{i=3}^n U_i)$. Es claro que A_2 es cerrado y $A_2 \subset U_2$. Luego existe un abierto V_2 tal que $A_2 \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_2$ y $\{V_1, V_2, U_3, ..., U_n\}$ cubre X. Argumentando inductivamente encontramos $\mathcal{V}$.

Consideremos ahora un cubrimiento finito por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, ..., n\}$ de X. Por lo anterior podemos considerar dos cubrimientos $\mathcal{V} = \{V_i : i = 1, ..., n\}$ y $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, ..., n\}$ tales que $W_i \subset \overline{W_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$.

Ahora, por el Lema de Urysohn, para cada i existe una función $\phi_i : X \to [0, 1]$ tal que $\phi_i(x) = 1$ si $x \in W_i$ y $\phi_i(x) = 0$ si $x \in V_i^c$. Observemos que $supp(\phi_i) \subset \overline{V_i} \subset U_i$. Por otra parte, como $\mathcal{W}$ es un cubrimiento de X para todo $x \in X$ existe i tal que $\phi_i(x) = 1 > 0$. Por lo tanto para todo $x, \psi(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) > 0$.

Deducimos entonces que la familia $\{\varphi_i : i = 1, ..., n\}$, donde $\varphi_i(x) = \dfrac{\phi_i(x)}{\psi(x)}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. □

Veamos ahora que toda variedad *compacta* de dimensión m se puede *encajar* en un espacio euclídeo, es decir, existe $F : X \to \mathbb{R}^n$ para algún n que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Teorema 6.5.2. *Sea* X *una variedad compacta de dimensión* m*. Entonces existe* n *y* $F : X \to \mathbb{R}^n$ *que es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. Como X es compacto Hausdorff tenemos que X es normal. Por otra parte, para cada $x \in X$ existe U_x y un homeomorfismo $\phi_x : U_x \to V_x$ donde V_x es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Por la compacidad podemos elegir un cubrimiento finito de X dado por $U_i, i = 1, ..., k$ y $g_i : U_i \to V_i$ homeomorfismos donde V_i es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Consideremos $\{\phi_i : X \to [0, 1]\}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U} = \{U_i, i = 1, ..., k\}$. Consideremos

$$F : X \to \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{k \text{ veces}} = \mathbb{R}^n$$

definida por $F(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_k(x), \phi_1(x)g_1(x), ..., \phi_k(x)g_k(x))$. Para ver que que F es un homeomorfismo sobre su imagen baste ver, ya que X es compacto, que F es continua e inyectiva. Es claro que F es continua. Veamos que es inyectiva. Supongamos que $F(x) = F(y)$. Luego $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ para todo $i = 1, ..., n$ y por lo tanto existe j tal que $\phi_j(x) = \phi_j(y) > 0$ y $x, y \in U_j$. Pero entonces $g_j(x) = g_j(y)$ y como g_j es un homeomorfismos, tenemos que $x = y$.

□

6.6. Ejercicios

(1) Sea (X, τ) un espacio topológico.

a) Probar que si X es regular entonces cada par de puntos distintos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

b) Probar que si X es normal entonces cada par de cerrados disjuntos tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

(2) Probar que el espacio R_K (la base está generada por intervalos (a, b) y por $(a, b) - K$ donde $K = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$) es Hausdorff pero no es regular.

(3) Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas con Y Hausdorff. Pruebe que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

(4) Sea $f : X \to Y$ una función continua, sobreyectiva y cerrada tal que $f^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$. (Una tal función se llama *perfecta*).

a) Probar que si X es Hausdorff, entonces Y es Hausdorff.

b) Probar que si X es regular, entonces Y es regular.

c) Probar que si X es localmente compacto, también lo es Y.

d) Probar que si X tiene base numerable, también Y tiene base numerable.

(5) Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces X es regular.

(6) Un espacio (X, τ) se llama *Lindelöf* si todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento numerable.

a) Probar que si X tiene base numerable, entonces es Lindelöf.

b) Probar que $\mathbb{R}_\ell$ es Lindelöf

c) Probar que $\mathbb{R}_\ell$ es normal.

(7) Probar que si X es regular y $A \subset X$ es cerrado entonces el espacio cociente $X_{/A}$ es Hausdorff.

(8) Probar que $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ (este espacio se llama el *plano de Songenfrey*) no es normal. Sugerencia: considerar $L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ y ver que L es cerrado y la topología relativa a L es la discreta.

(9) Dar ejemplos de:

a) Subespacio de un espacio normal no necesariamente es normal.

b) Producto de espacios normales no es necesariamente normal.

(10) Probar que si X es normal y conexo entonces es no numerable. Probar lo mismo en caso de que X sea regular.

(11) Dar una prueba directa del Lema de Urysohn en el caso de un espacio métrico.

(12) Probar la siguiente versión fuerte del Lema de Urysohn. Sea X un espacio normal. Existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ con $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$ y $0 < f(x) < 1$ en el resto si y solamente si A, B son cerrados disjuntos y tanto A como B son una intersección numerable de abiertos de X.

(13) Probar que el Teorema de Extensión de Tietze implica el Lema de Urysohn.

(14) Sea X un espacio topológico metrizable. Probar que son equivalentes:

a) X está acotado para toda distancia que induce la topología de X.

b) Toda función $f : X \to \mathbb{R}$ continua está acotada

c) X es compacto.

(15) Sean $X_i, i \in \mathbb{N}$ una sucesión de espacios tales que $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset ...$ y X_i es cerrado en X_{i+1}. Sea $X = \cup_i X_i$. Decimos que U es abierto en X si $U \cap X_i$ es abierto para todo i.

a) Probar que esto es una topología en X y cada X_i es cerrado en X.

b) Probar que una función $f : X \to Y$ es continua si $f_{/X_i}X_i \to Y$ es continua para todo i.

c) Probar que si cada X_i es normal, entonces X es normal. Sugerencia: Si A y B son cerrados disjuntos, defina f como siendo 0 en A y 1 en B y extiende sucesivamente esta función a $A \cup B \cup X_i$.

(16) Probar la siguiente versión del Teorema de Extensión de Tietze: *Sea X normal, $A \subset X$ cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existe $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.* Usar el siguiente esquema:

a) Probar que basta probarlo sustituyendo $\mathbb{R}$ por $(-1, 1)$.

b) Usando el Teorema de Tietze para extender $f : A \to (-1, 1)$ a una función $g : X \to [-1, 1]$.

c) Considerar $D = g^{-1}(\{1\} \cup \{-1\})$. Usar el Lema de Urysohn para encontrar $h : X \to [0, 1]$ tal que $h(D) = 0$ y $h(A) = 1$.

d) Considerar $\hat{f}(x) = h(x)g(x)$.

(17) Sea X normal y $A \subset X$ cerrado. Sea $f : A \to I^n = [0, 1]^n$ continua. Probar que existe $\hat{f} : X \to I^n$ continua tal que $\hat{f}(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Probar lo mismo si cambiando I^n por $\mathbb{R}^n$.

(18) Asumiendo el Teorema de Brouwer (*Toda función continua $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \to D$ tiene un punto fijo, i.e., existe p tal que $f(p) = p$*) probar que existe $f : \partial D = S^1 \to S^1$ continua que no se puede extender a $\hat{f} : D \to S^1$.

(19) Probar que $\mathbb{R}P^2$ es una variedad de dimensión 2 (superficie) compacta.

(20) Dar un ejemplo de un espacio topológico X con base numerable donde cada punto tenga un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$ y que no sea Hausdorff.

(21) Probar que toda variedad de dimensión m es regular (y por lo tanto metrizable). Donde se usa que es Hausdorff?

(22) Sea X un espacio Hausdorff compacto tal que todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$. Pruebe que X es una variedad de dimensión m.

Capítulo 7

Completitud

En este capítulo veremos algunos resultados importantes relacionados básicamente con espacios métricos: la noción de completitud, la completación de un espacio métrico, la relación entre completitud y compacidad. También veremos dos resultados clásicos: el Teorema de Ascoli-Arzela sobre convergencia de funciones y el Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass.

7.1. Espacios métricos

Ya hemos visto varios resultados sobre espacios métricos, por ejemplo:

- Todo espacio métrico es normal (en particular Hausdorff).
- Todo espacio métrico tiene base local numerable.
- Un espacio métrico es separable si y solamente si tiene base numerable.
- Un espacio métrico es compacto si y solamente si es secuencialmente compacto.

Veremos ahora otros resultados de carácter general. El siguiente es un importante resultado sobre cubrimientos.

Teorema 7.1.1 (Lema de Cubrimiento de Lebesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico, sea A un subconjunto compacto y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de A por abiertos. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se tiene que $B(x, \delta)$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de A. Como A es compacto, existe subcubrimiento finito, es decir, exsiten $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset \cup_i U_i$. Sea $x \in A$, entonces $x \in U_i$ para algún i y por lo tanto existe δ_x tal que $B(x, \delta_x) \subset U_i$. Ahora $\{B(x, \delta_x/2) : x \in A\}$ cubre A y por lo tanto admite un subcubrimiento finito, es decir, existen $x_1, ..., x_m$ tal que $A \subset \cup_j B(x_j, \delta_{x_j}/2)$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_{x_j}/2 : j = 1, .., m\}$. Sea $x \in A$ un punto cualquiera. Entonces existe j tal que $x \in B(x_j, \delta_{x_j}/2)$ y también existe i tal que $B(x_j, \delta_{x_j}) \subset U_i$. Pero entonces $B(x, \delta) \subset B(x_j, \delta_{x_j}) \subset U_i$ y hemos probado el resultado. $\square$

El número δ del teorema anterior se llama *número de Lebesgue* del cubrimiento $\mathcal{U}$. Este resultado es importante para ver la continuidad uniforme. Si $(X, d_X), (Y, d_Y)$ son espacios métricos, la continuidad de una función $f : X \to Y$ se puede expresar así: dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ tal que si $d_X(z, x) < \delta$ entonces $d_Y(f(z), f(x)) < \varepsilon$. La continuidad uniforme dice que δ lo podemos elegir independiente de x.

Definición 7.1.1. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es *uniformemente continua* si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, z) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$ para todo $x, z \in X$.

• Es claro que toda función uniformemente continua es continua pero no es cierto el recíproco. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es continua pero no uniformemente continua.

• Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$, tomemos $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$. Esta función es uniformemente continua ya que $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Teorema 7.1.2. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos con X compacto y sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. La colección $\mathcal{U} = \{f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)) : y \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos de X ya que f es continua. Como X es compacto tomemos δ el número de Lebesgue de este cubrimiento. Ahora, supongamos que $d_X(z, x) < \delta$, es decir $z \in B(x, \delta)$. Por el Lema de cubrimiento de Lebesgue, sabemos que existe $y \in Y$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)$. Dicho de otra forma, $f(z), f(x) \in B(y, \varepsilon/2)$ y por lo tanto $d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$. $\square$

7.2. Completitud y espacios de funciones

Queremos definir que un espacio no esté "agujereado" en el sentido de que hay puntos que se acercan a algo que no está en el espacio, como lo que sucede en $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Como definir que hay puntos que se acercan a algo que no está en el espacio? De hecho, esto carece de sentido, salvo si supiéramos que nuestro espacio está "dentro" de otro. Sin embargo es posible dar esta noción, para lo que precisamos la siguiente definición.

Definición 7.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ es una *sucesión de Cauchy* si dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

Los términos de una sucesión de Cauchy, se acercan unos a otros. Podría suceder esto sin que la sucesión converja! Esto querrá decir que el espacio tiene "agujeros". Observemos primeramente que si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico (X, d) entonces es de Cauchy: sea $\varepsilon > 0$ y sea L el límite de la sucesión $\{x_n\}$, luego existe n_0 tal que $d(x_n, L) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto $d(x_n, x_m) < d(x_n, L) + d(L, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$.

Definición 7.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

• El espacio $\mathbb{Q}$ de los racionales con la topología usual no es completo, ya que cualquier sucesión en $\mathbb{Q}$ que converja a un irracional en $\mathbb{R}$ no converge en $\mathbb{Q}$. El intervalo $(0, 1]$ en $\mathbb{R}$ tampoco es completo ya que la sucesión $x_n = 1/n$ es de Cauchy pero no converge en $(0, 1]$.

• Veamos que $\mathbb{R}^k$ con la métrica euclídea d es completo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Veamos que $\{x_n\}$ está acotada. Sea n_0 tal que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq n_0$. Sea $M_0 = \max\{d(x_j, 0) : j = 0, ..., n_0\}$ y sea $M = M_0 + 1$. Entonces $d(x_n, 0) \leq M$ para todo n ya que si $n \leq n_0$ se cumple trivialmente y en otro caso $d(x_n, 0) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, 0) \leq 1 + M_0 = M$. Luego la sucesión $\{x_n\}$ está contenida en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k$ y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ a un punto que llamaremos p. Probemos que x_n converge a p. Sea $\varepsilon > 0$. Como x_n es de Cauchy, existe m_0 tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ si $n, m \geq m_0$. Por otra parte, existe k_0 tal que $d(x_{n_k}, p) < \varepsilon/2$ si $k \geq k_0$. Sea $N = \max\{m_0, n_{k_0}\}$. Luego, si $n \geq N$ tomando $k \geq k_0$ tenemos que $d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, p) < \varepsilon$ y $\{x_n\}$ converge a p.

• Veamos que el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_j a_j^2 < \infty\}$ con la distancia $d((a_j),(b_j)) = \left(\sum_j (a_j - b_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es completo. Veamos primero que efectivamente es una métrica. Observemos que si $(a_j),(b_j) \in \ell^2$ entonces para cada n tenemos, como consecuencia del producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ que $\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^\infty b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ y por lo tanto $\sum_j a_j b_j$ es convergente. De aquí se concluye fácilmente que ℓ^2 es un espacio vectorial y que $\langle (a_j),(b_j)\rangle = \sum_j a_j b_j$ es un producto interno. De donde $d((a_j),(b_j)) = \|(a_j) - (b_j)\|$ es una métrica como queríamos. Probemos que ℓ^2 es completo. Sea $\{(a_j^{(n)})_j \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de Cauchy, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\sum_j (a_j^{(n)} - a_j^{(m)})^2 < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Claramente, para cada $j \in \mathbb{N}$ la sucesión $(a_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge; sea $b_j = \lim_n a_j^{(n)}$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y n_0 como antes y tomemos $n \geq n_0$. Ahora para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{j=1}^k (a_j^{(n)} - b_j)^2 = \lim_m \sum_{j=1}^k (a_j^{(n)} - a_j^{(m)})^2 \leq \varepsilon$ por lo que $\sum_j (a_j^{(n)} - b_j)^2 < \varepsilon$, es decir, la serie es convergente y es menor que ε para todo $n \geq n_0$. Esto prueba que la sucesión $\{(a_j^{(n)})_j \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ converge a $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *si supiéramos* que $(b_j) \in \ell^2$. Pero, si llamamos $c_j = a_j^{(n)} - b_j$ tenemos por lo que acabamos de ver que $(c_j) \in \ell^2(\mathbb{N})$ y por lo tanto $(b_j) = (c_j) - (a_j^{(n)}) \in \ell^2$.

Lema 7.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $F \subset X$. Entonces:*

1. *Si X es completo y F es cerrado, entonces F es completo.*

2. *Si F es completo entonces F es cerrado.*

Demostración. Veamos la primera parte. Sea $\{x_n\} \subset F$ una sucesión de Cauchy. Como X es completo $\{x_n\}$ converge a un punto $p \in X$. Pero como F es cerrado entonces $p \in F$. Y por lo tanto $\{x_n\}$ converge en F y F es completo.

Para la segunda parte, sea p punto de acumulación de F. Luego existe una sucesión $\{x_n\} \subset F$ que converge a p. Pero entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy y como F es completo converge en F. Así, $p \in F$ y F es cerrado. □

Veamos ahora una caracterización de la completitud, que en cierto sentido se parece a la caracterización de la compacidad por la PIF. Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ se define $diam(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}$.

Proposición 7.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es completo si para cada colección $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos cerrados tales que $F_{n+1} \subset F_n$ y*

$diam(F_n) \to_n 0$ se tiene que $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Demostración. $(\Rightarrow)$: Sea $\{F_n\}$ una colección de cerrados como en el enunciado. Para cada n elegimos $x_n \in F_n$. Resulta que $\{x_n\}$ es de Cauchy, ya que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $diam(F_{n_0}) < \varepsilon$ pero como $x_n \in F_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$ resulta que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Como X es completo $\{x_n\}$ converge a un punto p. Como $\{x_n\} \subset F_m$ si $n \geq m$ y cada F_m es cerrado concluimos que $p \in \bigcap_n F_n$.

$(\Leftarrow)$: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada n sea $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$. Resulta que F_n es cerrado y $F_{n+1} \subset F_n$. Veamos que $diam(F_n) \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Pero entonces $diam(F_n) \leq diam(F_{n_0}) \leq \varepsilon$. Luego, sea $p \in \cap_n F_n$. Es claro que x_n converge a p. □

Observemos que el resultado no es cierto si no pedimos que $diam(F_n) \to 0$. De hecho, en $\mathbb{R}$ los conjuntos $F_n = [n, +\infty)$ son cerrados encajados cuya intersección es vacía. Observar también que podemos cambiar la métrica en $\mathbb{R}$ de forma de obtener una métrica acotada que induce la topología usual, de forma que los F_n tengan diámetro acotado.

Veamos ahora dos resultados que involucran funciones continuas y completitud.

Proposición 7.2.2. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos, con Y completo. Sea $A \subset X$ un conjunto denso y sea $f : A \to Y$ una función uniformemente continua. Entonces existe (una única) $\hat{f} : X \to Y$ continua (y uniformemente continua) que extiende a f, es decir $\hat{f}(a) = f(a)$ si $x \in A$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como A es denso, existe $\{a_n\} \subset A$ tal que $a_n \to x$. Luego $\{a_n\}$ es de Cauchy. Como f es uniformemente continua, $\{f(a_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y que, como Y es completo, converge. Definimos $\hat{f} : X \to Y$ por $\hat{f}(x) = \lim f(a_n)$. Tenemos que ver que $\hat{f}$ está bien definida y satisface lo que queremos. Sean entonces dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ en A que convergen a un mismo punto $p \in X$. Luego $d_X(a_n, b_n) \to 0$ y como f es uniformemente continua $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \to 0$ y por lo tanto $\lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$ y $\hat{f}$ está bien definida. Por otra parte si $a \in A$ podemos tomar la sucesión $a_n = a$ para todo n y por lo tanto $f(a_n) = f(a)$ para todo n y luego $\hat{f}(a) = f(a)$. Resta ver que $\hat{f}$ es continua. Veamos que es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ y sea δ de la continuidad uniforme para f. Tomemos $\delta_0 < \delta$ Supongamos que $d(x,z) < \delta_0$ y sean a_n, b_n sucesiones en A que convergen a x y a z respectivamente. Luego, $d_X(a_n, b_n) < \delta$ para $n \geq n_0$ para algún n_0 y por lo tanto $d_Y(f(a_n), f(b_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y concluimos que $d_Y(\hat{f}(x), \hat{f}(z)) \leq \varepsilon$.

Es clara la unicidad de $\hat{f}$ puesto que si $g : X \to Y$ es continua y $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$ entonces para cada $x \in X$ considerando $\{a_n\} \subset A$ con $a_n \to x$ por la continuidad tendríamos $g(x) = \lim_n g(a_n) = \lim_n f(a_n) = \hat{f}(x)$. □

El próximo resultado es sumamente importante y tiene variadas aplicaciones en la matemática.

Teorema 7.2.1 (Teorema de la contracción)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una contracción, es decir, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$.*

Demostración. La unicidad surge de que $d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p,q) < d(p,q)$ donde la última desigualdad vale si $p \neq q$.

Veamos la existencia. Sea $x \in X$ y definimos $x_0 = x$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \geq 0$. Tenemos entonces que

$$d(x_{n+1}, x_n) = \alpha d(x_n, x_{n-1}) < \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) < ... < \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Pero entonces para $m > n$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq d(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{m-1} \alpha^i \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{i \geq n} \alpha^i \\ &< d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \end{aligned}$$

y concluimos que x_n es de Cauchy. Como X es completo, tenemos que x_n converge a punto $p \in X$. Es decir $\lim f^n(x_0) = p$. Como f es continua

$$f(p) = f(\lim f^n(x_0)) = \lim f^{n+1}(x_0) = p$$

y tenemos el punto fijo que buscábamos. □

Ahora veamos la relación entre completitud y compacidad. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es acotado si $diam(A) = \sup\{d(x,y) :$

$x, y \in A\} < \infty$ o equivalentemente, si existe $r > 0$ y $x_0 \in X$ tal que $A \subset B(x_0, r)$. Uno podría pensar que lo mismo que sucede en $\mathbb{R}^n$ (un conjunto cerrado y acotado es compacto) sucede en un espacio métrico. Esto no es así, el problema es que ser *acotado* NO es una *propiedad topológica* del espacio. Por ello, introducimos la siguiente definición (aunque tampoco es una propiedad topológica en si sola, pero junto con la completitud sí lo es).. Decimos que A es *totalmente acotado* si dado $\varepsilon > 0$ existen $x_0, ..., x_n$ tal que $A \subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Observemos que $\mathbb{R}$ no es totalmente acotado pero el intervalo abierto $(0, 1)$ sí lo es.

Teorema 7.2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y solamente si X es completo y totalmente acotado.*

Demostración. $\Rightarrow$: es directo. $\Leftarrow$: Como X es métrico, basta ver que X es secuencialmente compacto. Consideremos entonces una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X. Tomemos $\varepsilon = 1$. Como X es totalmente acotado, se puede cubrir con una cantidad finita de bolas de radio $\varepsilon = 1$. Luego, existe una bola B_1 de radio 1 tal que $\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_1\} = \infty$. Sea $J_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_1\}$. Luego, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y cubrimos X con una cantidad finita de bolas de radio $\frac{1}{2}$. Luego, existe una bola B_2 de radio $\frac{1}{2}$ tal que $\#\{n \in J_1 : x_n \in B_2\} = \infty$. Sea $J_2 = \{n \in J_1 : x_n \in B_2\}$. Inductivamente, una vez que tenemos definido J_k definimos J_{k+1} cubriendo X con bolas de radio $\frac{1}{k+1}$ y elegimos una bola B_{k+1} de radio $\frac{1}{k+1}$ tal que $\#\{n \in J_k : x_n \in B_{k+1}\} = \infty$ y definimos $J_{k+1} = \{n \in J_k : x_n \in B_{k+1}\}$. De esta forma construimos $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$ donde cada J_k es infinito. Tomemos $n_1 \in J_1$ y tomamos $n_2 \in J_2$ tal que $n_1 < n_2$. inductivamente tomamos $n_{k+1} \in J_{k+1}$ tal que $n_k < n_{k+1}$. Veamos que la sucesión x_{n_k} es una sucesión de cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos k tal que $\frac{2}{k} < \varepsilon$. Ahora, si $i, j \geq k$ entonces, como $n_i, n_j \in J_k$ tenemos que x_{n_i} y x_{n_j} perteneces a una bola de radio $\frac{1}{k}$ y por lo tanto $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \varepsilon$. Hemos probado que x_{n_k} es una sucesión de Cauchy, y como X es completo, resulta que converge. $\square$

7.2.1. Espacios de funciones: convergencia uniforme

Sean X, Y espacios topológicos. Al conjunto $Y^X = \{f : X \to Y\}$ le podemos dar varias topologías (por ejemplo, como ya vimos, la topología producto, la topología box,...). Cuando Y es un espacio métrico, podemos dar también una estructura de espacio métrico. Sea (Y, d) espacio métrico, y consideremos la distancia $d_S(y_1, y_2) = \text{mín}\{d(y_1, y_2), 1\}$. Definimos en $Y^X = \{f : X \to Y\}$ la topología uniforme inducida por la métrica (uniforme):

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d_S(f(x), g(x)).$$

Por otra parte, decimos que $f : X \to Y$ es *acotada* si $diam(f(X)) = \sup\{d(y_1, y_2) : y_i \in f(X)\} < \infty$. El espacio de la funciones acotadas es:

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ acotada }\}.$$

Hasta ahora, una topología en X no ha jugado ningún papel. Sin embargo, cuando X es un espacio topológico, podemos considerar el espacio de las funciones continuas de X en Y :

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es continua}\}.$$

El siguiente teorema nos da condiciones para que un espacio de funciones como los vistos recientemente sean completos:

Teorema 7.2.3. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. Entonces*

1. *Y^X con la topología uniforme es completo si (Y, d) es completo.*

2. *$\mathcal{B}(X, Y)$ es un subconjunto cerrado de Y^X con la topología uniforme.*

3. *$\mathcal{C}(X, Y)$ es un subconjunto cerrado de Y^X con la topología uniforme.*

Demostración. Veamos el primer ítem. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en (Y^X, D), es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $D(f_n, f_m) < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Resulta entonces que para todo $x \in X$ la sucesión $\{f^n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_S) y también en (Y, d). Por la completitud de (Y, d) tenemos que $f_n(x)$ converge. Consideremos $f : X \to Y$ la función dada por $f(x) = \text{lím}_n f_n(x)$. Afirmamos que f_n converge a f. Sea $\varepsilon > 0$ y sea n_0 como antes. Luego, para todo $x \in X$ tenemos que

$$d_S(f_n(x), f(x)) = \text{lím}_m d_S(f_n(x), f_m(x)) \leq \text{lím}\sup_m D(f_n, f_m) \leq \varepsilon$$

y por lo tanto $D(f_n, f) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y concluimos que f_n converge a f.

Para ver el segundo ítem, tenemos que ver que si $f_n \in B(X,Y)$ para todo n entonces $f \in B(X,Y)$. Tomando $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ y n_0 tal que $D(f_n, f) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Pero entonces, dados $x, z \in X$ tenemos que $d(f(x), f(z)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(z)) + d(f_n(z), f(z)) \leq diam(f(_nX)) + 2\varepsilon$ y por lo tanto $f \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Finalmente, para el tercer ítem, tenemos que ver que si $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ entonces $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Sea $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ y sea n_0 tal que $D(f_n, f) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_0$. Tomemos $n \geq n_0$. Sea $x \in X$ y sea U abierto que contiene a x tal que $d(f_n(x), f_n(z)) < \varepsilon/3$ si $z \in U$ por la continuidad de f_n. Pero entonces, si $z \in U$ tenemos que $d(f(z), f(x)) \leq d(f(z), f_n(z)) + d(f_n(z), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, probando la continuidad de f. □

Como subconjuntos cerrado de espacios completos son a su vez completos, tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 7.2.1. *Si* (Y,d) *es completo, entonces* $\mathcal{B}(X,Y)$ *y* $\mathcal{C}(X,Y)$ *son completos.*

Observación 7.2.1. En $\mathcal{B}(X,Y)$ podemos definir también la siguiente distancia: $\hat{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Como estamos trabajando con funciones *acotadas* esto efectivamente define una distancia en $\mathcal{B}(X,Y)$ y se verifica que $D(f,g) = \min\{\hat{d}(f,g), 1\}$. Es directo observar que una sucesión $\{f_n\}$ converge con esta distancia si y solamente si converge en la distancia uniforme D en Y^X. Por lo tanto $(\mathcal{B}(X,Y), \hat{d})$ es completo si (Y,d) es completo.

Por otra parte, no siempre es cierto que $\mathcal{C}(X,Y)$ sea un subconjunto de $\mathcal{B}(X,Y)$ pero sí es cierto que $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ cuando X es compacto.

7.2.2. Completación

Ahora veamos que todo espacio métrico tiene una completación, de la misma forma que $\mathbb{Q}$ se completa a $\mathbb{R}$. Recordemos que una función $i : X \to Y$ entre espacios métricos es un encaje isométrico si $d_Y(i(x), i(z)) = d_X(x,z)$. Una isometría es un encaje isométrico biyectivo.

Definición 7.2.3. Sea (X, d_X) un espacio métrico. Una *completación* de X es un espacio métrico completo (M, d_M) tal que existe un encaje isométrico $i : X \to M$ y tal que $\overline{i(X)} = M$.

Teorema 7.2.4. *Todo espacio métrico tiene una completación y esta es única a menos de isometrías.*

Demostración. Vamos a realizar un encaje isométrico de X es un espacio de funciones. Consideremos $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ con $\hat{d}(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ que ya sabemos que es completo puesto que $\mathbb{R}$ con la métrica usual es completo.

Ahora, fijemos un punto $x_0 \in X$ y para cada $a \in X$ consideremos $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ por $\phi_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0)$. Claramente ϕ_a es una función acotada por $d(a,x_0)$.

Luego tenemos $\Phi : X \to \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ por $\Phi(a) = \phi_a$. Veamos que Φ es un encaje isométrico, es decir $\hat{d}(\phi_a,\phi_b) = d(a,b)$. Para cada $x \in X$ tenemos que $|\phi_a(x)-\phi_b(x)| = |d(x,a)-d(x,b)| \leq d(a,b)$. Por otra parte, para $x = b$ tenemos que $\phi_a(b) - \phi_b(b) = d(a,b)$. Tenemos entonces que Φ es un encaje isométrico. Luego $M = \overline{\Phi(X)}$ en $B(X,\mathbb{R})$ es una completación.

Consideremos ahora (M_1,d_1) y (M_2,d_2) completaciones de X, es decir $i_j : X \to M_j$ es un encaje isométrico y $\overline{i_j(X)} = M_j$ para $j = 1,2$. Consideremos $f : i_1(X) \to M_2$ dada por $f(z) = i_2 \circ i_1^{-1}(z)$. Es claro que $f : i_1(X) \to M_2$ preserva la distancia y por lo tanto es uniformemente continua. Luego, sabemos que se extiende a $\hat{f} : M_1 \to M_2$. Es claro además que $d_2(\hat{f}(a),\hat{f}(b) = d_1(a,b)$, es decir, $\hat{f}$ es un encaje isométrico. Por otra parte $\hat{f}(M_1)$ es cerrado en M_2, ya que si $z \in \overline{\hat{f}(M_1)}$ entonces existe una sucesión $x_n \in M_1$ tal que $\hat{f}(x_n) = z_n \in \hat{f}(M_1)$ con $z_n \to z$. Como z_n es de Cauchy y $\hat{f}$ es un encaje isométrico, tenemos que x_n es de Cauchy en M_1 y por lo tanto converge a un cierto $x \in M_1$ y se tiene que $\hat{f}(x) = z$ como queríamos. Luego $M_2 = \overline{i_2(X)} \subset \hat{f}(M_1) \subset M_2$ y concluimos que $\hat{f}$ es un isometría. $\square$

7.3. La curva de Peano

A finales del siglo XIX la noción de curva estaba desarrollándose y la idea era que una curva era la imagen por una función continua de un intervalo. Peano [1], motivado en parte por el resultado de Cantor sobre la biyección entre el intervalo y el cuadrado, mostró que hay una función continua del intervalo que llena el

[1] Giuseppe Peano (1858-1932) fue un matemático, lógico y filosofo italiano, conocido entre otras cosas por sus aportes a la axiomatización de la matemática. Trabajó intensamente también en la creación de un idioma universal *"Latino sine flexione"*, usando el vocabulario latino pero simplificando al máximo la gramática y evitando todas la formas irregulares y anómalas.

cuadrado.

Teorema 7.3.1. *Existe una función $f : [0,1] \to [0,1]^2$ continua y sobreyectiva.*

Demostración. La idea es construir una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$ que converjan a una función con las propiedades deseadas. Si las funciones f_n son continuas y forman una sucesión de Cauchy, por la completitud de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^2)$, la sucesión converge a $f : [0,1] \to [0,1]^2$ continua. Si además $f_n([0,1])$ es $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ densas en $[0,1]^2$ resultará entonces que f es sobreyectiva en $[0,1]^2$.

La construcción básica es como indica la Figura 7.1. Si $I = [a,b]$ es un intervalo y C es un cuadrado afín a I^2 y $g : I \to C$ que es lineal a trozos, es decir, si $I = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$ entonces g es lineal en cada intervalo y une dos vértices consecutivos del cuadrado pasando por el punto del medio. Consideramos $g_1 : I \to C$ como en la figura (es decir, dividiendo C en cuatro cuadrados iguales, g_1 es lineal a trozos, une dos extremos consecutivos de cada cuadrado y pasando por el medio, y tiene el mismo punto inicial y final que g) entonces $d(g, g_1) < \frac{\sqrt{2}}{2}|I|$. Observar que si dividimos $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ en cuatro intervalos iguales. En cada intervalo I_i, tenemos que g_1 tiene "el mismo aspecto"que g.

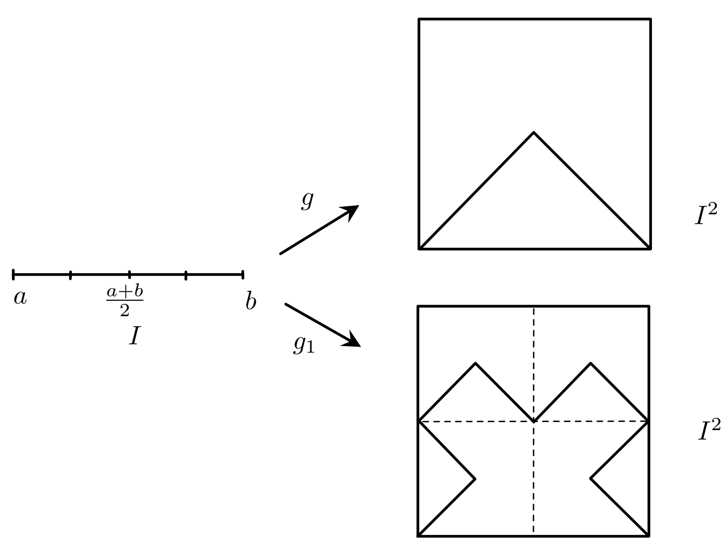


Figura 7.1: Construcción básica de la Curva de Peano.

Entonces, comenzamos con $f_0 : [0,1] \to [0,1]^2$ dada por $f_0(x) = (x,x)$ si $x \in [0,1/2]$ y $f_0(x) = (x, 1-x)$ si $x \in [1/2,1]$, y observemos que es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ densa en $[0,1]^2$. Le aplicamos la construcción básica anterior y obtenemos $f_1 : [0,1] \to [0,1]^2$ que es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ densa y $d(f_0,f_1) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Observamos que $[0,1] = [0,1/4] \cup [1/4,1/2] \cup [1/2,3/4] \cup [3/4,1]$ y en cada uno de estos la función f_1 se comporta como la función g descrita mas arriba. Si aplicamos la construcción básica en cada uno de estos intervalos, obtenemos $f_2; [0,1] \to [0,1]^2$ continua que es $\frac{\sqrt{2}}{2^3}$ densa en $[0,1]^2$ y que $d(f_1,f_2) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^2}$. En la Figura 7.2 se muestran los 4 primeros pasos.

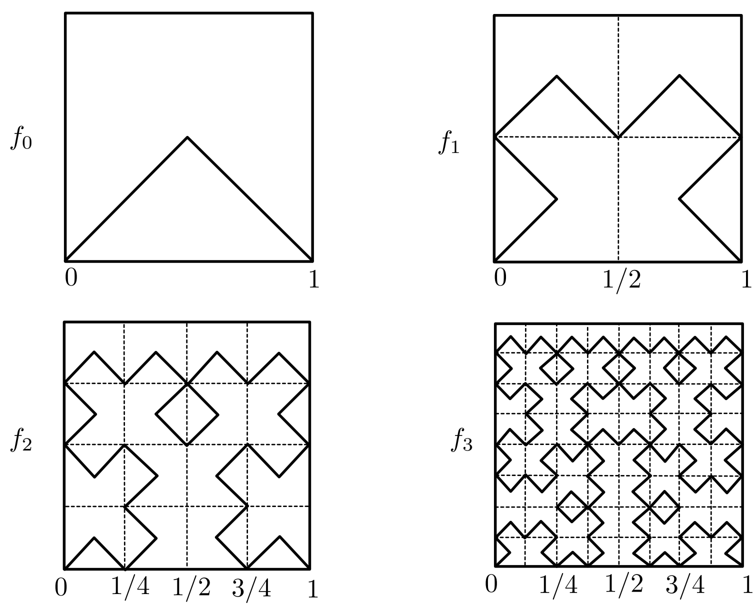


Figura 7.2: Primeros pasos de la construcción de la Curva de Peano.

Inductivamente, aplicando el mismo procedimiento, obtenemos una sucesión $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$ de funciones continuas que son $\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ densas en $[0,1]^2$ y además $d(f_n, f_{n+1}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$. Resulta entonces que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, puesto que $n, m \geq n_0$ entonces $d(f_n, f_m) \leq \sqrt{2} \sum_{j \geq n_0} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n_0}}$. Tenemos entonces que f_n converge a $f : [0,1] \to [0,1]^2$ continua. Como $f([0,1])$ es compacto y es $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ denso en $[0,1]^2$ para todo n tenemos que $f([0,1]) = [0,1]^2$. □

7.4. Teorema de Arzelà-Ascoli

En esta sección veremos un clásico teorema sobre convergencia de funciones. Supongamos que X es un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico. Supongamos que tenemos una sucesión $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ donde en $\mathcal{C}(X, Y)$ consideramos la topología uniforme, ¿bajo que condiciones podemos garantizar que $\{f_n\}$ tiene una subsucesión convergente? Recordemos que $\mathcal{C}(X, Y)$ es una espacio métrico con la métrica uniforme. Sabemos que en un espacio métrico la compacidad es equivalente a la compacidad secuencial. Así que podemos reformular la pregunta: ¿bajo que que condiciones un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ es compacto? El teorema de Arzelà-Ascoli[2] da respuesta a esta pregunta (aunque no veremos la versión más general).

La noción que juega un papel fundamental es la equicontinuidad:

Definición 7.4.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea (Y, d) un espacio métrico y consideremos $\mathcal{C}(X, Y)$ el espacio de la funciones continuas con la métrica uniforme. Un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ se dice *equicontinuo* si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U, x \in U$ tal que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $y \in U$.

• Por ejemplo, la sucesión $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \sin(2\pi x n)$ no es una familia equicontinua. Pero si tenemos una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ que son de clase C^1 y existe K tal que $|f'(x)| < K$ para todo $x \in [0, 1]$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua.

• Es facil observar que si $f_n \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ converge uniformemente a f entonces f_n es equicontinua. Observar que por la convergencia uniforme, f es continua. Sea $x \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que si $d(y, x) < \delta$ entonces $d(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$. Sea n_0 tal que $D(f, f_n) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_0$. Luego, si $d(y, x) < \delta$ y $n \geq n_0$ tenemos que $d(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$. Por otro lado, para cada $i = 1, ..., n_0$ sea δ_i tal que si $d(y, x) < \delta_i$ entonces $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon$. Luego, tomando $\min\{\delta, \delta_1, ..., \delta_{n_0}\}$ obtenemos la equicontinuidad de f_n.

Teorema 7.4.1 (Teorema de Arzelà-Ascoli)**.** *Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto Hausdorff y sea (Y, d) un espacio métrico completo. Consideremos*

[2]Cesare Arzelà (1847-1912) y Guido Ascoli (1843-1896) fueron matemáticos italianos y ambos estudiaron en Scuola Superiore de Pisa, aunque cuando Arzelà ingresó ya Ascoli había egresado. Ascoli introdujo la noción de equicontinuidad y dio condiciones suficientes para la compacidad, mientras que Arzelà generalizó el resultado de Ascoli y dió condiciones necesarias.

$\mathcal{C}(X,Y)$ el espacio de funciones continuas con la métrica de la convergencia uniforme $D(f,g) = \sup_{x\in X}(d(f(x),g(y))$[3]. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ tiene clausura compacta en $\mathcal{C}(X,Y)$ si y solamente si se verifica que

1. *La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua*

2. *Para cada $x \in X$ se tiene que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en Y.*

Demostración. $(\Leftarrow)$: Queremos que $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ es compacto. Como $\mathcal{C}(X,Y)$ es completo y $\overline{\mathcal{F}}$ es cerrado tenemos que $\overline{\mathcal{F}}$ es completo. Por lo tanto, para probar la compacidad basta ver que $\overline{\mathcal{F}}$ es totalmente acotado. Veamos primeramente que $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinuo. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in X$. Por la equicontinuidad de $\mathcal{F}$ tenemos que existe U_x tal que $d(f(x),f(y)) < \varepsilon/3$ si $y \in U_x$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Sea ahora $g \in \overline{\mathcal{F}}$ y sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $D(f,g) < \varepsilon/3$. Luego, si $y \in U_x$ tenemos que $d(g(x),g(y)) \leq d(g(x),f(x)) + d(f(x),f(y)) + d(f(y),g(y)) < \varepsilon$ y hemos probado que $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinuo.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y para cada $x \in X$ consideremos U_x abierto que contiene a x de la equicontinuidad de $\overline{\mathcal{F}}$ correspondiente a $\varepsilon/3$. Como X es compacto, podemos cubrirlo con una cantidad finita $U_{x_i}, i = 1,...,n$. Por otra parte, tenemos que $\overline{\{f(x_i) : f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto y por lo tanto, para cada i existen $V_j^{(i)}, j = 1,...,m$ abiertos[4] en Y de diámetro menor que $\varepsilon/3$ tal que $\overline{\{f(x_i) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \cup_j V_j^{(i)}$. El conjunto de funciones $H = \{\alpha : \{1,...,n\} \to \{1,...,m\}\}$ es finito y consideremos $H_0 = \{\alpha \in H : \exists f \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $f(x_i) \in V_{\alpha(i)}^{(i)}\ \forall i = 1,...,n\}$. El conjunto H_0 es finito, y para cada $\alpha \in H_0$ elegimos una función $f_\alpha \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $f_\alpha(x_i) \in V_{\alpha(i)}^{(i)}$.

Afirmamos que $\overline{\mathcal{F}} \subset \displaystyle\bigcup_{\alpha\in H_0} B(f_\alpha,\varepsilon)$. Sea $g \in \overline{\mathcal{F}}$ Luego, existe $\alpha \in H_0$ tal que $g(x_i)$ y $f_\alpha(x_i)$ pertenecen al mismo $V_{j_i}^{(i)}$ para cada i donde $j_i = \alpha(i)$. Sea $z \in X$ cualquiera. Entonces existe i tal que $x \in U_{x_i}$. Luego

$$\begin{aligned} d(g(z),f_\alpha(z)) &\leq d(g(z),g(x_i)) + d(g(x_i),f_\alpha(x_i)) + d(f_\alpha(x_i),f_\alpha(z)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que $D(g,f_\alpha) < \varepsilon$.

$(\Rightarrow)$: Supongamos ahora que $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ es compacto. Luego es totalmente acotado, y dado $\varepsilon > 0$ existen $f_i : i = 1,...,n$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \subset \cup_i B(f_i,\varepsilon/3)$. Sea

[3] Como X es compacto D es efectivamente una distancia en $\mathcal{C}(X,Y)$ y que induce la topología uniforme. Ver Observación 7.2.1 .

[4] Deberíamos poner m_i pero es claro que podemos considerar $m_i = m$ para todo i.

$x \in X$. Para cada $i = 1, ..., n$ existe U_i con $x \in U_i$ tal que si $y \in U_i$ entonces $d(f_i(y), f_i(x)) < \varepsilon/3$. Sea entonces $U = \cap_i U_i$ y sea $y \in U$ y $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Luego existe i tal que $D(f, f_i) < \varepsilon/3$ y concluimos que para $y \in U$

$$\begin{aligned} d(f(y), f(x)) &\leq d(f(y), f_i(y)) + d(f_i(y), f_i(x)) + d(f_i(x), f(x)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

y hemos probado que $\mathcal{F}$ es equicontinua. Por otra parte la función $\Gamma_x : \mathcal{C}(X, Y) \to Y$ dada por $\Gamma_x(f) = f(x)$ es una función continua y por lo tanto $\Gamma_x(\overline{\mathcal{F}})$ es compacto en Y para cada $x \in X$. $\square$

7.5. El teorema de aproximación de Stone-Weierstrass

En esta última sección veremos un importante resultado que nos dice que podemos aproximar una función continua por una función diferenciable. En 1885 Karl Weierstrass probó el siguiente resultado: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$. Dicho de otra forma, los polinomios son densos en el espacio $\mathcal{C}([a, b]) := \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Claramente es un resultado de suma relevancia y, en cierto modo sorprendente: Karl Weierstrass ya conocía que existen funciones continuas en $[a, b]$ que *no son derivables en ningún punto* y mas aún, como veremos en el Capítulo 8, tales funciones son densas en el espacio de funciones continuas en $[a.b]$. Marshal Stone generalizó el resultado de Weierstrass en particular para varias variables:

Teorema 7.5.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^k$ un subconjunto compacto. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una polinomio en k-variables $p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Pero la generalización de Stone fue mucho mas allá, como veremos a seguir. Como espacio de partida podemos tomar un espacio compacto Hausdorff X. Denotemos por $\mathcal{C}(X)$ al espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Recordemos que $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ es una distancia (que proviene de la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$). Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ es una *subálgebra que contiene las constantes y separa puntos* si se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $p, q \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha p + \beta g \in \mathcal{A}$.
2. Si $p, q \in \mathcal{A}$ entonces el producto $p.q \in \mathcal{A}$.
3. La función $\mathbf{1}$ que es idénticamente 1 pertenece a $\mathcal{A}$
4. Si $x_1 \neq x_2$ son dos puntos distintos de X entonces existe $p \in \mathcal{A}$ tal que $p(x_1) \neq p(x_2)$.

El Teorema 7.5.1 es consecuencia de la siguiente versión más general:

Teorema 7.5.2 (Aproximación de Stone-Weierstrass)**.** *Sea X un espacio topológico compacto Hausdorff y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de funciones de $\mathcal{C}(X)$ que contiene las constantes y separa puntos. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $p \in \mathcal{C}$ tal que*

$$d(f, p) = \sup_{x \in X} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

La demostración que vamos a ver está basada en el artículo [BD]. Primero veremos un par de lemas, el primero de ellos es el paso fundamental de la demostración. Está basado en la siguiente cuenta sencilla. Si $0 < \delta < 1$ y k es un entero tal que $1 < k\delta < 2$ entonces[5]

$$\left(1 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^n\right)^{k^n} \geq 1 - \left(\frac{k\delta}{2}\right)^n \to_n 1 \tag{7.1}$$

y además

$$\begin{aligned} (1-\delta^n)^{k^n} &\leq \frac{(1+(k\delta)^n)}{(k\delta)^n}(1-\delta^n)^{k^n}) < \\ &< \frac{1}{(k\delta)^n}(1-\delta^n)^{k^n}(1+\delta^n)^{k^n} = \frac{1}{(k\delta)^n}(1-\delta^{2n})^{k^n} \to_n 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Lema 7.5.1. *Sea $x_0 \in X$ y U un abierto que contiene a x_0. Entonces, existe un abierto $V, x \in V \subset \overline{V} \subset U$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{A}$ que verfica:*

1. *$0 \leq p(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.*
2. *$|p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in V$*
3. *$|p(x)| > 1 - \varepsilon$ para todo $x \notin U$.*

[5]En ambas ecuaciones hacemos uso de la desigualdad de Bernoulli $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ si $h \geq -1$.

Demostración. Primero vamos a encontrar una función $q \in \mathcal{A}$ tal que $0 \leq q(x) \leq 1$ tal que $q(x_0) = 0$ y $q(x) > 0$ para $x \in U^c$. A partir de esta encontraremos la función buscada.

Sea entonces $x \neq x_0$. Por la propiedad de separar puntos, existe $h_x \in \mathcal{A}$ tal que $h_x(x) \neq h(x_0)$. La función $g_x = h_x - h_x(x_0)\mathbf{1}$ se anula en x_0 y es diferente de cero en x. Luego $q_x = \frac{1}{\|g_x\|^2} g_x^2$ verifica $0 \leq q_x(z) \leq 1$ para todo $z \in X$ y $q_x(x_0) = 0$ y $q_x(x) > 0$. Pero entonces existe un abierto U_x tal que $q_x(z) > 0$ para todo $z \in U_x$.

Por compacidad de U^c tenemos que existen puntos $x_1, ..., x_m$, funciones q_i y abiertos U_{x_i} tales que $q_i(z) > 0$ si $z \in U_{x_i}$, $q_i(x_0) = 0$ y $\cup_i U_{x_i} \supset U^c$ y $0 \leq q_i \leq 1$. Pero entonces $q = \frac{1}{m} \sum_i q_i$ verifica $0 \leq q(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, $q(x_0) = 0$ y $q(x) > 0$ si $x \in U^c$.

Ahora, existe $0 < \delta < 1$ tal que $q(x) > \delta$ si $x \in U^c$ y un abierto V tal que $q(x) < \frac{\delta}{2}$ si $x \in V$. Claramente $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sea k un entero tal que $1 < k\delta < 2$. Consideremos[6] $p_n(x) = (1 - q^n(x))^{k^n}$

Si $x \in V$ tenemos que $p_n(x) \geq (1 - (\frac{\delta}{2})^n)^{k^n}$ y por (7.1) tenemos que p_n converge uniformemente a 1 en V. Por otro lado, si $x \in U^c$ tenemos que $p_n(x) \leq (1 - \delta^n)^{k^n}$ y por (7.2) concluimos que p_n converge uniformement a 0 en U^c. Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $p = 1 - p_n$ con n suficientemente grande. $\square$

El siguiente lema es una versión del anterior para conjuntos cerrados disjuntos.

Lema 7.5.2. *Sean A, B conjuntos cerrados disjuntos de X. Dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathcal{A}$ tal que:*

1. $0 \leq p(x) \leq 1$ *para todo* $x \in X$.
2. $p(x) < \varepsilon$ *si* $x \in A$.
3. $p(x) > 1 - \varepsilon$ *si* $x \in B$.

Demostración. Consideremos $U = B^c$. Para cada $x \in A$ tomemos el abierto $V_x \subset U$ dado por el Lema 7.5.1. Por compacidad de A tenemos que existen $x_1, ..., x_m$ tal que $A \subset \bigcup_i V_{x_i}$. Por el lema anterior tenemos que existen $p_1, ..., p_m$ tal que $p_i(x) < \varepsilon/m$ si $x \in V_{x_i}$ y $p_i(x) > 1 - \varepsilon/m$ si $x \in B$. Pero entonces, haciendo $p = p_1.p_2....p_m$ tenemos que si $x \in A$ resulta $p(x) < \varepsilon/m < \varepsilon$ y si $x \in B$ resulta $p(x) > (1 - \varepsilon/m)^m \geq 1 - \varepsilon$.

[6] Por las dudas aclaramos que q^n es el producto de q n-veces consigo mismo.

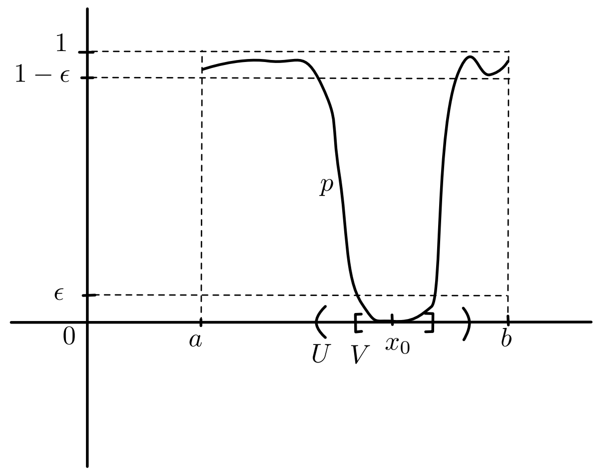


Figura 7.3: Lema 7.5.1 con $X = [a, b]$.

□

Ahora concluiremos la demostración del Teorema 7.5.2. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$ (que podemos suponer menor que 1). Podemos suponer que $f \geq 0$ (sumandole una constante en todo caso). Sea n el menor entero tal que $(n-1)\varepsilon \geq \|f\|$. La idea es estratificar el espacio X según valores de f y aplicar el lema anerior. Para $0 \leq j \leq n-1$ tomemos

$$A_j = \{x \in X : f(x) \leq j\varepsilon\} \qquad B_j = \{x \in X : f(x) \geq (j+1)\varepsilon\}$$

Claramente A_jy B_j son cerrados disjuntos. Por Lema 7.5.2, para cada j tenemos $p_j \in \mathcal{A}$ tal que

$$0 \leq p_j(x) \leq 1, \quad p_j(x) < \frac{\varepsilon}{n} \text{ si } x \in A_j, \;\; p_j(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{n} \text{ si } x \in B_j \tag{7.3}$$

y formemos la siquiente función de $\mathcal{A}$:

$$p = \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} p_j$$

Sea $x \in X$. Sea $j = \text{ínf}\{i : x \in A_i\}$. Resulta entonces que $x \in A_i$ para $i \geq j$ y que $x \in B_i$ para $i \leq j-1$. Pero entonces

$$p(x) = \varepsilon \sum_0^{j-1} p_i(x) + \varepsilon \sum_j^{n-1} p_i(x) < j\varepsilon + (n-j)\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{n}\right) < (j+1)\varepsilon.$$

y también

$$p(x) = \varepsilon \sum_0^{j-1} p_i(x) + \varepsilon \sum_j^{n-1} p_i(x) > j\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) > (j-1)\varepsilon$$

Concluimos entonces que $|f(x) - p(x)| < 2\varepsilon$.

7.6. Ejercicios

(1) Sean X, Y espacios métricos

a) Si X es compacto y $f : X \to Y$ continua, probar que f es uniformemente continua.

b) Si Y es completo y $A \subset X$, mostrar que si $f : A \to Y$ es uniformemente continua entonces f puede extenderse a una única función uniformemente continua $g : \overline{A} \to Y$.

c) Probar que toda función uniformemente continua $f : X \to Y$ induce una única función uniformemente continua $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ donde $\hat{X}, \hat{Y}$ son completaciones de X e Y.

d) Probar que si X, Y son isométricos, también lo son sus completaciones.

e) Probar que la completación de $X \times Y$ es el producto de las completaciones.

(2) Sean M, N espacios métricos y $f : M \to N$ continua y supongamos que existe $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq cd(x, y)$ para todo x, y. Probar que f lleva subconjuntos completos en subconjuntos completos. Deducir que si X es completo, entonces f es cerrada.

(3) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Probar que está acotada.

(4) Sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto. Probar que es completo.

(5) Sea $\ell^1(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_n |a_n| < \infty\}$. Mostrar que $d((a_n),(b_n)) = \sum_n |a_n - b_n|$ es una métrica y que $\ell^1(\mathbb{N})$ es completo con esta métrica.

(6) Sea X un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

a) X es separable.

b) X tiene base numerable

c) X es Lindelöf.

(7) Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una aplicación contráctil (es decir, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ si $x \neq y$). Probar que f tiene un punto único punto fijo. Dar un contraejemplo en el caso de que X sea completo pero no compacto (por ejemplo en $X = \mathbb{R}$).

(8) Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $A \subset X$ y para $x \in X$ se define

$$d(x,A) = \operatorname{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}.$$

a) Probar que la función $x \to d(x,A)$ es uniformemente continua.

b) Probar que si A es compacto entonces existe $y \in A$ tal que $d(x,A) = d(x,y)$. Dar un contraejemplo en el caso no compacto.

c) Si $A, B \subset X$ se define $d(A,B) = \operatorname{ínf}\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Probar que si A es compacto, B es cerrado y son disjuntos entonces $d(A,B) > 0$. Dar un contraejemplo si ninguno de los dos es compacto.

(9) ¿Cuándo un subconjunto de $\mathbb{R}$ es totalmente acotado?

(10) Sea (X,d) un espacio métrico. Construir una completación usando sucesiones de Cauchy. Esto es, sea $M = \{\{a_n\} : a_n \text{es de Cauchy}\}$ y considerar $(a_n) \sim (b_n)$ si $d(a_n, b_n) \to 0$.

a) Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en M.

b) Sea $\hat{X} = M/\sim$. Sea $D : M \to M \to \mathbb{R}$ dada por $D([(a_n)],[(b_n)]) = \operatorname{lím}_n d(a_n, b_n)$. Probar que D está bien definida y es un métrica en $\hat{X}$.

c) Probar que $(\hat{X}, D)$ es una completación de X.

(11) Un conjunto P se dice perfecto si es igual a sus puntos de acumulación.

a) Probar que un espacio métrico completo y perfecto es no numerable.

b) Dar un ejemplo de un espacio métrico perfecto numerable.

(12) El *cubo de Hilbert* $I^\omega \subset \ell^(\mathbb{N})$ es el espacio

$$\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : 0 \leq a_i \leq \frac{1}{i}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}.$$

a) Probar que I^ω es compacto.

b) Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Para cada n probar que existe una copia homeomorfa de I^n en I^ω.

c) Probar que I^ω es homeomorfo a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.

(13) Probar que la bola cerrada de radio uno en $C([0,1])$ es acotada y cerrada pero no es compacta.

(14) Sea X un espacio topológico y sea (Y,d) un espacio métrico.

a) Probar que si una colección finita de funciones en $\mathcal{C}(X,Y)$ es equicontinua.

b) Probar que si $\{f_n\}$ es una sucesión que converge uniformemente, entonces es equicontinua.

c) Suponga que $\mathcal{F}$ es una colección de funciones diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un entorno U_x y $K > 0$ tal que $|f'(y)| < K$ para todo $y \in U_x$ y toda $f \in \mathcal{F}$. Probar que $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

Capítulo 8

Espacios de Baire

En este capítulo estudiaremos los espacios de Baire, que tienen variadas aplicaciones en diferentes ramas del análisis y la topología. Precisamos del algunas definiciones. Informalmente, vamos a decir que es que un conjunto sea "chico" o "grande" desde un punto de vista topológico.

Definición 8.0.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico.

- Un subconjunto $M \subset X$ se dice *magro (o de primera categoría, o F_σ)* si es unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío, es decir $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ donde F_n es cerrado con interior vacío para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Un subconjunto $R \subset X$ se dice *residual (o de segunda categoría, o G_δ)* si es intersección de conjuntos abiertos y densos, es decir $R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donde A_n es abierto y $\overline{A_n} = X$ para todo n.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de lo racionales es magro en $\mathbb{R}$. Por otra parte, los irracionales forman un conjunto residual en $\mathbb{R}$. De hecho, el complemento de un magro siempre es residual y viceversa, ya que si $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ con F_n cerrado con interior vacío, resulta que $A = M^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$ donde tenemos que F_n^c es abierto y denso en X.

Observación 8.0.1. Es importante notar que la unión numerable de conjuntos magros es un conjunto magro y la intersección numerable de conjuntos residuales es un residual.

Definición 8.0.2. Un espacio topológico (X, τ_X) se llama *Espacio de Baire* si todo conjunto residual de X es denso en X.

El espacio $\mathbb{Q}$ de los racionales NO es un espacio de Baire, puesto que para cada $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\mathbb{Q} - \{q\}$ es abierto y denso en $\mathbb{Q}$ pero la intersección de todos es vacía.

Sigue inmediatamente de la definición que (X, τ_X) es un espacio de Baire si todo conjunto magro tiene interior vacío.

Observar que la intersección de dos conjuntos densos puede no ser densa (incluso puede ser vacía), pero en un espacio de Baire, como la intersección (numerable) de residuales es residual, la intersección numerable de residuales siempre es densa. Por otra parte, como la unión (numerable) de magros es magro, siempre tienen interior vacío. En este sentido, ser *residual* es ser "grande" o casi todo desde un punto de vista topológico y ser magro es chico [1].

Veamos ahora condiciones que garantizan que un espacio topológico sea un espacio de Baire.

Teorema 8.0.1. *Se verifica que:*

1. *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire*
2. *Si (X, τ_X) es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto entonces es un espacio de Baire.*

Demostración. Probemos primero que si (X, d) es un espacio métrico completo entonces es un espacio de Baire. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en X. Queremos probar que $R = \cap_n A_n$ es denso. Sea U un abierto cualquiera. Como A_1 es abierto y denso, existe un abierto U_1 tal que $\overline{U_1} \subset A_1 \cap U$ y $diam(U_1) < 1$. Ahora, como A_2 es abierto y denso, existe un abierto U_2 tal que $\overline{U_2} \subset A_2 \cap U_1$ y $diam(U_2) < 1/2$. Inductivamente, una vez construido U_n elegimos un abierto U_{n+1} tal que $\overline{U_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap U_n$ y $diam(U_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$. Tenemos que $\overline{U_n}$ es una sucesión de cerrados encajados cuyo diámetro tiende a cero. Como X es completo, por la Proposición 7.2.1, concluimos que $\cap_n \overline{U_n} \neq \emptyset$ (ver Figura 8.1). Pero esta intersección está contenida en $U \cap R$ y hemos probado que R es denso.

[1] En cierto sentido ser residual es el análogo a ser un conjunto de medida total en teoría de la medida y ser magro es el análogo de tener medida cero.

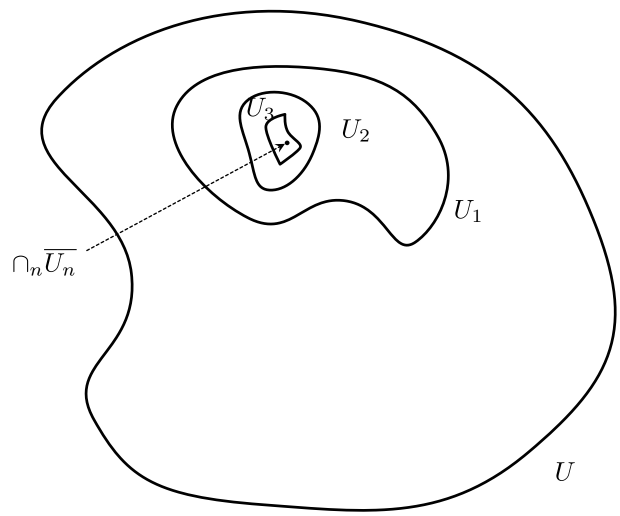


Figura 8.1:

La demostración del segundo sigue las mismas ideas. Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos abiertos y densos en X. Queremos probar que $R = \cap_n A_n$ es denso. Sea U un abierto cualquiera. Como A_1 es un abierto denso y X es localmente compacto, existe un abierto U_1 tal que $\overline{U_1}$ es compacto y $\overline{U_1} \subset A_1 \cap U$. Inductivamente, una vez construído U_n tomamos U_{n+1} cuya clausura es compacta y $\overline{U_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap U_n$. Luego tenemos una sucesión de compactos $\overline{U_n}$ encajados. Como X es Hausdorff, estos compactos son cerrados y por la PIF concluimos que $\cap_n \overline{U_n} \neq \emptyset$. Esta intersección está contenida en $U \cap R$. $\square$

Para ver un ejemplo de una aplicación sencilla veamos que si $\mathcal{C} \subset$ es el conjunto de Cantor, entonces hay una trasladado que no contiene ningún racional, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x + \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. De hecho, $\mathcal{C}$ es un cerrado con interior vacío y también lo es $q + \mathcal{C}$ para cualquier $q \in \mathbb{Q}$. Luego $\cup_{q \in \mathbb{Q}} q - \mathcal{C}$ es un conjunto magro, y como $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire, tiene interior vacío, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \cup_{q \in \mathbb{Q}} q - \mathcal{C}$. Luego $x + \mathcal{C} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Observación 8.0.2. Sea X un espacio de Baire y sea $Y \subset X$ un abierto. Entonces

Y es un espacio de Baire con la topología relativa. Sin embargo, no siempre un cerrado $Y \subset X$ es un espacio de Baire. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}^2 - \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\times\{0\}\}$ es un espacio de Baire y $\mathbb{Q} \subset X$ es cerrado. Sin embargo, si X es un espacio métrico completo o Hausdorff localmente compacto e $Y \subset X$ es cerrado, entonces Y es un espacio de Baire, puesto que Y resulta ser a su vez un espacio métrico completo o Hausdorff localmente compacto.

8.1. Límite puntual de funciones continuas

Supongamos que tenemos $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a $f : X \to Y$, es decir para cada $x \in X$ se tiene que $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Si la convergencia es uniforme, sabemos que f necesariamente es continua, pero si la convergencia no es uniforme, el límite puede no ser continuo. Por ejemplo $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 0$ si $x \in [0,1)$ y $f(1) = 1$ que no es continua. Pero hay alguna condición que deba cumplir la función límite? Puede ser la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y 0 en otro caso, límite puntual de funciones continuas? El siguiente resultado dice que esto no es posible.

Teorema 8.1.1. *Sea X un espacio de Baire y sea (Y,d) un espacio métrico. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a $f : X \to Y$. Entonces, el conjunto de puntos de continuidad de f es un conjunto residual.*

Demostración. Para cada $j \geq 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto

$$C_k(j) = \{x \in X : d(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{j} \ \forall\, n,m \geq k\}.$$

En cierto sentido, $C_k(j)$ es el conjunto en donde f_n converge uniformemente con rango $1/j$. Es claro que $C_k(j)$ es cerrado puesto que fijados n,m el conjunto de los puntos x donde $d(f_n(x), f_m(x)) \leq 1/j$ es cerrado y por lo tanto $C_k(j)$ es intersección de cerrados. Por otra parte $C_k(j) \subset C_{k+1}(j)$ y $X = \cup_k C_k(j)$ ya que para cualquier $z \in X$ se tiene que $f_n(z)$ es de Cauchy pues es convergente.

Sea

$$A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} int(C_k(j)).$$

Claramente A_j es abierto pues es unión de abiertos. Afirmamos que A_j es denso. Observemos que $int(C_k(j))$ es una familia creciente de abiertos. Supongamos que A_j no es denso. Luego existe un abierto U tal que $A_j \cap U = \emptyset$. Pero entonces $C_k(j) \cap U$ es un cerrado (relativo a U) con interior vacío, y por lo tanto $\cup_k C_k(j) \cap U$ tiene interior vacío (relativo a U) lo cual es absurdo pues $\cup_k C_k(j) = X$ y tanto U como X son espacios de Baire.

Tomemos entonces $C = \cap_j A_j$. Afirmamos que si $x \in C$ entonces f es continua en x. Sea $\varepsilon > 0$ y sea j_0 tal que $\frac{1}{j_0} < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego $x \in A_{j_0}$ y por lo tanto existe k tal que $x \in int(C_k(j_0))$. Tomemos $n \geq k$. Como f_n es continua, existe un abierto $U_x \subset int(C_k(j_0))$ tal que si $y \in U_x$ entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$. Pero entonces, si $y \in U_x$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y) + d(f_n(y), f(y)) \\
&= \lim_m d(f_m(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + \lim_m d(f_n(x), f_m(y)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

8.2. Funciones continuas no derivables

La mayoría de las funciones que encontramos en la “práctica” son funciones diferenciables, o a lo sumo no son derivables en puntos aislados. Esta era la idea en el siglo XIX hasta que Karl Weierstrass, en 1872, dió un ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto. Esta es la conocida función de Weierstrass:

$$f(x) = \sum_n a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde $0 < a < 1, b$ es un entero impar y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Esto muestra lo difícil que es construir una función continua que no es derivable en ningún punto. Sin embargo, Banach probó que la “mayoría” de las funciones continuas no son derivables en ningún punto. De hecho, como muchas veces sucede, es mas fácil mostrar que un fenómeno es residual (de segunda categoría) que dar un ejemplo concreto. Consideremos $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ con la métrica de la convergencia uniforme.

Teorema 8.2.1. *Existe un conjunto residual $R \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ tal que si $f \in R$ entonces f no es derivable en ningún punto.*

Demostración. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, $x \in [0,1]$, y $0 < h < 1/2$ y denotemos por

$$\Delta(x,h,f) = \{\text{máx}\left\{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|, \left|\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right|\right\}$$

y

$$\Delta(h,f) = \inf_{x\in[0,1]} \Delta(x,h,f).$$

Consideremos

$$A_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \sup_{0<h\leq \frac{1}{n}} \Delta(h,f) > n \right\}.$$

Probemos que A_n es abierto y denso y que si $f \in R = \cap_n A_n$ entonces no es derivable en ningún punto. Recordar que $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ con la métrica uniforme ($d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$) es un espacio métrico completo y por lo tanto un espacio de Baire.

Veamos que A_n es abierto y sea $f \in A_n$. Sea $h, 0 < h \leq \frac{1}{n}$ tal que $\Delta(h,f) > n$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\Delta(h,f) - 2\frac{\delta}{h} > n$. Sea $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tal que $d(f,g) < \delta$. Luego, para cada $x \in [0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| \geq \\ \geq \quad & \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| - \left|\frac{g(x+h)-f(x+h)}{h}\right| - \left|\frac{f(x)-g(x)}{h}\right| \\ > \quad & \Delta(h,f) - 2\frac{\delta}{h} > n \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que A_n es abierto. Probemos que es denso. Sea $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Elijamos $m > 0$ tal que $\frac{1}{m} < \text{mín}\{\delta, \frac{1}{n}\}$ y tal que $\frac{m\varepsilon}{4} > n$. Dividamos $[0,1]$ en intervalos del longitud $\frac{1}{m}, 0 = a_0 < a_1 < ... < a_m = 1$ donde $a_{j+1} - a_j = \frac{1}{m}$. Definamos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma (ver Figura 8.2):

- $g(a_i) = f(a_i)$ para $i = 0, ..., m$.
- $g(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) = \text{máx}\{f(a_i), f(a_{i+1})\} + \varepsilon/2$ para $i = 0, ..., m-1$.
- Si denotamos por $b_i = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$ pedimos que $g_{/[a_i,b_i]}$ sea lineal y $g_{/[b_i,a_{i+1}]}$ sea lineal.

Es claro que g es continua y además en cada trozo lineal su pendiente es $\geq \frac{m\varepsilon}{4} > n$. Si $x \in [a_i, a_{i+1}]$ entonces

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &\leq \left| \max_{y\in[a_i,a_{i+1}]} g(y) - \min_{z\in[a_i,a_{i+1}]} f(z) \right| \\ &< g(b_i) - \max\{f(a_i), f(a_{i+1}\} + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

y por lo tanto $d(f,g) < \varepsilon$. Veamos que $g \in A_n$. Tomemos $h = \frac{1}{4m}$. Luego, si $x \in [a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ entonces $\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| > n$ y si $x \in [\frac{a_i+b_i}{2}, b_i]$ entonces $\left|\frac{g(x-h)-g(x)}{h}\right| > n$. De la misma forma razonamos en el intervalo $[b_i, a_{i+1}]$. Hemos probado que $\Delta(h,g) > n$ y por lo tanto $g \in A_n$.

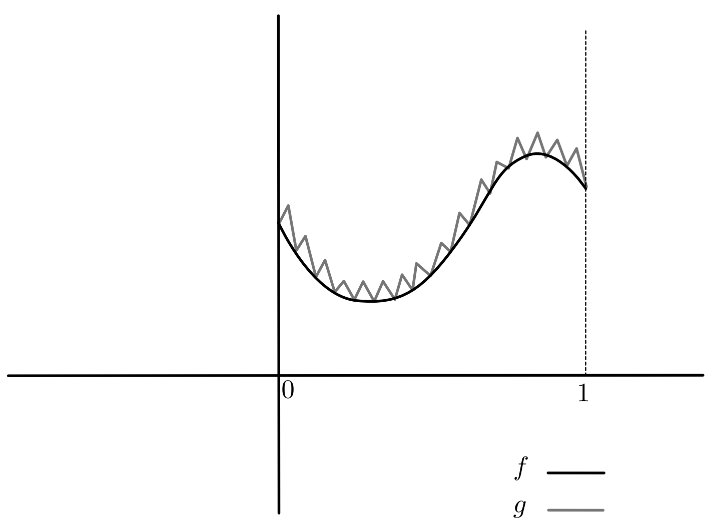


Figura 8.2:

Sea entonces $R = \cap_n An$ y sea $f \in R$. Es claro que f no es derivable en ningún punto, ya que si $x \in [0,1]$, para todo n existe $h_n \leq \frac{1}{n}$ tal que $\max\left\{\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h}\right|, \left|\frac{f(x-h_n)-f(x)}{h}\right|\right\} > n$ y por lo tanto NO existe el límite $\lim_{a\to 0} \dfrac{f(x+a)-f(x)}{a}$.

$\square$

8.3. Ejercicios

(1) Sea X es un espacio de Baire y sea A_n una colección de abiertos cualesquiera, tal que $A = \cap_n A_n \neq \emptyset$. Probar que A es un espacio de Baire. Probar que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es un espacio de Baire.

(2) Dar un ejemplo de un cerrado de un espacio de Baire que no sea un espacio de Baire.

(3) Determinar si $\mathbb{R}_\ell$ es un espacio de Baire.

(4) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un espacio de Baire. Probar que A no puede ser numerable y denso a la vez.

(5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea U_n la colección de todos los abiertos $U \subset \mathbb{R}$ tal que $diam(f(U)) < \frac{1}{n}$. Sea $C = \cap_n \in U_n$. Probar que $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de f si y solamente si $x \in C$.

b) Probar que el conjunto de los puntos de continuidad de f es un espacio de Baire.

c) Concluir que el conjunto de los puntos de continuidad de f no puede ser numerable y denso a la vez.

(6) (Principio de la acotación uniforme). Sea X un espacio métrico completo y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tal que para cada $a \in X$ se tiene que $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado. Probar que existe un abierto $U \subset X$ tal que $\mathcal{F}$ está acotado uniformemente en U, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Capítulo 9

Dos Teoremas Fundamentales

En este capítulo extra veremos dos teoremas profundos de topología: el Teorema del Punto Fijo de Brouwer y el Teorema de la Invariancia del Dominio. Estos teoremas se acostumbran a ver en cursos mas avanzados de topología. Las pruebas que veremos aquí son relativamente elementales, aunque usaremos resultados que hemos visto y haremos uso también de Cálculo Diferencial.

9.1. El Teorema de Punto Fijo de Brouwer

Uno de las clásicas consecuencias del Teorema de Bolzano que se vé en los primeros cursos de Cálculo es el siguiente: una función $f : [0,1] \to [0,1]$ continua tiene un punto fijo, es decir, existe $p \in [0,1]$ tal que $f(p) = p$. La demostración se hace considerando la función $g(x) = x - f(x)$, resultado que $g(0) \leq 0 \leq g(1)$ y por lo tanto existe p tal que $g(p) = 0$. El objetivo de esta sección es probar la siguiente sorprendente generalazación:

Teorema 9.1.1 (Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ y sea $f : D^n \to D^n$ una función continua. Entonces existe $p \in D^n$ tal que $f(p) = p$.*

La demostración que vamos a ver es debida a John Milnor [Mil][1]. Deduciremos este teorema de otro resultado fundamental, que vincula la topología y la

[1] Matemático estadounidense, nacido en 1931. Publica su primer trabajo en el *Annals of Math* en 1950 (aceptado en 1948 cuando tenía 17 años) mientras estudiaba en Princeton. Fue

dinámica. Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Un campo continuo (diferenciable) de vectores tangentes a S^n es una función $u : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ continua (diferenciable) tal que $\langle u(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in S^n$. Decimos que es unitario si $\|u(x)\| = 1$ para todo $x \in S^n$. Decimos que u tiene una singularidad si $u(x) = 0$ para algún $x \in S^n$. Si u es un campo sin singularidades entonces $v(x) = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$ es un campo unitario.

Teorema 9.1.2. *La esfera S^n admite un campo continuo sin singularidades si y solamente si n es impar.*

Veamos con deducir el Teorema 9.1.1 de éste último resultado. Comencemos con n par y supongamos por absurdo que existe $f : D^n \to D^n$ continua sin puntos fijos. Veamos que podemos entonces construir un campo continuo en S^n sin singularidades, lo que no es posible. Consideremos $v : D^n \to \mathbb{R}^n$ por $v(x) = x - f(x)$. Este es un campo en D^n que en el borde "apunta hacia afuera" ya que $\langle x, v(x)\rangle > 0$ para todo $x, \|x\| = 1$ pues $-1 \leq \langle x, f(x)\rangle < 1$ dado que $f(x) \neq x$ y $f(x) \in D^n$. Modifiquemos este campo para que en el borde sea justo el vector normal al borde. Sea

$$u(x) = x - \frac{1 - \langle x, x\rangle}{1 - \langle x, f(x)\rangle} f(x).$$

Es claro que $u(x) = x$ si $\|x\| = 1$. Por otra parte u es continuo, y además $u(x) \neq 0$ cualquiera sea x. De hecho, si $x = 0$ entonces $u(0) = -f(0) \neq 0$. Por otra parte si $x \neq 0$ y $u(x) = 0$ entonces necesariamente $f(x) = \lambda x$ lo que implicaría $\lambda = 1$ y $f(x) = x$. Luego, u es un campo no nulo en D^n tal que $u(x) = x$ is $\|x\| = 1$ (ver Figura 9.1). Sea $P_N : \mathbb{R}^n \to S^n$ la proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La formula explítica es

$$P_N(x) = \frac{1}{\langle x, x\rangle + 1}(2x_1, ..., 2x_n, \langle x, x\rangle - 1).$$

Es claro que P_N es diferenciable y además $P_N(D^n)$ es el hemisferio sur $H_S = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$ de S^n. Via el diferencial de P_N y el campo u en D^n obtenemos un campo w en H_S, i. e., $w(P_N(x)) = D_x(P_N).u(x)$. Este

designado como docente en Princeton aún antes de doctorarse. En 1954 obtiene su doctorado en Princeton, en 1962 obtiene la medalla Fields y en 2011 le fue otorgado el Premio Abel. Además de ser un genial y excelente matemático, es reconocido por la elegancia en la demostración de los teoremas es un campo no nulo en H_S y que en el ecuador $y = P_N(x)$ con $\|x\| = 1$ es $w(y) = (0, ..., 0, 1)$ por un cálculo directo.[2]

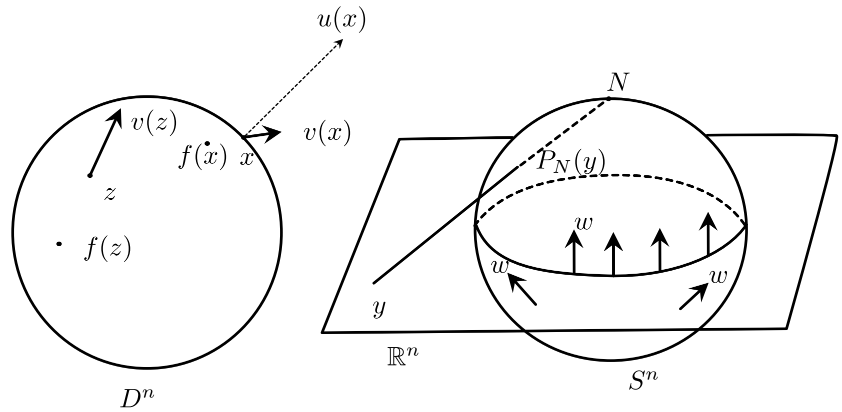


Figura 9.1:

Ahora, tomando la proyección estereográfica desde el polo sur P_S y considerando el campo $-u$ en D^n y proyectando, obtenemos un campo w en el hemisferio norte que en el ecuador también es el campo $(0, ..., 0, 1)$. Pegando estos dos campos, obtenemos un campo continuo en S^n sin singularidades, absurdo. Hemos demostrado el teorema en caso que n sea par.

Supongamos ahora que $n = 2k - 1$ es impar y que tenemos una función $f : D^n \to D^n$ continua sin puntos fijos. Pero entonces la función $F : D^{2k} \to D^{2k}$ dada por

$$F(x_1, ..., x_{2k}) = (f(x_1, ..., x_{2k-1}), 0)$$

es continua sin puntos fijos, contradiciendo lo visto anteriormente.

Probaremos ahora el Teorema 9.1.2 de la *esfera peluda*. Hay una dirección que es elemental. Sea $n = 2k - 1$ impar, entonces el campo $u : S^n \to \mathbb{R}^{2k}$

[2]Si prefiere no hacer cálculos, es claro que $w(y)$ tiene la dirección de $(0, ..., 0, 1)$ y dividiendo por la norma obtenemos un campounitario $\hat{w}$ en H_S tal que $\hat{w(y)} = (0, ..., 0, 1)$ en el ecuador.

definido por $u(x_1, x_2, ..., x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, ..., -x_{2k}, x_{2k-1})$ es un campo continuo sin singularidades. La otra dirección es mas delicada y utilizaremos métodos análiticos, en particular usaremos el Teorema 7.5.1 de aproximación de Stone-Weierstrass, que volvemos a enunciar aqui:

Teorema 9.1.3 (Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass)**.** *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces, el conjunto de los polinomios $P_K : K \to \mathbb{R}^m$ de los polinomios en n-variables restrictos a K es denso en $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^m)$.*

Corolario 9.1.1. *Existe un campo continuo tangente en S^n sin singularidades si y solamente si existe un campo diferenciable tangente en S^n sin singularidades.*

Demostración. Sea $u : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo continuo tangente sin singularidades y que podemos suponer unitario. Luego, existe $P : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\|P(x) - u(x)\| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in S^n$. El campo $v(x) = P(x) - \langle x, P(x)\rangle x$ es un campo diferenciable tangente en S^n. Basta ver que no tiene singularidades. Pero $\|v(x) - P(x)\| \leq \|P(x) - u(x)\| < \frac{1}{2}$ y por lo tanto $v(x) \neq 0$. $\square$

Veamos entonces que *si n es par, no existe un campo diferenciable no nulo tangente a S^n*. Precisamos de los dos lemas siguientes:

Lema 9.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ una región compacta y sea $v : A \to \mathbb{R}^n$ un campo diferenciable. Para cada t real consideremos $f_t : A \to \mathbb{R}^n$ dada por $f_t(x) = x + tv(x)$. Entonces, si t es suficientemente chico, f_t es inyectiva y transforma la región A en $f_t(A)$ cuyo volumen se expresa como un polinomio en t.*

Demostración. Como A es compacto y v es diferenciable, existe $c > 0$ tal que $\|v(x) - v(y)\| < c\|x - y\|$. Luego, si $|t| < 1/c$ $f_t(x) \neq f_t(y)$ si $x \neq y$ pues de los contrario $\|x - y\| = \|tv(x) - tv(y)\| < \|x - y\|$. Por otra parte $D_x f_t = I + tD_x v$ y por lo tanto su determinante es un polinomio en t de la forma $1 + \sigma_1(x)t + ... + \sigma_n(x)t^n$ para ciertas funciones $\sigma : A \to \mathbb{R}^n$ continuas. Pero entonces $vol(f_t(A)) = vol(A) + a_1 t + ... + a_n t^n$ donde $a_i = \int_A \sigma_i(x) dx_1 ... dx_n$. $\square$

Lema 9.1.2. *Sea $u : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ un campo unitario diferenciable tangente. Para $t \geq 0$ chico el mapa $f_t : S^n \to S^n_{\sqrt{1+t^2}}$ de la esfera unitaria en la esfera de radio $\sqrt{1+t^2}$ dado por $f_t(x) = x + tu(x)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Primero observemos que $\|f_t(x)\| = \sqrt{1+t^2}$ ya que x y $tu(x)$ son perpendiculares y por lo tanto $f_t(S^n) \subset S^n_{\sqrt{1+t^2}}$. Como f_t es diferenciable con diferencial no nulo si t es chico, por el teorema de función inversa tenemos que $f_t(S^n)$ es un conjunto abierto de $S^n_{\sqrt{1+t^2}}$. Por otro lado S^n es compacta y f_t continua, por conexión, concluimos que f_t es sobre. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar nuestro teorema. Sea n par y supongamos que existe $u : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ campo unitario diferenciable tangente a S^n. Consideremos la región $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : a \leq \|x\| \leq b\}$. Extendamos el campo u a todo A via $u(rx) = ru(x)$ y consideremos el mapa $f_t : A \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $f_t(x) = x + tu(x)$. Tenemos que $f_t(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{1+t^2}a \leq \|x\| \leq \sqrt{1+t^2}b\}$ y por lo tanto $vol(f_t(A)) = (\sqrt{1+t^2})^{n+1} vol(A)$ que, siendo n par, NO es un polinomio en t. Esto contradice el Lema 9.1.1.

9.2. El Teorema de la Invariancia del Dominio.

Hemos mencionado en la introducción el problema de la invariancia del dominio y hemos visto algunos casos particulares, por ejemplo que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$. En esta sección veremos el caso general. Usaremos métodos analíticos, hacerlo sólo con métodos topológicos excede el contenido de este libro.[3]:

Teorema 9.2.1 (Invariancia del dominio)**.** *Sea $1 \leq m < n$. Entonces, no existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva.*

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos:

Corolario 9.2.1. *R^n y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos si y solamente si $n = m$.*

Una (inmediata) generalización del curva de Peano, dice que si $m < n$ existe $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua y sobreyectiva. El siguiente lema muestro que esto no es posible si g es diferenciable.

Lema 9.2.1. *Sea $1 \leq m < n$ y $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Entonces $f(\mathbb{R}^m)$ tiene interior vacio en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Vamos a probar que si $x \in \mathbb{R}^m$ entonces existe un entorno U_x con $\overline{U_x}$ compacto tal que $f(\overline{U_x})$ tiene interior vacío. Una vez probado esto obtenemos el resultado ya que $\mathbb{R}^m = \cup_x U_x$ y por lo tanto podemos extraer un

[3]Esta prueba está inspirada del blog de Terence Tao, basado en un artículo de W. Kulpa [K].

subcubrimiento numerable U_k de modo que $f(\mathbb{R}^m) \subset \cup_n f(\overline{U_k})$ es union numerable de cerrados con interior vacío que, por el Teorema 8.0.1 de Baire, tiene interior vacío.

Probemos entonces la afirmación y sea $x \in \mathbb{R}^m$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $f(x) = 0$. Supongamos primeramente que $D_x f$ es inyectiva y sea $H = D_x f(\mathbb{R}^m)$ subespacio afín de dimensión m. Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to H$ la proyección ortogonal y sea $F : \mathbb{R}^m \to H$ definida por $F = \pi \circ f$. Observamos que $D_x F : \mathbb{R}^m \to H$ es un isomorfismo y por el teorema de la función inversa resulta entonces que F es difeomorfismo de un abierto $V_x \subset \mathbb{R}^m$ sobre un abierto W que contiene a 0 en H. Esto implica que $f(V_x)$ es un gráfico sobre H y por lo tanto tiene interior vacío en $\mathbb{R}^n$. Tomando U_x tal que $\overline{U_x} \subset V_x$ concluimos.

Si $D_x f$ no es inyectiva, la prueba es (sorprendentemente) mas delicada, por lo que haremos un argumento diferente (que sirve en cualquier caso)[4]. Sea U_x un entorno de x en $\mathbb{R}^m$ con clausura compacta (que podemos suponer es un cubo m-dimensional). Supongamos que $f(\overline{U_x})$ tiene interior y por lo tanto contiene una cierta bola cuyo volumen es A. Como f es de clase C^1 existe M tal que $\|D_y f\| \leq M$ para todo $y \in \overline{U_x}$. Sea δ tal que $\delta M^m vol_{\mathbb{R}^m}(\overline{U_x}) < A$. Por otro lado, para cada $y \in \overline{U_x}$ el mapa $g_y(h) = f(y+h) - f(y) - D_y h$ es de clase C^1 y su diferncial en 0 es nulo. Luego, dado ese $\delta > 0$, para cada y existe $\varepsilon(y) > 0$ tal que $\|D_h(g_y)\| < \delta$ si $\|h\| < \varepsilon(y)$. Como $\overline{U_x}$ es compacto y $\varepsilon(y)$ se puede elegir localmente uniformemente acotado por abajo, podemos elegir ε_0 tal que $\varepsilon_0 < \varepsilon(y)$ para todo y. Dividimos ahora $\overline{U_x}$ en una cantidad finita de cubos R_i de diámetro menor que ε_0. Para cada i elegimos $y_i \in R_i$. Ahora, $H = D_{y_i} f(\mathbb{R}^m)$ es un subespacio de a lo sumo dimensión m. Luego $D_{y_i}(R_i)$ tiene H-volumen acotado por $M^m vol_{\mathbb{R}^m}(R_i)$. Ahora, si $z \in R_i$ entonces, haciendo $h = z - y_i$ tenemos que $\|f(y_i + h) - f(y_i) - D_{y_i} f h\| \leq \delta \|h\|$. Pero entonces $f(R_i)$ está contenido en un paralelepípedo n-dimensional cuyo volumen está acotado por $\delta M^m vol_{\mathbb{R}^m}(R_i)$. Pero entonces, $f(\overline{U_x}) \subset \cup_i f(R_i)$ está contenido en una unión de paralelepípedos cuyo volumen n-dimensional está acotado por $\delta M^m \sum_i vol_{\mathbb{R}^m}(R_i) = \delta M^m vol_{\mathbb{R}^m}(\overline{U_x}) < A$ lo que es absurdo.

□

Sea $1 \leq m < n$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva. Sea $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ y sea $B = f(D^n)$. Es claro entonces que f es un homeomorfismo entre

[4]De hecho probaremos el resultado conocido como *mini-Sard*, que dice que $f(\mathbb{R}^m)$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

D^n y B (por la compacidad de D^n) y por lo tanto existe $G : B \to D^n$ continua con $G(f(x)) = x$.

Lema 9.2.2. *Sea $P : B \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $\|P(y) - G(y)\| \leq 1$ para todo $y \in B$. Luego, existe $z \in B$ tal que $P(z) = 0$.*

Demostración. Si tomamos $F : D^n \to \mathbb{R}^n$ por $F(x) = x - P(f(x)) = G(f(x)) - P(f(x))$ resulta que F es continua y $F(D^n) \subset D^n$ por lo que tiene un punto fijo x_0. Tomando $z = f(x_0)$ tenemos que $P(z) = 0$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 9.2.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva con $m < n$ y sea D^n, B y G como antes. Por el Teorema 9.1.3 podemos tomar un polinomio $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|P(y) - G(y)\| < 1/2$ si $y \in B$. Por el Lema 9.2.1, podemos suponer sin perdida de generalidad que $0 \notin P(\mathbb{R}^m)$ (en todo caso componiendo con una pequeña traslación). Pero esto contradice el Lema 9.2.2.

9.2.1. Una versión mas fuerte

De hecho, con las mismas ideas de la prueba anterior, podemos probar una versión más fuerte del Teorema de la Invariancia del Dominio.

Teorema 9.2.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva. Entonces f es abierta.*

Para probarlo basta probar que si $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ y $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva, entonces $f(0)$ es interior a $f(D^n)$. Como $f : D^n \to f(D^n)$ es un homeomorfismo (por ser D^n compacto) tiene una inversa $G : f(D^n) \to D^n$. Esta función puede extenderse (via el Teorema de Extensión de Tietze) a una función $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Supongamos por absurdo ahora que $f(0)$ no es interior a $f(D^n)$. Por la continuidad de G tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\|y - f(0)\| < 2\varepsilon$ entonces $\|G(y)\| \leq 1/10$. Por otra parte, como $f(0)$ no es interior a $f(D^n)$ existe un punto $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|c - f(0)\| < \varepsilon$ y $c \notin f(D^n)$. Componiendo con una traslación, podemos suponer que $c = 0$. Y por lo tanto $f(D^n)$ no contiene a 0 y $\|f(0)\| < \varepsilon$. Consideremos $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ donde $\Sigma_1 = \{y \in f(D^n) : \|y\| \geq \varepsilon\}$ y $\Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = \varepsilon\}$. Por construcción, $f(0)$ no pertenece a Σ.

El mapa $\phi : f(D^n) \to \Sigma$ definido por $\phi(y) = \max\{\frac{\varepsilon}{\|y\|}, 1\}y$ es continuo (ya que $0 \notin f(D^n)$). Observemos que si $y \in \Sigma_1$ entonces $\phi(y) = y$, y si $\|y\| < \varepsilon$

entonces $\phi(y) \in \Sigma_2$ pero no necesariamente $\phi(y) \in \Sigma_1 \subset f(D^n)$. Como G es continua y Σ_1 es compacto, tenemos que existe $\delta, 0 < \delta < 1/10$ tal que $\|G(y)\| > \delta$ si $y \in \Sigma_1$. Por el Teorema 9.1.3 existe un polinomio $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|P(y) - G(y)\| < \delta$ para todo $y \in \Sigma$.[5] Además, podemos suponer que $P(y) \neq 0$ para todo $y \in \Sigma_2$.[6]

Pero entonces, si consideramos $\tilde{G} : f(D^n) \to \mathbb{R}^n$ definida por $\tilde{G} = P \circ \phi$ resulta que $\tilde{G}$ es continua y su imagen no contiene a 0. Por otra parte $\|\tilde{G}(y) - G(y)\| < \delta$ si $y \in \Sigma$. Y si $\|y\| \leq \varepsilon$ entonces $\|G(y)\| < 1/10$ y $\|\tilde{G}(y)\| = \|P(\phi(y))\| < 1/10$ y por lo tanto $\|G(y) - \tilde{G}(y)\| \leq \|G(y)\| + \|G(\phi(y))\| + \|G(\phi(y)) - \tilde{G}(y)\| < 2/10 + \delta < 1$. Pero entonces $\tilde{G}$ está en las hipótesis del Lema 9.2.2 pero su imagen no contiene a 0. Absurdo.

[5] Recordar que G se extendió a todo $\mathbb{R}^n$ y esta estimativa vale aún si $y \notin f(D^n)$.

[6] Aquí debemos apelar a una versión del Lema 9.2.1, $P(\Sigma_2)$ tiene interior vacio si P es diferenciable por ser Σ_2 una esfera de dimensión menor que n. Como Σ_2 es una esfera de dimensión $n-1$ y $P : \Sigma_2 \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, cubrimos Σ_2 con una cantidad finita de entornos coordenados y por el Lema 9.2.1 cada imaagen por P de estos tiene interior vacío y por lo tanto $P(\Sigma_2)$ tiene interior vacío. Si fuera necesario, sumando una constante, resulta que $0 \notin P(\Sigma_2)$.

Capítulo 10

Clasificación de Superficies

En este capítulo veremos el famoso resultado de clasificación de superficies. Este resultado no acostumbra a verse en cursos iniciales de topología pero lo incluimos de forma complementaria. La prueba que veremos es bastante elemental, además de elegante y donde se comprende cabalmente la profundidad del tema. Se basa en una notas de E. C. Zeeman [Z] de la década del 60.

Antes de enunciar y probar el resultado de clasificación haremos un repaso de superficies, ejemplos, y el alcance de nuestra clasificación.

10.1. Superficies

Ya hemos hablado de superficies y variedades en la sección 6.5. Una superficie entonces es un espacio topológico Hausdorff con base numerable en que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un disco de $\mathbb{R}^2$. Supondremos además las superficies *compactas y conexas.* Hemos visto varios ejemplos de superficies, a saber: la esfera, el toro, el espacio proyectivo, la botella de Klein. La esfera y el toro se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, pero el espacio proyectivo y la botella de Klein no se pueden visualizar en $\mathbb{R}^3$ sin autointersección.

En la Figura 10.1 vemos otros ejemplos de superficies. Hagamos aquí una aclaración importante: si bien es útil e intuitivo visualizar una superficie en $\mathbb{R}^3$, en la prueba de clasificación no haremos uso de esto, sino que sólo haremos uso de las propiedades *intrínsecas* de la superficie y no apelaremos a como podría

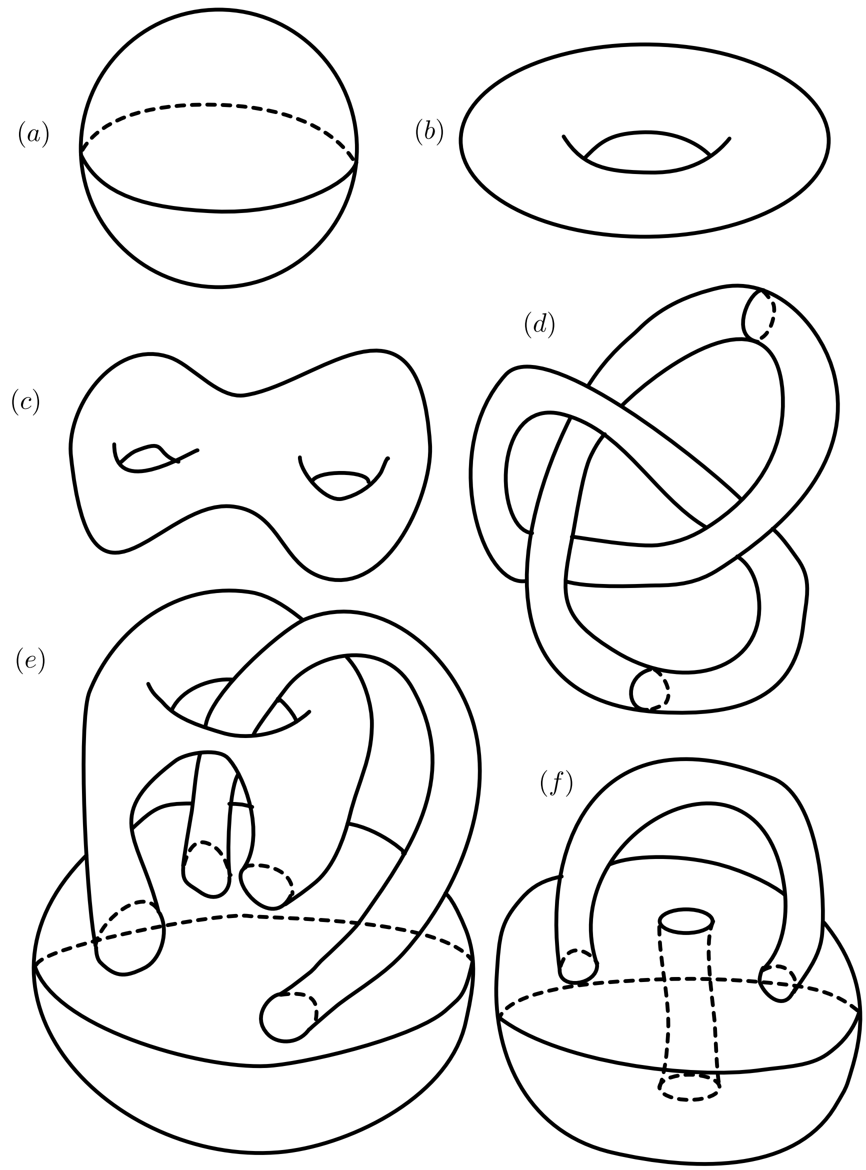


Figura 10.1: (a) Esfera, (b) Toro, (c) Bitoro, (d) Toro “anudado”, (e) Tritoro, (f) Bitoro. Ver que (b) y (d) son homeomorfos, (c) y (f) también.

estar encajada en el espacio ambiente.

Diremos que una superficie es *orientable* si NO contiene una banda de Möbius, en caso contrario diremos que es no orientable. Así, el espacio proyectivo y la botella de Klein no son orientables. A veces se dice que la superficies no orientables tiene *una sola* cara. Eso lo vemos por ejemplo en la banda de Möbius. Sin embargo, eso tiene sentido solo cuando las encajamos en $\mathbb{R}^3$, cosa que no es posible para una superficie compacta no orientable. Cuando las encajamos en dimensiones mayores, esto deja de tener sentido, de la misma forma que si bien una curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2$ tiene un interior y un exterior, esto deja de tener sentido para una curva en $\mathbb{R}^3$.

10.1.1. Superficie estándar de género g.

En la sección 5.2 hemos visto como pegar (o adjuntar o coser) espacios topológicos para obtener otro. Por ejemplo vimos que al unir de dos discos por

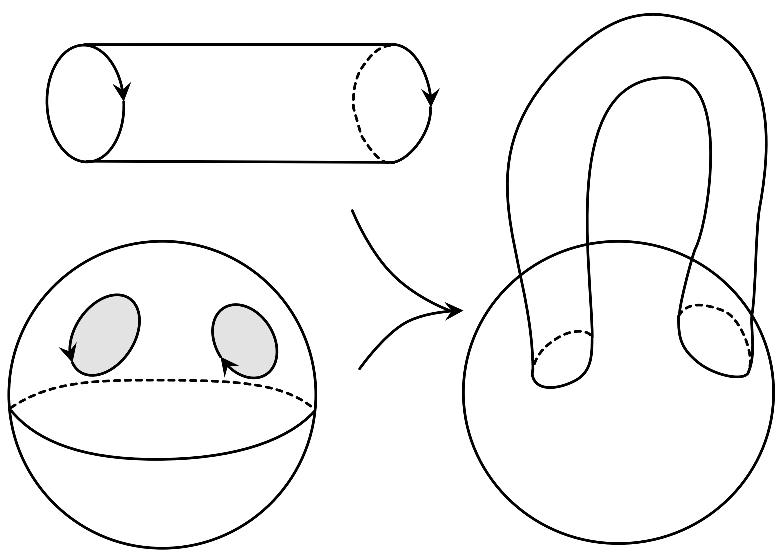


Figura 10.2: Pegado de una esfera menos dos discos con un cilindro: esfera con asa o toro.

el borde obtenemos la esfera. Supongamos ahora que tenemos la esfera a la que removemos dos discos disjuntos y orientamos los bordes de los discos de forma opuesta (es decir, el interior de uno queda a la izquierda y el interior del otro queda a la derecha) y tomemos por otro lado un cilindro cuyos bordes tienen la misma orientación (ver Figura 10.2). Si ahora pegamos el cilindro con la esfera menos los dos discos pegando o cosiendo los bordes siguiendo la orientación obtenemos el *toro* que también llamaremos *una esfera con una asa* o la *superficie estándar de género uno*. Observar que si los bordes de los discos que removimos de la esfera los hubiéramos orientado de la misma forma y le adjuntamos un cilindro hubiéramos obtenido la botella de Klein.

Supongamos ahora que a la esfera le removemos $2g$ discos disjuntos con orientaciones opuestas de a pares. Si le adjuntos ahora g cilindros obtenemos una *esfera con g asas* o la *superficie estándar de género g* y que denotaremos por Σ_g.

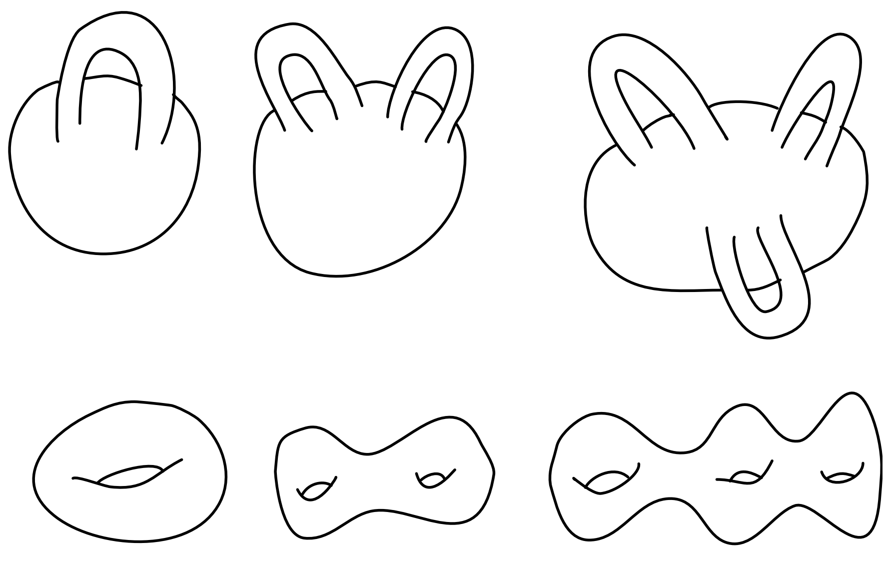


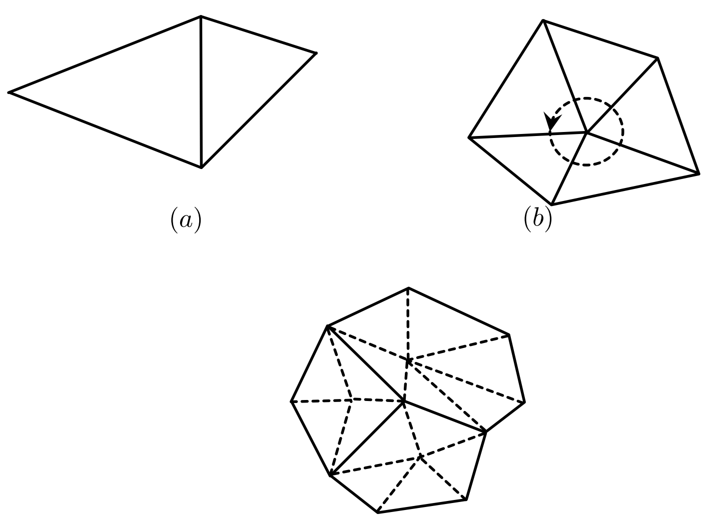
Figura 10.3: Dos formas de ver la superficie estándar Σ_g de género $g = 1, 2, 3$.

10.1.2. Triangulación

Triangular una superficie significa dividir la superficie en triángulos, de forma que la superficie es union de triángulos con sus correspondientes vértices (v) , lados (l) y caras (c) con las siguientes propiedades:

- Cada lado es un lado de exactamente dos triángulos
- Cada vértice es vértice de al menos tres triángulos y todos los triángulos que tiene un vértice en común forman un ciclo y forman un entorno del vértice en común.

Otra forma de expresarlo es que una triangulación consiste una grafo finito de una superficie consistente en vértices (v) y lados (l) uniendo vértices de forma que una componente conexa del complemento (caras c) es homeomorfa a un disco y tiene en su frontera exactamente tres vértices y tres lados. Podríamos dividir



(a) (b)

(c)

Figura 10.4: (a) y(b): propiedades de una triangulación. (c) Vértice y lados punteados transforman “triangulación”por polígonos en triángulos.

la superficie también en polígonos (con las mismas propiedades anteriormente mencionadas), pero fácilmente podemos transformarlo en una triangulación agregando un vértice al interior de cada polígono y lados uniendo este vértice con todos los del polígono (ver Figura 10.4). De la misma forma dada una triangulación podemos ir dividiendo los triángulos de forma que al final obtenemos una triangulación con triángulos diminutos.

Parece intuitivo que toda superficie es triangulable. En la Figura 10.5 vemos algunos ejemplos de triangulaciones. Sin embargo esto requiere una prueba que está fuera de nuestro alcance y asumiremos que podemos triangular cada superficie. Para una prueba de esto ver [GX].

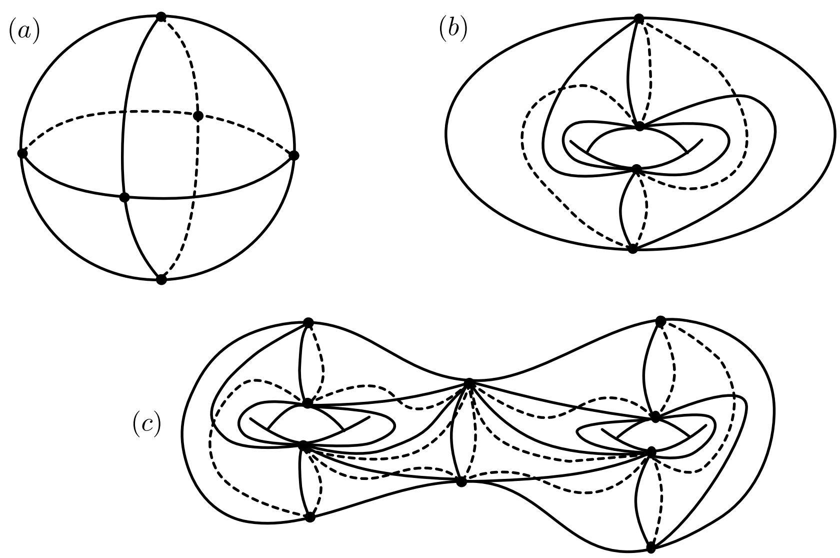


Figura 10.5: (a) Triangulación de la esfera con $v = 6, l = 12, c = 8$
(b): Triangulación del toro con $v = 4, l = 12, c = 8$.
(c) Triangulación del bitoro con $v = 10, l = 36, c = 24$

,

10.1.3. La cárateristica de Euler

Sea S una superficie y tomemos una triangulación. Definimos la Característica de Euler de la superficie como

$$\chi(S) = \#v - \#l + \#c$$

es decir, realizamos la cuenta número de vértices menos número de lados más número de caras. La Característica de Euler no depende de la triangulación y es un invariante topológico. La demostración de esto requiere de forma sustancial Topología Algebraica y esta fuera del alcance de este curso. [1]

Podemos observar (ver Figura 10.5) que:

- $\chi(\text{esfera}) = 2$
- $\chi(\text{Toro}) = 0$
- $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

10.2. El teorema de clasificación

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Teorema de Clasificación de Superficies basándonos en resultados auxiliares que demostraremos en la Sección 10.4:

Teorema 10.2.1. *Sea S una superficie compacta, conexa, orientable y triangulable. Entonces S es homeomorfa a Σ_g para algún $g \geq 0$.*[2]

El primer resultado auxiliar que utilizaremos nos da una cota para la Característica de Euler de una superficie:

Lema 10.2.1. *Sea S una superficie compacta conexa y triangulable. Entonces $\chi(S) \leq 2$.*

Para el segundo resultado auxiliar precisamos una definición. Decimos que una superficie compacta conexa y triangulada es de *tipo esférico* si toda curva simple cerrada (que consiste en vértices y lados de la triangulación) separa la superficie, es decir el complemento de la curva tiene (al menos) dos componentes conexas. El famoso Teorema de Jordan nos dice que la esfera es de tipo esférico. Claramente el toro (o cualquier $\Sigma_g, g \geq 1$) NO es de tipo esférico.

---

[1] Es fácil ver que si uno refina una triangulación la Característica de Euler no cambia. Una forma de probar que la $\chi(S)$ no depende de la triangulación podría ser que dos triángulaciones diferentes tienen refinamientos "equivalentes". Este problema propuesto a principios de siglo XX es conocido como el *Hauptvermutung* o la conjetura principal de topología combinatoria. Es cierto para superficies, pero falso en general. Ver [Haupt].

[2] Para una versión completa del Teorema de Clasificiación, así como varias pruebas basadas en Topología Algebraica y una introducción histórica al tema consultar [GX].

Teorema 10.2.2. *Sea S una superficie. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

1. *S es de tipo esférico*
2. *$\chi(S) = 2$.*
3. *S es homeomorfa a la esfera.*

Entonces

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).^3$$

Usando estos resultados probemos el Teorema de Clasificación:

Demostración del Teorema 10.2.1: . Sea S una superficie compacta conexa y orientable. Escojamos una triangulación de S. Por el Lema 10.2.1 sabemos que $\chi(S) \leq 2$. Por el Teorema 10.2.2 sabemos que si $\chi(S) = 2$ entonces S es homeomorfa a la esfera.

Supongamos entonces que $\chi(S) < 2$. Por el Teorema 10.2.2 concluimos que S no es de tipo esférico. Por lo tanto existe una curva simple cerrada $\mathcal{C}$ (formada por vértices y lados de la triangulación) que no separa la superficie S. Consideremos un entorno de $\mathcal{C}$ consistente en una fina banda. Hay dos posibilidades para esta banda: o es un cilindro o es una banda de Möbius. Como S es orientable, concluimos que esta banda es un cilindro.

Ahora realizamos una cirugía en la superficie para formar otra superficie S_1 de la siguiente forma: orientamos $\mathcal{C}$ y cortamos la superficie S a lo largo de $\mathcal{C}$ y obtenemos una superficie con borde cuyo borde consiste en dos curvas cerradas simples a las que les cosemos un disco a cada una, obteniendo una superficie compacta S_1 y orientable. Es importante preservar la orientación original, y vemos que las curvas tienen orientaciones opuestas (un disco está a la izquierda de la curva, el otro a la derecha), ver Figura 10.6.

Afirmamos que $\chi(S_1) = \chi(S) + 2$. Podemos tomar una triangulación de S_1 consistente en la triangulación de S y en cada disco adjuntado ponemos un vértice que unimos a cada vértice de $\mathcal{C}$. Observar que $\mathcal{C}$ tiene la misma cantidad de vértices y lados, pongámosle k. Como en S_1 duplicamos $\mathcal{C}$ también agregamos k vértices y k lados, y en cada disco agregamos 1 vértice, k lados y k caras. Así:

[3] Usando el Teorema de Jordan se sigue que las tres afirmaciones son equivalentes.

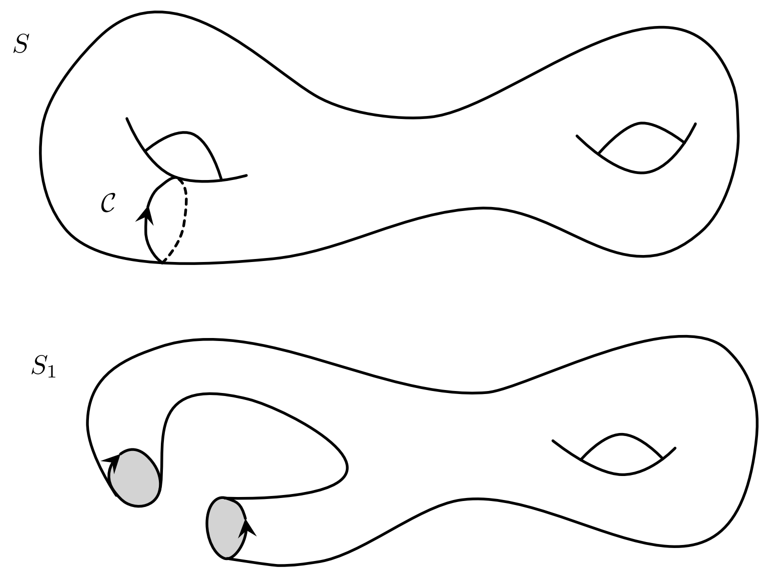


Figura 10.6: Cirugía: cortamos S por $\mathcal{C}$ y pegamos dos discos para obtener S_1.

$$\chi(S_1) = \chi(S) + k - k + 2(1 - k + k) = \chi(S) + 2.$$

Podemos proceder entonces inductivamente: o $\chi(S_1) = 2$ y S_1 es homeomorfo a la esfera o $\chi(S_1) < 2$ y podemos operar de la misma forma para obtener una superficie S_2 con $\chi(S_2) = \chi(S_1) + 2$. Así sucesivamente hasta que este proceso termina un un número finito de pasos g por el Lema 10.2.1, obteniendo $S_1, S_2, ..., S_g$ donde necesariamente $\chi(S_g) = 2$ (de lo contrario, si $\chi(S_g) = 1$ concluiríamos que S_g no es orientable).

La superficie S_g viene con discos que fuimos agregando en cada cirugía. Podemos suponer que todos esos discos son disjuntos mediante el siguiente truco. La única forma que estos no sean disjuntos sería que una curva correspondiente a una cirugía atravesara un disco agregado en una cirugía anterior. El truco entonces es que encoger el disco al interior de uno de los triángulos de la triangulación (ver Figura 10.7). De esta forma nos aseguramos que cualquier curva de una cirugía posterior no va a tocar el disco agregado.

Concluimos que S_g tiene $2g$ discos disjuntos cuyos bordes tienen orientación

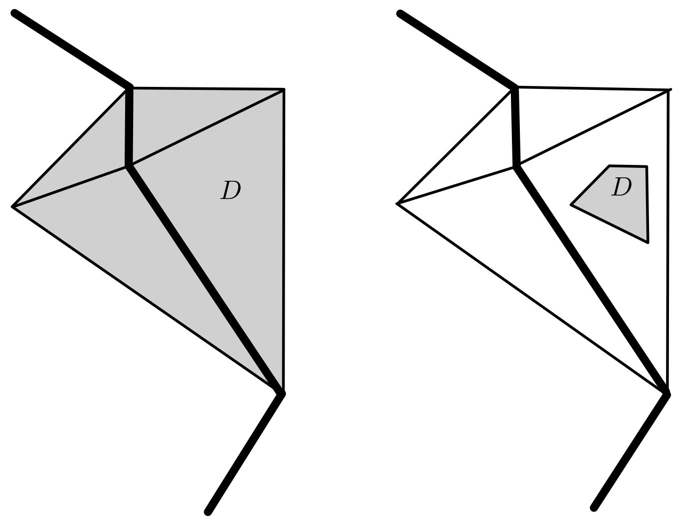


Figura 10.7:

contraria de a pares. Ahora realizamos una cirugía inversa: suprimimos cada par de discos con borde de orientación opuesta y los pegamos, lo que corresponde a adjuntar g asas a una esfera, obteniendo así la superficie estándar Σ_g de género g. Claramente S y Σ_g son homeomorfas, puesto que lo único que hicimos es en definitiva cortar S por g curvas disjuntas sin separar S obteniendo una esfera menos $2g$ discos y volver a pegarlas de la misma forma obteniendo Σ_g. $\square$

10.3. Grafos y Árboles

En esta sección veremos algunos preliminares para demostrar el Lema 10.2.1 y Teorema 10.2.2. Un *grafo* es un subconjunto conexo de vértices y lados de una triangulación y tal que si un lado está en el grafo también están sus respectivos vértices. Si un grafo NO contiene un lazo diremos que es un *árbol* (ver Figura 10.8).

Lema 10.3.1. *Un árbol siempre contiene un vértice extremal, es decir, un vértice que pertenece a un solo lado.*

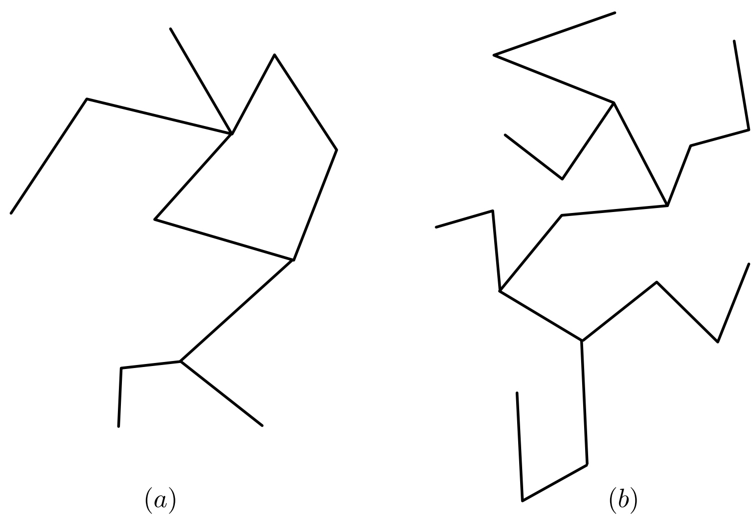


Figura 10.8: (a): un grafo que contiene un lazo. (b): un árbol.

Demostración. Razonando por absurdo, supongamos que esto no es así. Tomemos un vértice cualquiera. Podemos entonces formar un camino en el grafo en que cada lado es seguido por un lado diferente. Pero si seguimos un camino de este forma con más pasos que vértices necesariamente hemos pasado por un lazo, lo que es absurdo. □

Si un grafo G tiene v vértices y l lados, definimos su característica de Euler como $\chi(G) = v - l$.

Lema 10.3.2. *Sea T un árbol. Entonces $\chi(T) = 1$.*

Demostración. Probemos este lema por inducción en el número de lados. Si $l = 0$ tenemos un solo vértice y claramente $\chi(T) = 1$. Tomemos $l \geq 1$ y supongamos ahora que el resultado vale para un árbol con $l - 1$ lados. Tomemos entonces un árbol con l lados y consideremos un vértice extremal (que existe por el lema anterior). Este vértice pertenece a un solo lado. Por tanto si quitamos del árbol el vértice extremal y el lado que lo contiene, tenemos un árbol T_1 con $l-1$ lados. Entonces $\chi(T) = \chi(T_1) + 1 - 1 = 1$ por inducción. □

Lema 10.3.3. *Sea G un grafo que contiene un lazo. Entonces $\chi(G) < 1$.*

Demostración. Como G contiene un lazo, podemos quitar un lado y obtener aún un grafo G_1. Claramente $\chi(G) = \chi(G_1) - 1$. Si el grafo G_1 no tiene un lazo, entonces tenemos $\chi(G) = \chi(G_1) - 1 < 1$ por el lema anterior. Si G_1 contiene un lazo, procedemos de la misma forma hasta obtener un árbol. Es decir, quitamos $r \geq 1$ lados de G hasta obtener un árbol G_r . Luego $\chi(G) = \chi(G_r) - r < 1$. □

10.3.1. Triangulación dual

Sea S una superficie en donde tenemos una triangulación de S. La *triangulación dual* es definida como sigue:

1. En cada triángulo X de la triangulación de S elegimos un punto interior x que llamaremos *vertice dual* de X.

2. Si dos triángulos X, Y de la triangulación de S tienen un lado en común L, unimos los vértices duales x e y para formal un *lado dual* xy. El lado dual xy interseca solamente al lado L y en una única vez (ver Figura 10.9).

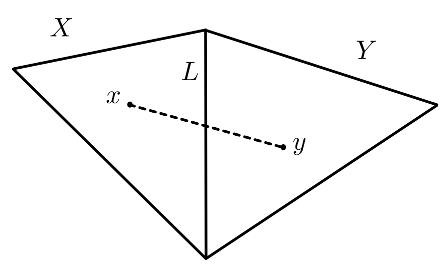


Figura 10.9:

3. El conjunto de vértices duales y lados duales forman el esqueleto de la triangulación dual.

En la Figura 10.10 vemos una porción de una triangulación y la triangulación dual en lineas punteadas. Observar que la triangulación dual no está (necesariamente) formada por triángulos sino por polígonos.

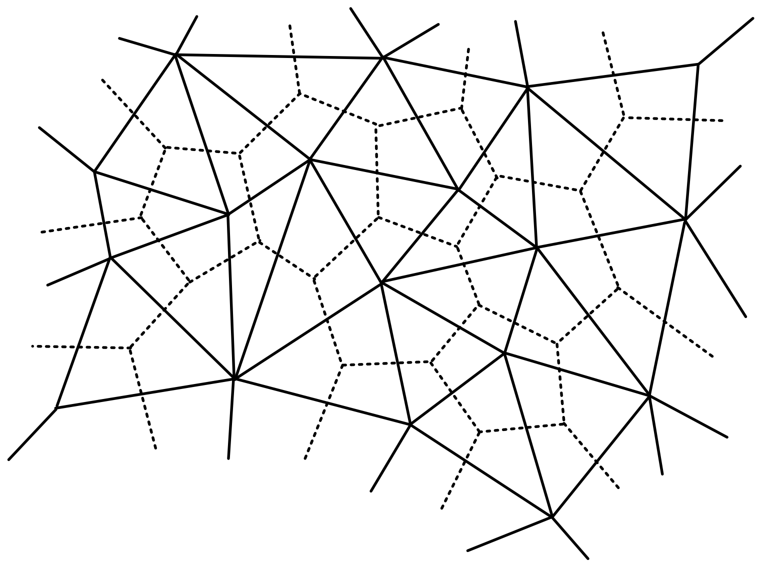


Figura 10.10: Una triangulación y su triangulación dual en linea punteada

Un árbol consistente en vértices duales y lados duales es llamado un *árbol dual*. Si T es una árbol dual, su complemento K está definido como el conjunto de vértices, lados y triángulos de la triangulación de S que no intersecan a T.

Lema 10.3.4. *Sea T un árbol dual. Entonces, su complemento K es conexo.*

Demostración. Observemos que K contiene todos los vértices de la triangulación. Por lo tanto, para ver que K es conexo basta ver que cualquier para de vértices pueden ser unido por lados contenidos en K. Razonemos por inducción en el numero n de lados duales de T. Si $n = 0$ entonces T consiste en un solo vértice dual y por lo tanto K contiene todos los lados de la triangulación de S y por lo tanto es conexo. Supongamos entonces que el resultado es válido para un árbol dual con $n - 1$ lados duales.

Sea T un árbol dual con n lados duales. Por Lema 10.3.1 sabemos que T tiene un vértice dual extremal que llamaremos x y llamémosle X al triángulo de la triangulación que contiene a x. Sea xy el lado dual de T que contiene a x, y sea Y el triángulo que contiene al vértice dual y. Sean a, b, c los vértices del triángulo X (ver Figura 10.11). Sea T_1 el árbol dual que consiste en eliminar el

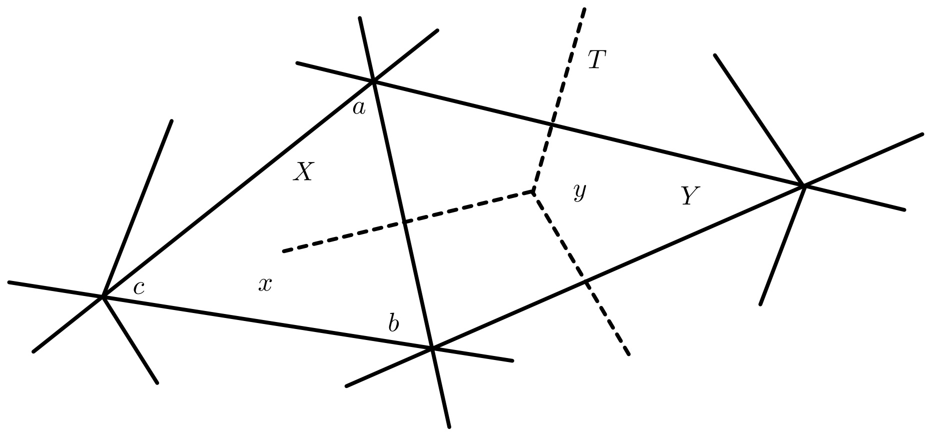


Figura 10.11:

vértice dual x y el lado dual xy. Claramente T_1 es un árbol dual con $n-1$ lados duales. Por lo tanto K_1, el complemento de T_1, es conexo y cualquier par de vértices de la triangulación puede ser conectado por un camino de lados en K_1. Pero K se obtiene de K_1 suprimiendo X y el lado ab que corta al lado dual xy. Pero entonces K es conexo puesto que cualquier camino en K_1 que contenga el lado ab puede substituirse por un camino en K que contenga los lados ac y bc. □

Ahora presentamos el último resultado de esta sección. Dada un triangulación y la triangulación dual, decimos que un árbol dual es *maximal* si no está contenido estrictamente en ningún otro árbol dual. Claramente existen árboles duales maximales.

Lema 10.3.5. *Sea T un árbol dual maximal. Entonces T contiene todos los vértices duales.*

Demostración. Supongamos que existe un vértice dual x que no está en T. Tomemos un camino α que comience en x y termine en un punto de T, y que no pase por ningún vértice. Sea p el primer punto de α que pertenece a un triángulo Y cuyo vértice dual y está en T. Como α no pasa por ningún vértice resulta que p pertenece a algún lado l_Y de Y. Sea Z el otro triángulo de la triangulación que contiene al lado l_Y (ver Figura 10.12). Claramente el vértice dual z de Z no pertenece a T por como construimos p. Sea T_1 el grafo que consiste agregar a T el vértice dual z y el lado dual zy. Resulta que T_1 es un árbol, puesto que al agregar z y zy no es posible crear un lazo. Pero entonces T_1 es un árbol dual que contiene estrictamente a T, por lo que T no es maximal, lo que es una contradicción. $\square$

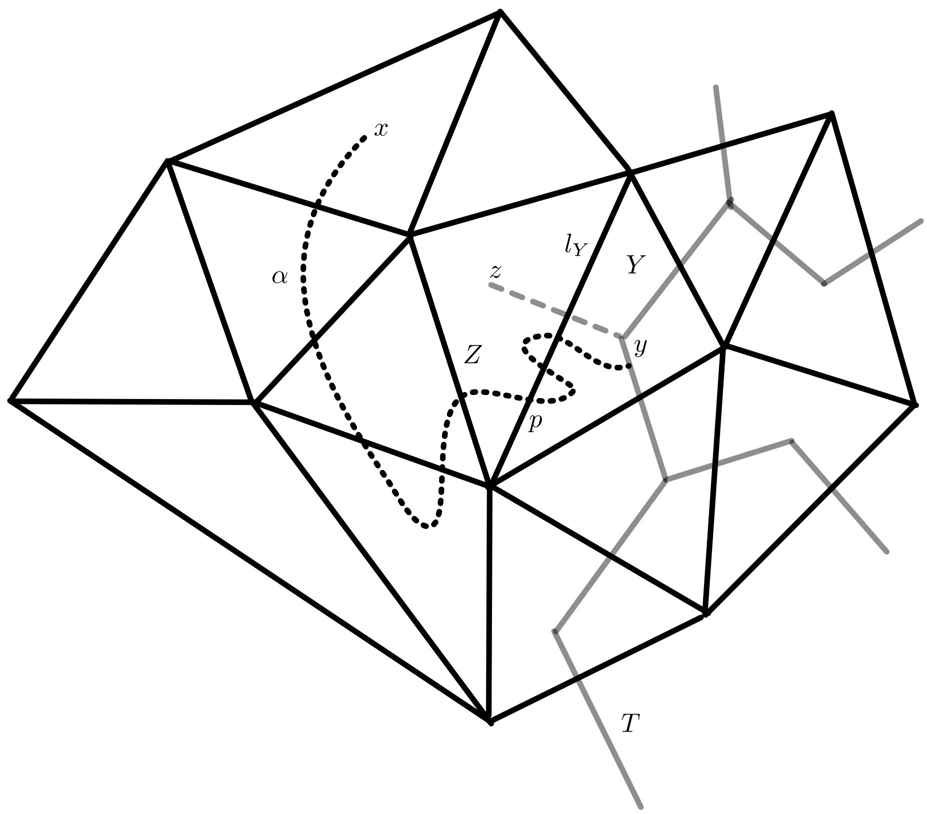


Figura 10.12:

10.4. Prueba del Lema 10.2.1 y Teorema 10.2.2

Ahora estamos en condiciones de terminar la prueba del Teorema de Clasificación probando los resultados auxiliares que enunciamos en la Sección 10.2.

Demostración del Lema 10.2.1: Debemos probar que si S es una superficie (compacta, orientable, triangulable) entonces $\chi(S) \leq 2$. Consideremos una triangulación $\mathcal{T}$ de S. Sea T un árbol dual maximal y sea G su complemento. Por el Lema 10.3.5 sabemos que T contiene todos los vértices duales. Por otro lado G

no contiene ningún triangulo de $\mathcal{T}$ y por lo tanto consiste solamente de vértices y lados de $\mathcal{T}$. Además, por el Lema 10.3.4, tenemos que G es conexo. Por lo tanto, G es un grafo.

Sean v, l, c el número de vértices, lados y caras respectivamente de la triangulación $\mathcal{T}$. Notemos también por v_G, l_G el número de vértices y lados del grafo G y por v_T, l_T el de los vértices duales y lados duales del árbol dual T. Observemos que:

$$v = v_G, \;\; l = l_G + l_T \,, \;\; \text{y} \;\; c = v_T.$$

Pero entonces

$$\chi(S) = v - l + c = v_G - l_G + (v_T - l_T) = \chi(G) + \chi(T) \leq 1 + 1 \tag{10.1}$$

donde en la última desigualdad utliizamos los Lemas 10.3.2 y 10.3.3. □

Finalmente, para terminar el Teorema de Clasificación, hagamos la:

Demostración del Teorema 10.2.2: Recordemos que tenemos que probar los siguente, siendo S una superficie compacta, conexa, orientable y triangulable:

$$S \text{ es de tipo esférico} \Rightarrow \chi(S) = 2 \Rightarrow S\text{es homeomorfa a la esfera}$$

Probemos primero que S *es de tipo esférico implica que* $\chi(S) = 2$. Consideremos una triangulación de S. Supongamos por absurdo que S de tipo esférico tiene $\chi(S) < 2$. Sea T una árbol dual maximal y sea G su complemento (que como vimos en la demostración anterior, es un grafo). Ahora, por (10.1), tenemos que

$$\chi(G) = \chi(S) - \chi(T) = \chi(S) - 1 < 1.$$

Concluimos que G no es un árbol y por lo tanto contiene un lazo $\mathcal{C}$. Como S es de tipo esférico resulta que $\mathcal{C}$ separa S y en cada componente hay un triángulo de la triangulación y por lo tanto contiene un vértice dual. Pero T es un árbol dual maximal (y por lo tanto conexo) que contiene todos los vértices duales. Pero entonces T interseca a $\mathcal{C}$ y por lo tanto a G lo que es absurdo.

Ahora probemos que $\chi(S) = 2$ *implica que* S *es homeomorfa a la esfera:* La idea es mostrar que S es union de dos discos pegados por el borde, que sabemos es homeomorfo a la esfera. Tomemos nuevamente una triangualción de S, un árbol dual maximal T y su complemento G que sabemos que es un grafo. Pero además, como vimos que $\chi(G) = \chi(S) - \chi(T)$ resulta que $\chi(G) = 1$ y por lo tanto G es un árbol.

Claramente un entorno *tubular* de un árbol es homeomorfo a un disco. Por ejemplo, si T es un árbol en el plano, entonces $\{x : dist(x, T) \leq \varepsilon\}$ con ε suficientemente chico es homeomorfo a un disco cerrado. Otra forma de verlo es que T se puede deformar a un punto retrayendo un lado cada vez (ver Figura 10.13), tomar un disco entorno del punto y luego hacer el proceso inverso, expandiéndolo hasta obtener el árbol T.

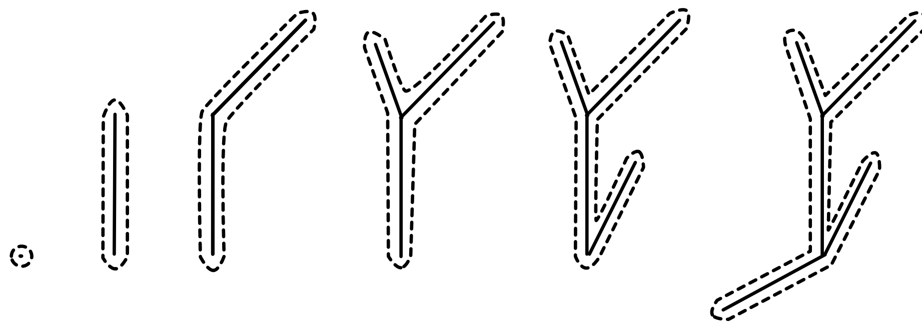


Figura 10.13: Entorno tubular de un árbol partiendo de un disco

Supongamos ahora que tenemos métrica d en S compatible con la topología de S. Un modelo de esto es usar la triangulación y pensar que cada triángulo es plano, cada lado es recto y la intersección de lados duales con cada triángulo también es recto. Denotemos por $\mathcal{T}$ la triangulación de S y por X los triángulos de $\mathcal{T}$. Consideremos pues

$$N(T) = \bigcup_{X \in \mathcal{T}} \{x \in X : d(x, T \cap X) \leq d(x, G \cap X)\}$$

$$N(G) = \bigcup_{X \in \mathcal{T}} \{x \in X : d(x, G \cap X) \leq d(x, T \cap X)\}.$$

Veremos que $N(T)$ y $N(G)$ son entornos cerrados de T y G respectivamente que son homeomorfos a discos cerrados y por lo tanto S es unión de $N(G)$ y $N(T)$ pegados por el borde concluyendo que S es homeomorfa a la esfera.

En la Figura 10.14 vemos las posibles intersecciones de $N(T)$ y $N(G)$ con cada triángulo de la triangulación en el modelo plano, así como respectivos entornos tubulares de T y G. Podemos observar que en cada triángulo X la intersección de $N(T) \cap X$ se puede retraer al entorno tubular de T intersecado

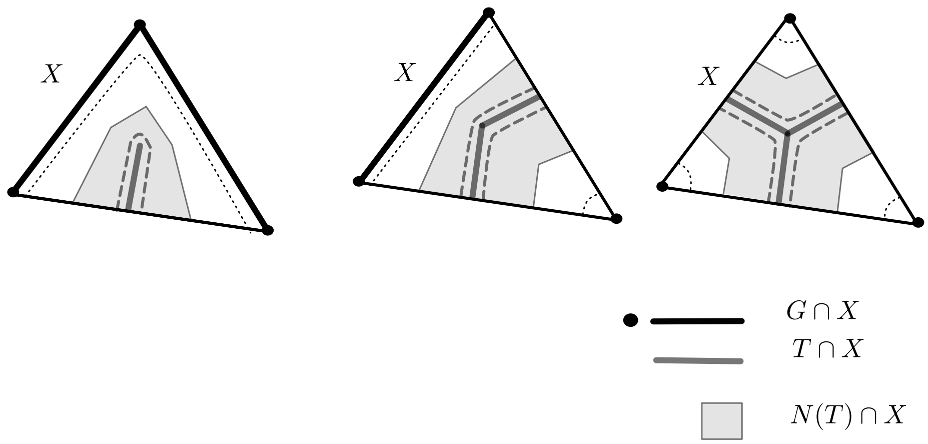


Figura 10.14: Las tres posibles formas de $N(T)$ (en gris) y $N(G)$ (en blanco) en cada triángulo X de la triangulación. La linea punteada gruesa es el borde de un entorno tubular de T intersecado con X. La linea punteada fina es el borde de un entorno tubular de G intersecado con X.

con el mismo triángulo X, análogamente con $N(G)$. Retrayendo en todos los triángulos a la vez, nos queda que $N(T)$ y $N(G)$ son homeomorfos a entornos tubulares cerrados de T y G respectivamente. Por lo tanto $N(T)$ y $N(G)$ son homeomorfos a discos cerrados.

$\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[A] Louis Antoine, Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, *J. Math. Pures Appl.* **86**, 221-325, 1921

[B] E. T. Bell, Men of Mathematics, Touchstone (Simon and Schuster paperback) (Reprint), 1986. ISBN 0671628186 LCCN 86-10229

[Br1] Brouwer, L. E. J. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. (German) *Math. Ann.* **70** (1911), no. 2, 161-165.

[Br2] Brouwer, L. E. J. Zur Analysis Situs. (German) *Math. Ann.* **68** (1910), no. 3, 422-434.

[BD] B.Brosowsky, F. Deutsch, An elementary proof of the Stone Weierstrass Theorem, *PAMS*, **81**(1) 1981, 89-92.

[C] Crilly, Tony The emergence of topological dimension theory. With the assistance of Dale Johnson. History of topology, 1-24, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[D1] J. W. Dauben, The battle for Cantorian Set Theory. *Mathematics and the historian's craft*, 221-241, CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC, 21, Springer, New York, 2005.

[D2] Dauben, Joseph W. The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology. Historia Math. 2 (1975), 273-288.

[GX] J. Gallier and D. Xu, A guide to the classification theorem for compact surfaces, Geometry and Computing, 9, Springer, Heidelberg, 2013.

[Haupt] Ranicki, A. A. (4-EDIN-MS); Casson, A. J. (1-CA); Sullivan, D. P. (1-CUNY); Armstrong, M. A. (4-DRHM); Rourke, C. P. (4-WARW-MI); Cooke, G. E. The Hauptvermutung book. A collection of papers of the topology of manifolds. K-Monographs in Mathematics, 1. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. vi+190 pp. ISBN: 0-7923-4174-0

[HY] Hocking, John G.; Young, Gail S. Topology. Second edition. Dover Publications, Inc., New York, 1988. x+374 pp. ISBN: 0-486-65676-4

[K] W. Kulpa; Poincaré and domain invariance theorem. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.* **39** (1998), no. 1-2, 127-136.

[M] J. Munkres, *Topology*, Munkres, James R. Topology: a first course. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. xvi+413 pp

[Mil] J. Milnor, Analytic proofs of “Hairy Ball Theorem” and Brouwer Fixed Point Theorem.

[Z] E. C. Zeeman, Introduction to topology, unpublished notes (Warwick, 1966); http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/surgery/ecztop.pdf.