Matemática Discreta

Emiliano Sequeira

La primer versión de estas notas fue escrita durante el primer semestre de 2020 como material de consulta para el curso *Matemática Discreta* de la Licenciatura en Matemática, dictado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República. La versión actual es el resultado de una revisión posterior.

Se buscó que las notas fueran autocontenidas. Los ejemplos y observaciones que requieren conocimiento extra o escapan a los objetivos de las notas fueron colocados en los apéndices de cada capítulo.

Agradezco a Leandro Bentancur, quien me acompañó en el dictado del curso, por revisar con atención las notas en su primera versión y colaborar en la corrección de algunos errores.

Emiliano Sequeira

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos y Funciones

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) de las cuales se deducen todos los teoremas. En estas notas trabajaremos de manera un poco informal sin especificar los axiomas. Así, por ejemplo, mostraremos construcciones de ciertos conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría. Para un seguimiento más profundo de estos temas recomendamos por ejemplo la lectura de [H].

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos que poseen una propiedad en común. A estos objetos los llamaremos **elementos**. Escribiremos $x \in X$ para indicar que x **pertenece** a X.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si tienen los mismos elementos. Esto nos dice que para definir un conjunto debemos, en principio, decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto enumerándolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad determinada. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión** o **especificación**.

Ejemplos 1.0.1. Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto A está **contenido** o **incluido** en otro conjunto B si para todo $x \in A$ se tiene $x \in B$. También diremos en este caso que A es **subconjunto** de

B o que B **contiene** a A y lo escribiremos $A \subset B$. Observar que $A = B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$. También escribiremos $A \not\subset B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está incluido en B pero estos conjuntos no son iguales.

Ejemplo 1.0.2. Definimos los siguientes conjuntos:

> V_U es el conjunto de todos los seres vivos del Universo.
>
> V_T es el conjunto de todos los seres vivos de la Tierra.
>
> A es el conjunto de todos los animales.
>
> P es el conjunto de todos los perros.

Según nuestro conocimiento podemos escribir: $P \subsetneq A \subsetneq V_T \subset V_U$.

El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es un conjunto que no tiene elementos. Observar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset X$.

1.1. Operaciones entre conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a A y B, es decir que si otro conjunto C cumple $A \subset C$ y a $B \subset C$, entonces $A \cup B \subset C$.

A partir de la definición dada es claro que el conjunto vacío actúa como neutro de la unión, es decir que para todo conjunto A se tiene $A \cup \emptyset = A$.

Proposición 1.1.1. *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demostración. Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y solo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.

De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y solo si se cumple (1), (2) o (3). □

Observar que la Proposición 1.1.1 permite dar una definición para la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$ (es decir, $\mathcal{C}$ es un conjunto cuyos elementos son otros conjuntos). Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} = \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C},$$

donde $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos (esto quiere decir que para cada $i \in I$ se tiene un conjunto A_i, más tarde se dará una definición más formal), definimos su unión por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$. Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ejemplos 1.1.2.

1. Ponemos $A = \{*, +, -\}$ y $B = \{0, 1\}$ (considerar en ambos casos los elementos simplemente como símbolos), luego

$$A \cup B = \{*, +, -, 0, 1\}.$$

2. Sea I el conjunto de todos los equipos de la primera división del fútbol uruguayo y para cada $i \in I$ ponemos A_i el conjunto de todos los jugadores del equipo i. Luego $\bigcup_{i \in I} A_i$ es el conjunto de todos los jugadores de la primera división del futbol uruguayo.

Definimos la **intersección** de dos conjuntos A y B por

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Este conjunto está contenido tanto en A como en B. Además, si otro conjunto C cumple $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cap B$, es decir que $A \cap B$ es el conjunto más grande que está contenido tanto en A como en B.

Para esta operación el conjunto vacío no es neutro como para a unión. Lo que sucede es que $A \cap \emptyset = \emptyset$ para todo conjunto A.

Ejercicio 1.1.3. Probar que la intersección es asociativa.

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección es definida por

$$\bigcap \mathcal{C} = \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Ejemplos 1.1.4. 1. Consideramos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6\}$, luego

$$A \cap B = \{0, 2\}.$$

2. Sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Observamos que para cualquier número entre 1 y 10, existe un conjunto $C \subset \mathcal{C}$ que no lo tiene como elemento. Luego
$$\bigcap \mathcal{C} = \emptyset.$$

La **resta** de conjuntos se define de la siguiente manera:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Observar que mientras la unión y la intersección son operaciones conmutativas ($A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$), la resta no lo es. Un ejemplo simple que muestra esto es el siguiente: si A es no vacío, entonces

$$A \setminus \emptyset = A \text{ y } \emptyset \setminus A = \emptyset.$$

Si $A \subset X$, entonces definimos el **complemento** de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$. Esta notación será usada cuando sea claro cuál es el conjunto X.

Ejercicio 1.1.5. Probar que:

1. Si $A, B \subset X$, entonces $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subset B \subset X$, entonces $B^c \subset A^c$ (tanto A^c como B^c son los complementos en X).

Ejercicio 1.1.6. (Leyes de De Morgan)

1. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto C. Expresar $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$ en términos de A^c y B^c.
2. Generalizar lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos.

Por último definimos el **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B como el conjunto de pares ordenados formados por un elemento de A y un elemento de B. Esto es,
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Observar que como se trata de pares ordenados, el producto cartesiano no es conmutativo.

Ejemplos 1.1.7. 1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

3. La hora dada por un reloj electrónico tiene la forma xx:xx, donde los espacios de la izquierda corresponde a la hora y los de la derecha corresponde a los minutos. Podemos entonces ver el conjunto de los posibles horarios dados por el reloj como $A \times B$ donde
$$A = \{00, \dots, 23\} \text{ y } B = \{00, \dots, 59\}.$$

1.2. Funciones

Fijemos dos conjuntos A y B. Se llama **relación** de A a B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una **función** de A a B es una relación $f \subset A \times B$ que cumple que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** al conjunto B. Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A a B.

Ejemplos 1.2.1.

1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía, es decir, $f = \emptyset$.

2. Sea A cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en A por
$$id_A : A \to A, \ id_A(a) = a \quad \forall a \in A.$$

3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por
$$i : A \to B, \ i(a) = a \quad \forall a \in A.$$
Si $A = B$, entonces i no es otra cosa que la identidad.

4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es
$$f : A \to B, f(a) = b_0 \quad \forall a \in A.$$

5. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, podemos considerar la **restricción** de f a A como la función
$$f|_A : A \to Y, \ f|_A(a) = f(a) \quad \forall a \in A.$$

Dada una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$, definimos

- El conjunto **imagen** de A por f como $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset Y$.
- El conjunto **preimagen** de B por f como $f^{-1}(B) = \{a \in X : f(a) \in B\} \subset X$.

También escribiremos **imagen de f** para referirnos al conjunto $f(X)$.

Ejercicio 1.2.2. Probar que dadas una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

1.2.1. Composición y función inversa

La **composición** de dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ es la función

$$g \circ f : X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

Observar que la composición de funciones es asociativa, es decir, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Ejercicio 1.2.3. Supongamos que tenemos dos funciones $f, g : X \to X$. ¿Se cumple necesariamente $f \circ g = g \circ f$?

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to Y$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**. Observar que si g es inversa de f, entonces f es inversa de g.

Proposición 1.2.4. *Si $f : X \to Y$ es una función invertible, entonces su inversa es única.*

Demostración. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que $g(y) = h(y)$ para todo $y \in Y$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal que $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

□

En virtud de la proposición anterior podemos hablar de <u>la</u> *inversa* de una función invertible f (y no solo de <u>una</u> *inversa*), para la que adoptamos la notación f^{-1} (tener cuidado de no confundir con el conjunto de las preimágenes).

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x')$ se da solo si $x = x'$.

Observación 1.2.5.

1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.
2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Observación 1.2.6.
1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.
2. Una función constante no es sobreyectiva salvo que su codominio sea un conjunto unitario.

Una función es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. La siguiente proposición da una relación entre las nociones de función biyectiva y función invertible.

Proposición 1.2.7. *Tomemos una función $f : X \to Y$. Entonces f es invertible si y solo si es biyectiva.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Para ver que f es inyectiva supongamos que $f(x) = f(x')$, luego

$$x = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x') = x'.$$

Concluimos entonces que f es inyectiva.

Observar además que si $y \in Y$, entonces $f(g(y)) = y$, es decir que y está en la imagen de f. Luego f es sobreyectiva.

($\Rightarrow$) Ahora suponemos que f es biyectiva. Definimos la función g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f. □

Ejercicio 1.2.8. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y solo si f es inyectiva.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y solo si f es sobreyectiva.

Ejercicio 1.2.9. Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Probar que

1. si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
3. si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Una función $f : X \to Y$ es **invertible a izquierda** si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$. Por otro lado decimos que f es **invertible a derecha** si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$.

Ejercicio 1.2.10. Probar que una función

1. es invertible a izquierda si y solo si es inyectiva.
2. es invertible a derecha si y solo si es sobreyectiva.

1.2.2. Familias indexadas de conjuntos y productos cartesianos

Una **familia indexada de conjuntos** es una colección de conjuntos $\mathcal{C}$ junto con una función sobreyectiva $f : I \to \mathcal{C}$, donde I es un conjunto al cual llamamos **conjunto de índices**. Usaremos la notación

$$\{C_i\}_{i\in I}$$

para referirnos a una familia de conjuntos indexada por I. En este caso C_i es el conjunto $f(i)$.

Observar que si por ejemplo la colección $\mathcal{C}$ tiene un solo conjunto C, entonces $\{C_i\}_{i\in I}$ es una forma de tomar tantas copias del conjunto C como elementos tenga I.

Recordemos la definición de producto cartesiano que vimos anteriormente. Observar que un par ordenado (a, b) puede verse como una función $f : \{0, 1\} \to A \cup B$, $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Luego $A \times B$ puede ser visto como el conjunto de todas las funciones $f : \{0, 1\} \to A \cup B$ que cumplen $f(0) \in A$ y $f(1) \in B$. Esta idea nos permite generalizar la noción de producto cartesiano.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos. Definimos su **producto cartesiano** como el conjunto

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i : f(i) \in A_i \right\}.$$

Si $A_i = A$ para todo $i \in I$, entonces notaremos

$$\prod_{i\in I} A_i = A^I,$$

que es simplemente el conjunto de todas las funciones de I en A.

1.3. Apéndice

I. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, que se estudia en el Capítulo 2, puede construirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots \\
&n := \{0, 1, \ldots, n-1\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A partir de esta construcción es fácil definir el orden en los números naturales. Simplemente establecemos que $n < m$ si $n \in m$.

II. Así como consideramos conjuntos de números naturales, también podemos considerar otros conjuntos de números como $\mathbb{Z}$ (conjunto de números enteros), $\mathbb{Q}$ (conjunto de números racionales), $\mathbb{R}$ (conjunto de números reales) o $\mathbb{C}$ (conjunto de números complejos). Estos se relacionan de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

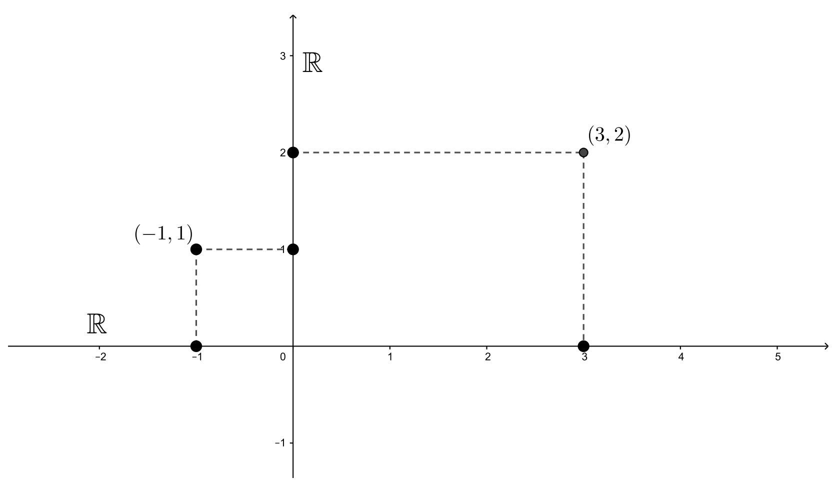
III. **Ejemplo:** Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}.$$

Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los números primos, luego

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}} A_p = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \text{ y } \bigcap_{p\in\mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

IV. **Ejemplo:** El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales, como se ve en la siguiente figura.



V. Se puede definir la **unión disjunta** entre dos conjuntos A y B por

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

De esta forma A se identifica con el subconjunto $A \times \{0\}$ y B con el subconjunto $B \times \{1\}$.

Observamos por ejemplo que el conjunto de los números enteros puede verse como una unión disjunta de la forma

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Identificamos aquí el conjunto de los naturales con los pares de la forma $(n, 1)$, y los números negativos con los pares de la forma $(n, 0)$. Escribiremos n en lugar de $(n, 1)$ y $-n$ en lugar de $(n, 0)$.

VI. Una **sucesión** en un conjunto X es una función de la forma $f : \mathbb{N} \to X$. Se suele usar la notación $\{x_n\}$ o $\{a_n\}$ para indicar la función f (de esta forma $x_n = f(n)$ o $a_n = f(n)$). Según lo visto anteriormente el espacio de sucesiones en el conjunto X es $X^{\mathbb{N}}$. Veamos algunos ejemplos de sucesiones, reconociendo si se trata de funciones inyectivas y/o sobreyectivas.

1. La sucesión en $\mathbb{N}$ definida por $x_n = 2n$ es inyectiva pero no sobreyectiva. Lo mismo para la sucesión $x_n = n^2$.
2. La sucesión en $\mathbb{Z}$ dada por $x_n = (-1)^n$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
3. La sucesión en $\mathbb{N}$ definida por $x_n = |10-n|$ es sobreyectiva pero no inyectiva. (Aquí $|x|$ indica el valor absoluto de x.)

Capítulo 2

Números naturales y principio de inducción

En este capítulo trabajaremos con el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, entendiendo este como un conjunto que cumple las siguientes condiciones:

1. Existe un elemento de $\mathbb{N}$ al que llamamos **cero** y denotamos por 0.

2. Existe una función inyectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Llamamos a $s(n)$ el **sucesor** de n.

3. **Principio de Inducción (PI):** si $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto que contiene al cero y que cumple $s(A) \subset A$, entonces $A = \mathbb{N}$.

Las condiciones anteriores se conocen como *axiomas de Peano* y dan lugar a la teoría axiomática de los números naturales. De esta forma los primeros números naturales se expresan de la siguiente manera:

$$1 = s(0),\ 2 = s(1) = s(s(0)),\ 3 = s(2) = s(s(s(0))),\ \ldots$$

Una forma alternativa de trabajar con los números naturales es, como se hace en el punto I del apéndice del capítulo anterior, definiendo un modelo de $\mathbb{N}$ dentro de la teoría de conjuntos, es decir, dar una definición explícita de $\mathbb{N}$ a partir de los axiomas de dicha teoría y probar que dicho conjunto cumple con los axiomas de Peano.

El Principio de Inducción admite la siguiente formulación equivalente[1]:

Principio de Inducción Matemática (PIM): Sea P una propiedad tal que

- 0 cumple P; y
- si n cumple P, entonces $s(n)$ cumple P.

[1] En el futuro nos referiremos al "Principio de Inducción" cuando usemos cualquiera de sus variantes. También diremos en estos casos que razonamos o probamos una cierta propiedad "por inducción".

Entonces todo número natural cumple la propiedad P.

Las dos condiciones requeridas por el Principio de Inducción Matemática se denominan *paso base* y *paso inductivo* (en ese orden), y la sentencia "n cumple P" en el paso inductivo suele denominarse *hipótesis de inducción*.

Proposición 2.0.1. $PI \Leftrightarrow PIM$

Demostración. Primero supongamos que se cumple PI y que P es una propiedad como en PIM. Definimos
$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ satisface } P\}.$$
Luego es claro que $0 \in \mathbb{N}$ y que $s(A) \subset A$, así que $A = \mathbb{N}$ por PI y por lo tanto todo número natural satisface P.

Por otro lado, ademitiendo PIM, si $A \in \mathbb{N}$ contiene al cero y se cumple $s(A) \subset A$, podemos considerar la pertenencia al conjunto A como nuestra propiedad P. Luego se ve claramente que $A = \mathbb{N}$. $\square$

Observación 2.0.2. Si P es una propiedad que se satisface para 1 y cumple el segundo punto de PIM, entonces es cierto que P es satisfecha por todos los naturales diferentes de 0. La forma de probar esto es definir una nueva propiedad $\tilde{P}$ de la siguiente forma: n satisface $\tilde{P}$ si y solo si $n = 0$ o n satisface P. Luego por PIM la propiedad $\tilde{P}$ es satisfecha por todos los naturales.

2.1. Operaciones en $\mathbb{N}$

Definimos la **suma** de la siguiente forma:

- $n + 0 = n$
- $n + s(m) = s(n + m)$

Esto nos da una función $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Observar que $n + 1 = s(n + 0) = s(n)$. Esto nos da otra forma de notar al sucesor de un número natural.

Proposición 2.1.1. *La suma cumple las siguientes propiedades:*

- $(n + m) + k = n + (m + k)$ *para todo* $k, n, m \in \mathbb{N}$ *(asociatividad).*
- $n + m = m + n$ *para todo* $n, m \in \mathbb{N}$ *(conmutatividad).*

Demostración. Probamos primero por inducción la asociatividad. Consideramos el conjunto
$$A = \{k \in \mathbb{N} : (n + m) + k = n + (m + k)\ \forall n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- $\underline{0 \in \mathbb{N}}$: $(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0)$.

- $\underline{s(A) \subset A}$: Supongamos que $k \in A$, es decir, $(n+m)+k = n+(m+k)$ para todo $\underline{n, m \in \mathbb{N}}$. Luego

$$(n+m)+s(k) = s((n+m)+k) = s(n+(m+k)) = n+s(m+k) = n+(m+s(k)).$$

Luego por el Principio de Inducción $A = \mathbb{N}$.

Probemos ahora la conmutatividad. Para esto definimos el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n + m = m + n \ \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

- $\underline{0 \in B}$: Probaremos por inducción en m que $0 + m = m + 0$ (puede pensarse que esta es la propiedad P a ser satisfecha por m). Esto es obvio para $m = 0$. Supongamos que la igualdad se cumple para cierto m, entonces usando la asociatividad tenemos

$$0 + (m + 1) = (0 + m) + 1 = (m + 0) + 1 = m + 1 = (m + 1) + 0.$$

  Por el Principio de Inducción tenemos lo deseado.

- De forma similar se prueba que 1 conmuta con todos los naturales, es decir, que $1 + m = m + 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (lo que es equivalente a decir que $1 \in B$).

- Supongamos ahora que $n \in B$, luego usando la asociatividad y el punto anterior se tiene

$$m+(n+1) = (m+n)+1 = 1+(m+n) = 1+(n+m) = (1+n)+m = (n+1)+m.$$

Es decir que $n + 1 \in B$.

Por el Principio de Inducción $B = \mathbb{N}$. $\square$

Proposición 2.1.2. *Se cumple la propiedad cancelativa de la suma, es decir, si $n, m, k \in \mathbb{N}$ son tales que $n + k = m + k$, entonces $n = m$.*

Demostración. Lo probamos por inducción en k fijando n y m. Observamos primero que si $k = 0$ la igualdad nos queda $n = n + 0 = m + 0 = m$.

Supongamos que la propiedad se cumple para cierto k. Luego, si $n+s(k) = m+s(k)$, se tiene por la definición de la suma la igualdad $s(n + k) = s(m + k)$, lo que por la inyectividad de s implica $n + k = m + k$. De lo que deducimos $n = m$.

Habiendo probado los dos pasos de la inducción concluimos la tesis de la proposición. $\square$

Definimos el **producto** de la siguiente manera:

- $n \cdot 0 = 0$
- $n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n$

Escribimos también $nm = n \cdot m$.

Proposición 2.1.3. *El producto es conmutativo, asociativo y cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma, es decir:*

$$n(m+k) = nm + nk \ \forall n, m, k \in \mathbb{N}.$$

La prueba de la proposición anterior se deja como ejercicio. Se sugiere aplicar argumentos similares a los utilizados para probar las propiedades de la suma.

Proposición 2.1.4. *Si $n, m \neq 0$, entonces $nm \neq 0$.*

Demostración. Tanto n como m deben ser sucesores. Escribimos $n = s(n')$ y $m = s(m')$. Luego

$$nm = n \cdot s(m') = nm' + n = nm' + s(n') = s(nm' + n').$$

Tenemos entonces que nm es sucesor, por lo que no puede ser igual a 0. □

Por último, de forma similar a como lo hicimos para la suma y el producto, definimos la potencia:

- $n^0 = 1$
- $n^{k+1} = n^k \cdot n$

Ejercicio 2.1.5. Probar que la potencia cumple las siguientes propiedades:

- $(nm)^k = n^k m^k$
- $n^{k+r} = n^k + n^r$
- $n^{kr} = \left(n^k\right)^r$

2.2. El orden en los naturales

Dados dos naturales n y m decimos que n es **menor o igual** a m (o que m es **mayor o igual** a n), y escribimos $n \leq m$, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + k = m$. Decimos que n es **menor** que m (o que m **mayor** que n), y escribiremos $n < m$, si $n \leq m$ y $n \neq m$.

A continuación vemos algunas propiedades de $\leq$.

Proposición 2.2.1.

1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq s(n)$.*
2. *Si $n \leq m$ y $m \leq k$, entonces $n \leq k$.*
3. *$0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $n \leq 0$, entonces $n = 0$.*

4. *Para todo par de números $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq m$ si y solo si $s(n) \leq s(m)$.*

5. *Dados dos naturales n y m se cumple $n \leq m$ o $m \leq n$. Es decir, dos naturales son siempre comparables.*

6. *Si $n \leq x \leq n+1$, entonces $x = n$ o $x = n+1$.*

7. *Si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces $n = m$.*

8. *Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces para todo par de naturales $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$n \leq m \Leftrightarrow n + k \leq m + k.$$

   Si además $n \neq m$, entonces lo anterior se cumple con desigualdades estrictas.

9. *Si $n_1 \leq m_1$ y $n_2 \leq m_2$, entonces $n_1 + n_2 \leq m_1 + m_2$. Si además alguna de las desigualdades es estricta, entonces $n_1 + n_2 < m_1 + m_2$.*

10. *Si $n \leq m$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $nk \leq mk$. Si además $n \neq m$ y $k \neq 0$, entonces la desigualdad es estricta.*

Demostración. 1. Es claro porque $s(n) = n + 1$.

2. Si $m = n + r_1$ y $k = m + r_2$, entonces $k = n + (r_1 + r_2)$.

3. Es claro pues $n = 0 + n$. Si $n \neq 0$ y $n \leq 0$, entonces $0 = n + k = s(n') + k = s(n' + k)$, lo que es absurdo porque 0 no es sucesor.

4. $m = n + k \Leftrightarrow s(m) = s(n + k) = s(n) + k$.

5. Vamos a fijar $m \in \mathbb{N}$ y probar por inducción que todo $n \in \mathbb{N}$ es comparable con m.

   Por el punto 3 sabemos que 0 es comparables con m. Veamos que si n es comparable con m, entonces también lo es $s(n)$. Para esto distinguimos tres casos:

   - Si $n \geq m$, entonces $s(n) \geq m$ por el punto 2.
   - Si $n = m$, entonces $s(n) = m + 1 \geq m$.
   - En el otro caso $m = n + k$ con $k \neq 0$. Aquí podemos escribir $m = n + s(r) = s(n) + r$ (ya que todo natural diferente de 0 es sucesor). Tenemos luego $m \geq s(n)$.

   Concluimos por el Principio de Inucción que todos los números naturales son comparables con un $m \in \mathbb{N}$ cuaquiera.

6. Escribimos $x = n + k_1$ y $n + 1 = x + k_2$. Juntando esto tenemos $n + 1 = n + (k_1 + k_2)$, y luego, por la propiedad cancelativa de la suma, $k_1 + k_2 = 1$. Si $k_1 = 0$, entonces $x = n$, en el otro caso $k_1 = s(r)$ y luego $s(r) + k_2 = s(r + k_2) = s(0)$. Por el punto 4 se tiene $r + k_2 = 0$ y por lo mismo de antes r no puede ser sucesor, así que $r = 0$ y por lo tanto $x = n + 1$.

7. Si $m = n+k$ y $n = m+r$, entonces $m = m+(k+r)$. Por la propiedad cancelativa se tiene $k + r = 0$ y por el argumento del punto anterior k no puede ser sucesor. Esto implica $n = m$.

8. La afirmación es consecuencia de lo siguiente:

$$m = n + r \Leftrightarrow m + k = (n + r) + k = (n + k) + r.$$

   Aquí se utiliza la propiedad cancelativa en ($\Leftarrow$).

9. Es consecuencia directa del punto anterior.

10. Si $m = n + r$, entonces $mk = nk + rk$ y por lo tanto $nk \leq mk$. Además, si $m \neq n$ y $k \neq 0$, entonces $r \neq 0$ y luego $rk \neq 0$, lo que implica $nk < mk$.

$\square$

Corolario 2.2.2. *Se cumple la propiedad cancelativa del producto: si $nk = mk$ y $k \neq 0$, entonces $n = m$.*

Demostración. Si $n \neq m$, entonces por la el punto 7 de la proposición anterior debe darse $n < m$ o $m < n$. Supongamos lo primero, (la otra parte es análoga). Por el punto 10 tenemos $nk < mk$, lo que contradice la igualdad $nk = mk$. $\square$

Definimos **resta** en $\mathbb{N}$ de la siguiente forma: si $n \leq m$, entonces $n - m$ es el único natural k que cumple $m = n + k$. Aquí la unicidad es garantizada por la propiedad cancelativa, ya que si $m = n + k = n + r$, entonces $k = r$.

Teniendo definido el orden en los naturales podemos dar otra formulación del principio de inducción:

Principio de Inducción Completa (PIC): Sea P una propiedad tal que

- 0 satisface P, y
- si m satisface P para todo $m < n$, entonces n satisface P.

Entonces todo natural satisface la propiedad P.

Proposición 2.2.3. $PIC \Leftrightarrow PIM$

Demostración. El directo es claro ya que la hipótesis de PIM es más fuerte que la de PIC.

Supongamos ahora que se cumple PIM y que tenemos una propiedad P que es satisfecha por 0 y tal que si m la satisface para todo $m < n$, entonces n también. Definimos entonces la propiedad $\tilde{P}$ de la siguiente manera:

$$n \text{ satisface } \tilde{P} \Leftrightarrow m \text{ satisface } P \ \forall m \leq n.$$

Es claro que 0 satisface $\tilde{P}$, además si n satisface $\tilde{P}$, entonces m satisface P para todo $m < n + 1$ y por lo tanto $n + 1$ satisface P, lo que implica que $n + 1$ satisface $\tilde{P}$. Por PIM tenemos que todos los naturales satisfacen $\tilde{P}$ y como consecuencia también satisfacen P. $\square$

Observación 2.2.4. Uno puede considerar versiones de PIM y PIC comenzando de cualquier natural diferente del cero. Para probar esto basta con razonar de forma similar a como lo hicimos en la Observación 2.0.2.

El siguiente teorema es consecuencia del PIC.[2]

Teorema 2.2.5 (Principio de Buena Ordenación)**.** *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene mínimo. Es decir, si $A \subset \mathbb{N}$ es no vacío, existe $m \in A$ tal que $m \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$ no vacío. Si $0 \in A$, entonces 0 es mínimo (punto 3 de la Proposición 2.2.1). Supongamos que no es así y consideremos la propiedad P como la no pertenencia a A, es decir

$$n \text{ cumple } P \Leftrightarrow n \notin A.$$

Por lo supuesto anteriormente tenemos que 0 cumple P. Pero como no todo elemento de $\mathbb{N}$ cumple P (porque A es no vacío), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

- n cumple P para todo $n < m$, y
- m no cumple P (es decir que $m \in A$).

Es facil verificar que m es el mínimo de A: si $n \in A$, entonces no puede ser $n < m$ porque en este caso n cumpliría P, luego $m \leq n$ para todo $n \in A$. □

Como aplicación del principio de buena ordenación obtenemos la siguiente propiedad, clásica en la teoría de los números naturales:

Teorema 2.2.6 (División entera)**.** *Sean n y m dos números naturales con $m \neq 0$. Entonces existen naturales q y r tales que*

(i) $n = qm + r$,

(ii) $r < m$.

Demostración. Si $n = 0$ entonces la tesis se cumple con $q = r = 0$.

Si $n \neq 0$ consideramos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : n < xm\}$. Observamos que $n + 1 \in A$ (punto 7 de la Proposición 2.2.1), luego, al ser A no vacío, el principio de buena ordenación nos dice que existe un mínimo $p \in A$. Este mínimo además tiene que ser diferente de 0 porque n lo es, luego tiene sentido considerar $q = p - 1$.

Podemos afirmar que $qm \leq n$, porque si no q pertenecería a A y eso no puede ser ya que p es el mínimo de este conjunto. Luego tiene sentido considerar $r = n - qm$, con lo que se cumple la igualdad (i).

Veamos por último que $r < m$: si $m \leq r$, entonces tenemos

$$n = qm + r \geq qm + m = (q + 1)m = pm.$$

Como $p \in A$ tenemos que $n < pm \leq n$, lo que es absurdo. □

[2] De hecho el Principio de Buena ordenación es equivalente al Principio de Inducción.

Para finalizar mostraremos un último ejemplo de aplicación de PIC. Para esto hacemos primero un par de definiciones:

- Diremos que un número natural m **divide** a otro natural n si existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = mq$. También decimos en este caso que m es **divisor** de n o que n es **múltiplo** de m.
- Un natural p es **primo** si sus únicos divisores son 1 y p.

Proposición 2.2.7. *Todo número natural diferente de* 0 *y* 1 *tiene un divisor primo.*

Demostración. Diremos que $n \neq 0, 1$ cumple P si n tiene un divisor primo.

Observamos que $2 = s(1)$ es primo: si $2 = mq$, entonces $m, q \leq 2$ (es consecuencia del punto 7 de la Proposición 2.2.1), luego m y q solo pueden ser 1 o 2. Tenemos entonces que 2 cumple P.

Supongamos que m cumple P para todo $m < n$. Si n no es primo, entonces se puede escribir $n = mq$ con $1 < m < n$. Tomemos p un divisor primo de m y escribamos $m = pr$, luego $n = (pr)q = p(rq)$. Es decir que n tiene un divisor primo y por lo tanto cumple P.

Por PIC tenemos que todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tiene un divisor primo. □

2.3. Números enteros

En el Apéndice del Capículo 1 se define $\mathbb{Z}$ como el conjunto de pares ordenados $(n, 0)$ para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que representan a los números negativos, y los pares $(n, 1)$ con $n \in \mathbb{N}$, que representan a los números no negativos.

Observar que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = (n, 0)$ es inyectiva, luego podemos pensar en el conjunto de los naturales como un subconjunto de los números enteros.

En $\mathbb{Z}$ se definen operaciones que extienden a la suma y el producto en $\mathbb{N}$. Para hacerlo recordamos que hemos definido la resta $m - n$ para $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$. Luego definimos la suma en $\mathbb{Z}$ por:

- $(m, 0) + (n, 0) = (m + n)$.
- $(m, 1) + (n, 1) = (m + n, 1)$.
- Si $m \leq n$, entonces $(m, 0) + (n, 1) = (n, 1) + (m, 0) = (n - m, 1)$.
- Si $n < m$, entonces $(m, 0) + (n, 1) = (n, 1) + (m, 0) = (m - n, 0)$.

Por otro lado, definimos el producto por:

- $(m, 0) \cdot (n, 0) = (m, 1) \cdot (n, 1) = (mn, 1)$.

- $(m,0) \cdot (n,1) = (mn,0)$.

Puede observarse que la suma y el pruducto en $\mathbb{Z}$ son asociativas y conmutativas y que se cumple la propiedad distributiva.

Como es natural, vamos a usar la notación $(n,0) = -n$ y $(n,1) = n$.

Capítulo 3

Relaciones

Como se ve en el Capítulo 1, una relación de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Allí definimos a las funciones como un tipo especial de relación. En este capítulo nos centraremos en relaciones contenidas en un producto de la forma $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ de esta forma será llamada simplemente **relación en** X y escribiremos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diremos también que $\mathcal{R}$ es:

- **reflexiva** si $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- **simétrica** $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$.
- **asimétrica** si $x\mathcal{R}y$ implica que no se cumple $y\mathcal{R}x$.
- **antisimétrica** si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica $x = y$.
- **transitiva** si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$.

Ejemplo 3.0.1. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones

- $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = X \times X$.

Observamos que solo $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4$ son reflexivas, solo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_4$ son simétricas, todas salvo $\mathcal{R}_4$ son antisimétricas, solo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ son asimétricas y que todas salvo $\mathcal{R}_3$ son transitivas.

3.1. Relaciones de orden

En el capítulo anterior definimos en $\mathbb{N}$ las relaciones $\leq$ y $<$. En la Proposición 2.2.1 se muestran algunas propiedades de estas relaciones que serán importantes en este capítulo. Por ejemplo la relación $\leq$ cumple:

- $n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es reflexiva)
- Si $n \leq m$ y $n \leq n$, entonces $n = m$ (es antisimétrica)
- Si $n \leq m$ y $m \leq k$, entonces $n \leq k$ (es transitiva)
- Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq m$ o $m \leq n$ (todos los pares de elementos de $\mathbb{N}$ son comparables)

Inspirados en este ejemplo haremos la siguiente definición general: Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de orden amplio** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Generalmente usaremos para las relaciones de orden amplio la notación: $\leq$ o $\preceq$.

Por otro lado la relación $<$ en los naturales cumple:

- $n < m$ implica que no se cumple $m < n$ (es asimétrica)
- Si $n < m$ y $m < k$, entonces $n < k$ (es transitiva)
- Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n < m$, $m < n$ o $n = m$ (se cumple la tricotomía)

Decimos que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden estricto** si es asimétrica y transitiva. Para las relaciones de orden estrito usamos generalmente la notación: $<$ o $\prec$.

Proposición 3.1.1. *Si $\leq$ es una relación de orden amplio en un conjunto, entonces la relación $<$ definida por*

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ y } x \neq y$$

es una relación de orden estricto.

Por otro lado, si $<$ es una relación de orden estricto, entonces la relación definida por

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ o } x = y$$

es una relación de orden amplio.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

La proposición anterior nos dice que dar una relación de orden amplio o una relación de orden estrico es equivalente, es decir que al definir una se define automáticamente la otra. Nos concentraremos entonces en las relaciones de orden amplio y les llamaremos simplemente **relaciones de orden**.

Un **conjunto ordenado** es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden en X. Observar que si $A \subset X$, entonces la relación $\leq$ define una relación de orden en A. Puede entonces considerarse el conjunto ordenado $(A, \leq)$ (donde se usa la notación $\leq$ también para la restricción de la relación a A).

Diremos que $(X, \leq)$ es un **conjunto totalmente ordenado** si, como sucede con los números naturales, dado un par de elementos $x, y \in X$, se tiene $x \leq y$ o $y \leq x$. Es decir que todos los elementos son comparables.

Una **cadena** en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subset X$ que está totalmente ordenado por $\leq$.

Ejemplos 3.1.2.

1. Definimos el orden usual en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera:
   - Si $x, y \in \mathbb{Z}$ son números naturales, entonces el orden es igual que en $\mathbb{N}$.
   - Si x es natural e y es negativo, entonces $y \leq x$.
   - Si $x = -m$ e $y = -n$ con $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $y \leq x$.

   Esta relación de orden es total.

2. Si $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ son dos conjuntos ordenados, definimos el orden *lexicográfico* en el producto $X \times Y$ de la siguiente forma: $(x, y) \leq_L (x', y')$ si
   - $x < x'$, o
   - $x = x'$ e $y \preceq y'$,

   donde $<$ es el orden estricto asociado a $\leq$.

   Observar que si $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ son conjuntos totalmente ordenados, entonces también lo es $(X \times Y, \leq_L)$.

   El orden lexicográfico puede definirse de forma similar en el producto de una cantidad finita cualquiera de conjuntos.

3. Dado un conjunto cualquiera X ponemos en el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ el orden $A \leq B$ si y solo si $A \subset B$. Este no es un orden total, salvo que X sea un conjunto unitario.

Fijemos ahora $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que

- $m \in X$ es un elemento **minimal** si $x \leq m$ implica $x = m$.
- $M \in X$ es un elemento **maximal** si $M \leq x$ implica $x = m$.
- $m \in X$ es un **mínimo** si $m \leq x$ para todo $x \in X$.
- $M \in X$ es un **máximo** si $x \leq M$ para todo $x \in X$.

Observar que si $(X, \leq)$ tiene un máximo, entonces este es único y es claramente un elemento maximal. Algo análogo puede decirse del mínimo.

Ejemplo 3.1.3. En $X = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ definimos la siguiente relación de orden:

$$n \preceq m \text{ si } n \text{ es divisor de } m.$$

Observamos que:

1. La relación de orden no es total, pues por ejemplo 2 y 3 no se relacionan entre sí.
2. Los elementos minimales de X son los números primos.
3. No existen elementos maximales en X.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $A \subset X$. Decimos que un elemento $x \in X$ es:

- una **cota superior** de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.
- una **cota inferior** de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Ejemplos 3.1.4. 1. Consideramos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y ponemos en $\mathcal{P}(X)$ el orden dado por la inclusión. Sea $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}$ la colección de subconjuntos de X con tres elementos. Observar que la única cota inferior de $\mathcal{P}_3$ es $\emptyset$ y la única cota superior es X.

2. En el producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponemos el orden lexicográfico en base al orden usual en $\mathbb{Z}$. Consideramos los conjuntos

$$A = \mathbb{Z} \times \{0\} \text{ y } B = \{0\} \times \mathbb{Z}.$$

Observar que A no tiene cota inferior ni cota superior, mientras que B si las tiene (por ejemplo $(-1, 0)$ es una cota inferior y $(1, 0)$ es una cota superior). Sin embargo B no tiene maximales ni minimales.

3.2. Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Generalmente se usará para las relaciones de equivalencia la notación: $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$ o $\asymp$.

Ejemplos 3.2.1. 1. Consideramos el conjunto de todas las rectas del plano, notado por $\mathcal{R}$. Ponemos la siguiente relación:

$$r_1 \sim r_2 \Leftrightarrow r_1 \text{ paralela a } r_2.$$

Observar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{R}$.

2. Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$, definida por

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } n.$$

Aquí la noción de *múltiplo* puede definirse de la misma forma que para los números naturales a aprtir de la división entera.

Veamos que esta es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $a - a = 0$ es múltiplo de n para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que $a \equiv_n a$ para todo a.
- Es simétrica: si $a \equiv_n b$, entonces $a - b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b - a = -kn$, lo que quiere decir que $b \equiv_n a$.
- Supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Esto implica que existen k y h tal que $a - b = kn$ y $b - c = hn$, luego

$$a - c = a - b + b - c = kn + hn = (k + h)n.$$

Por lo tanto $a \equiv_n c$.

Esta relación se conoce como *congruencia módulo n*.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X, definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$ como el subconjunto de todos los elementos de X que se relacionan con x, es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subset X.$$

Observar que la transitividad implica que si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$.

Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 podemos mirar la clase del cero:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n - 0 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este es el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. En general, en la congruencia módulo n, la clase del 0 para la congruencia módulo n es siempre el conjunto de los múltiplos de n.

Definimos el **conjunto cociente** de una relación $\sim$ en X como el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Volvamos al ejemplo de la congruencia módulo 3. Para hallar el cociente de esta relación debemos determinar cuáles son todas sus clases de equivalencia. Ya sabemos que la clase del cero es el conjunto de todos los múltiplos de 3. Observamos que además

$$[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad [2] = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

son otras dos clases diferentes. Se tiene además que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces al dividir n entre 3 obtenermos $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$. Luego n está en alguna de las clases anteriormente mencionadas. En conclusión

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Ejercicio 3.2.2. Hallar el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ para cualquier $n \neq 0$.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X definimos la **proyección al cociente** como la función

$$\pi : X \to X/\sim, \ \pi(x) = [x].$$

3.2.1. Particiones

Una **partición** de un conjunto X es una familia P de subconjuntos de X (es decir que $P \subset \mathcal{P}(X)$) tal que:

1. Si A y B pertenecen a P y son diferentes, entonces $A \cap B = \emptyset$. Dicho de otra forma, los elementos de P son disjuntos dos a dos.

2. La unión de los elementos de P es todo X, es decir $\bigcup P = X$.

Ejemplos 3.2.3. 1. Si X es cualquier conjunto, entonces $P = \{\{x\} : x \in X\}$ es una partición; también lo es $P = \{X\}$. Diremos que estas son las particiones **triviales** de X.

2. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego si ponemos

$$A = \{1\},\ B = \{2, 5\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ y } D = \{1, 6\},$$

tenemos por ejemplo que $P_1 = \{A, B, C\}$ es una partición pero $P_2 = \{B, D\}$ y $P_3 = \{B, C, D\}$ no lo son.

En la siguiente proposición vemos que dar una relación de equivalencia en un conjunto es equivalente a dar una partición del mismo.

Proposición 3.2.4. *1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, entonces el cociente $X/\sim$ es una partición en X.*

2. Sea P una partición en un conjunto X. Entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ en X tal que $X/\sim = P$.

Demostración. Para probar la primera parte vemos primero que las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son disjuntas dos a dos. Si no fuese así tendríamos dos clases diferentes $[x]$ e $[y]$ que no son disjuntas. Esto quiere decir que existe z en la intersección de ambas, o dicho de otro modo $z \sim x$ y $y \sim z$. La transitividad de $\sim$ implica que $x \sim y$ y luego $[x] = [y]$.

Por otro lado es claro que todo elemento $x \in X$ pertenece a una clase de equivalencia, luego la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto X.

Para la segunda parte alcanza con definir $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Para probar la unicidad supongamos que $\sim$ y $\simeq$ son dos relaciones de equivalencia tal que $X/\sim\, = X/\simeq\, = P$. Veamos que $x \sim y$ si y solo si $x \simeq y$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \sim \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \simeq \\ &\Leftrightarrow x \simeq y. \end{aligned}$$

$\square$

Observamos que si $f: X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces esta induce una partición en X dada por los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$ para $y \in Y$. Por la proposición anterior dicha partición define una relación de equivalencia $\sim_f$ en X, que puede caracterizarse de la siguiente manera:

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

El cociente dado por esta relación puede ser identificado con el conjunto Y mediante $y \mapsto f^{-1}(y)$. Luego puede pensarse que toda función sobreyectiva es una proyección al cociente para alguna relación de equivalencia en el dominio de f.

3.2.2. Números racionales

Consideremos en el conjunto $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ (con $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos) la relación dada por

$$(n, m) \sim (k, r) \Leftrightarrow nr = mk.$$

Veamos primero que es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $(n, m) \sim (n, m)$ porque claramente $nm = nm$.
- Es simétrica: si $(n, m) \sim (k, r)$, entonces $nr = mk$. Esto implica que $mk = nr$ y luego $(k, r) \sim (n, m)$.
- Supongamos que $(n, m) \sim (k, r)$ y $(k, r) \sim (\ell, h)$, es decir, $nr = mk$ y $kh = r\ell$. Luego multiplicando la primera igualdad por h se tiene

  $$nrh = mkh = mr\ell.$$

  Como $r \neq 0$ podemos usar la propiedad cancelativa para obtener $nh = m\ell$, lo que significa que $(n, m) \sim (\ell, h)$.

Adoptaremos la notación n/m para referirnos a la clase de (n, m) y escribimos $\mathbb{Q} := X/\sim$. Este cociente es el conjunto de los **números racionales**.

A partir de esta construcción podemos observar que los números enteros pueden verse como un subconjunto de los números racionales. Más precisamente lo hacemos mediante la función inyectiva

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ i(n) = \frac{n}{1}.$$

Definimos las operaciones suma y producto en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{r} = \frac{nr + km}{mr}; \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{r} = \frac{nk}{mr}.$$

Se deja como ejercicio probar que estas operaciones están bien definidas, es decir que si $n/m = n'/m'$ y $k/r = k'/r'$, entonces

$$\frac{nr + km}{mr} = \frac{n'r' + k'm'}{m'r'} \text{ y } \frac{nk}{mr} = \frac{n'k'}{m'r'}.$$

Observar que las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ extienden a las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$i(n) + i(m) = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} = i(n+m)$$

y

$$i(n) \cdot i(m) = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = i(nm).$$

La relación de orden usual en los números racionales es definida de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} \leq \frac{k}{r} \Leftrightarrow nr \leq km.$$

Donde el símbolo $\leq$ en la derecha indica el orden de los enteros. Observar que $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

3.3. Matriz asociada a una relación

Consideremos el conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La **matriz asociada** a una relación $\mathcal{R}$ en X es una matriz (a_{ij}) tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} x_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tener en cuenta que la definición de matriz asociada depende del órden dado en el conjunto X, por lo que hay tres datos que son necesarios para determinarla: el conjunto, la relación y un órden total en el conjunto.

Ejemplo 3.3.1. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,3), (4,1), (4,4)\}.$$

Su matriz asociada nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observar que dada una matriz de $n \times n$ y un conjunto X con n elementos dispuestos en cierto orden, existe una única relación de equivalencia cuya matriz asociada es la dada.

Ejercicio 3.3.2. Determinar qué propiedades tiene la matriz asociada a una relación:

1. Reflexiva
2. Simétrica

3. Antisimétrica

4. Asimétrica

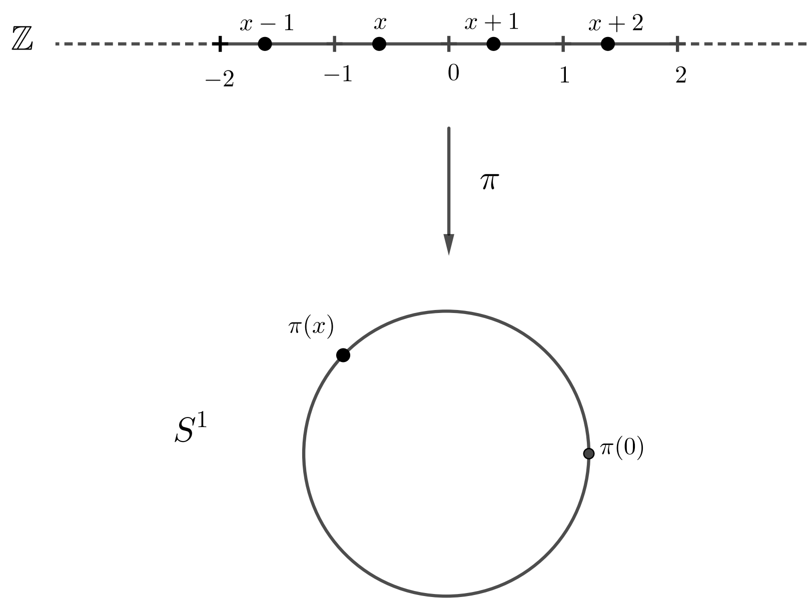
Más adelante nos interesará contar el número de relaciones que cumplan con determinadas propiedades. En ese caso la representación matricial de las relaciones nos será útil.

3.4. Apéndice

I. Ejemplo: Ponemos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Se deja como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.



El conjunto cociente de esta relación puede verse geométricamente como el círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Observar que de esta forma la proyección queda $\pi : \mathbb{Z} \to S^1,\ \pi(x) = e^{2\pi i x}$.

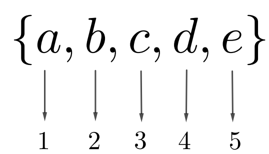
Capítulo 4

Finitud y numerabilidad

Nos enfocamos aquí en un par de preguntas:

- ¿Qué es contar?
- ¿Qué significa que un conjunto tenga n elementos?

Para ilustrar un poco esto antes de verlo más formalmente consideremos el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Lo que uno hace al contar este conjunto es señalar cada elemento y decir en orden los números naturales a partir del 1, como se muestra en la siguiente figura:



Cuando ya no quedan elementos que etiquetar, se toma el último natural usado y se declara: "El conjunto tiene 5 elementos".

Mirando la figura podemos observar que allí se establece una función entre el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vemos además que esta función es biyectiva.

Podría pasar que dado un conjunto X no fuera posible llevar a cabo este proceso de manera de agotar todos sus elementos. En ese caso estamos en presencia de lo que llamamos un conjunto infinito.

4.1. Finitud

Diremos que un conjunto X es **finito** si es vacío o bien existe una función biyectiva

$$f : \{1, \dots, n\} \to X$$

para algún $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si X no es finito diremos que es **infinito**.

Observamos que si $A \subset \{1, \ldots, n\}$, entoncecs A es finito. Para esto contemplamos dos posibilidades: si $A = \emptyset$ no hay nada que probar, si $A \neq \emptyset$ puede definirse la siguiente función de forma recursiva usando el Principio de Buena Ordenación (Teorema 2.2.5):

- $h(1) = \min A$,
- Si $A \setminus \{h(1), \ldots, h(k-1)\} \neq \emptyset$, se define $h(k) = \min A \setminus \{h(1), \ldots, h(k-1)\}$.

Este proceso se termina si al cabo de m pasos se llega a $A = \{h(1), \ldots, h(m)\}$. En ese caso queda definida una función biyectiva $h : \{1, \ldots, m\} \to A$. Observamos que esto efectivamente termina en a lo sumo n pasos porque para todo k se da $h(k) \geq k$.

Proposición 4.1.1. *Sea X un conjunto. Si se cumple que para algún $n \in \mathbb{N}$*

1. *existe $f : X \to \{1, \ldots, n\}$ inyectiva, o*
2. *existe $f : \{1, \ldots, n\} \to X$ sobreyectiva,*

entonces X es finito.

Demostración. Para la primera parte usamos la observación anterior para $A = f(X)$, lo que nos da una función biyectiva $f^{-1} \circ h : \{1, \ldots, m\} \to X$.

Para probar la segunda parte vemos que podemos definir una función inyectiva $g : X \to \{1, \ldots, n\}$ tomando para cada $x \in X$ un número $g(x) \in f^{-1}(\{x\})$. $\square$

El siguiente es un resultado clásico de combinatoria:

Teorema 4.1.2 (Principio del Palomar)**.** *Consideremos un número natural cualquiera n. Luego no existe ninguna función de $\{1, \ldots, n+1\}$ a $\{1, \ldots, n\}$ que sea inyectiva.*

Demostración. Vamos a probar el principio del palomar por inducción.

Si $n = 1$, entonces existe una única función $f : \{1, 2\} \to \{1\}$, definida por $f(1) = f(2) = 1$. Es claro que f no es inyectiva.

Supongamos que no existe ninguna función inyectiva de $\{1, \ldots, n+1\}$ a $\{1, \ldots, n\}$ y que tenemos $f : \{1, \ldots, n+2\} \to \{1, \ldots, n+1\}$. Si f fuera inyectiva definiremos otra función inyectiva $g : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n\}$, lo que nos dara una contradicción con la hipótesis de inducción.

Distinguimos dos casos:

- Si $n+1 \notin f(\{1, \ldots, n+1\})$, entonces podemos definir g como la restricción de f al conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$.
- En el otro caso ponemos $a \in f^{-1}(\{n+1\})$ y $b = f(n+2)$. Observar que $a \neq n+2$ y $b \neq n+1$. Definimos entonces g de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

  Esta función es inyectiva, lo que nos lleva a una contradicción.

Por Principio de Inducción tenemos la tesis del teorema. □

El nombre *Principio del Palomar* se debe a su formulación más popular: No pueden meterse $n+1$ palomas en n jaulas sin que dos palomas compartan jaula.

Corolario 4.1.3. *No existe ninguna función inyectiva de* $\{1,\dots,n\}$ *en* $\{1,\dots,m\}$ *si* $m<n$. *Como consecuencia se tiene que no existe una función biyectiva entre* $\{1,\dots,n\}$ *y* $\{1,\dots,m\}$ *si* $n\neq m$.

Demostración. Si existiera $f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,m\}$ inyectiva, entonces su restricción a $\{1,\dots,m+1\}$ sería también inyectiva, lo que es absurdo por el Principio del Palomar. □

El corolario anterior y el hecho de que la composición de funciones biyectivas es biyectiva, nos permiten hacer la siguiente definición:

Sea X un conjunto finito. Decimos que n es el **cardinal** de X si existe una función biyectiva $f:\{1,\dots,n\}\to X$. Escribimos $\#X=n$.

Ejercicio 4.1.4. Probar la siguiente versión más general del principio del palomar: Si se meten $nm+1$ palomas en n jaulas, entonces hay una jaula que tiene por lo menos $m+1$ palomas.

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f:X\to Y$. Notaremos en este caso $X\simeq Y$. A partir de esto uno puede decir que X tiene cardinal n si $X\simeq\{1,\dots,n\}$.

Ejercicio 4.1.5. Sea $\mathcal{X}$ una colección de conjuntos. Probar que la equipotencia define una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$. Describir su cociente en el caso de que los elementos de $\mathcal{X}$ sean todos conjuntos finitos.

4.2. Numerabilidad

Observemos que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. Si no lo fuera existiría una función biyectiva $f:\mathbb{N}\to\{1,\dots,n\}$. Pero de esta forma la restricción de f al conjunto $\{1,\dots,n+1\}$ sería una función inyectiva, lo que contradice el Principio del Palomar.

Nos preguntamos a partir de esto qué otros conjuntos infinitos existen y si todos ellos son equipotentes a $\mathbb{N}$, o si por el contrario hay conjuntos infinitos "más grandes" que otros.

Comenzamos dando la siguiente definición: Diremos que un conjunto X es **numerable** si es finito o es equipotente con $\mathbb{N}$.

Observamos por ejemplo que si $A\subset\mathbb{N}$, entonces A es numerable. Para probar esto podemos suponer que A es infinito (en el otro caso no hay nada que probar) y considerar la función $f:\mathbb{N}\to A$ definida por recurrencia de la siguiente forma:

- $f(0)=\min A$, y

- $f(n) = \text{mín}(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\})$.

Si este proceso terminara quedaría probada la finitud de A, pero como supusimos que este conjunto es infinito el paso recursivo siempre puede hacerse. Luego f queda bien definida y es fácil ver que es biyectiva (se deja como ejercicio).

Ejemplo 4.2.1. Veamos que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para esto basta con considerar la función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La siguiente proposición nos permitirá construir más ejemplos.

Proposición 4.2.2. *Sea X un conjunto.*

(i) Si X es infinito, entonces existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

(ii) Si existe $f : X \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces X es numerable.

(iii) Si existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva, entonces X es numerable.

La propiedad (i) dice que todo conjunto infinito contiene una copia de $\mathbb{N}$, es decir que de alguna manera el infinito numerable es el orden de infinito más chico.

Demostración. (i) Definimos f por recurrencia:

- $f(0) = x_0 \in X$ (elegimos cualquier x_0 ya que X es no vacío)
- Si tenemos definido $f(0), \ldots, f(n)$, entonces como X no es finito, existe $x \in X \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$. Ponemos $f(n+1) = x$.

Es claro que la función así definida es inyectiva.

(ii) Como f es inyectiva tenemos que $X \simeq f(X)$. Por otro lado $f(X)$ está contenido en $\mathbb{N}$ (que es numerable), por lo que es numerable. Luego X también lo es.

(iii) Queremos definir una función $g : X \to \mathbb{N}$ que sea inyectiva, luego por la parte anterior X será numerable. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$g(x) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\} = \text{mín}\, f^{-1}(\{x\}).$$

Dicho mínimo existe por el Principio de Buena Ordenación puesto que, como f es sobreyectiva, el conjunto $f^{-1}(\{x\})$ es no vacío para todo $x \in X$.

□

Proposición 4.2.3. *Si A y B son numerables, entonces $A \times B$ también lo es.*

Demostración. Observar que si A y B son infinitos, entonces $A \times B$ es equipotente con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probaremos entonces que existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

La inyectividad de esta función está dada por la unicidad de la descomposición en factores primos.[1]

Se deja como ejercicio probar los otros casos (A y/o B finitos). □

De lo anterior puede concluirse que el producto cartesiano de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.

Como consecuencia de la Proposición 4.2.3 tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.4. Veamos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. Para esto primero observamos que $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es numerable por la proposición anterior. Luego, como la proyección al cociente $\pi : X \to \mathbb{Q}$ es sobreyectiva, podemos utilizar el punto (iii) la Poposición 4.2 para concluir que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ejercicio 4.2.5. Probar que la unión de una familia numerablde de conjuntos numerables es a su vez numerable.

Tenemos entonces que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$, que son conjuntos que contienen estrictamente a $\mathbb{N}$, son numerables. Sin embargo existe una diferencia esencial entre estos conjuntos y $\mathbb{R}$, como vemos a continuación.[2]

Proposición 4.2.6. *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *no es numerable.*

Demostración. La prueba que presentamos utiliza una idea conocida como *argumento diagonal de Cantor* (en honor al matemático ruso-alemán Georg Cantor).

Vamos a probar que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es numerable. Esto implicará que $\mathbb{R}$ tampoco lo es (pues los subconjuntos de un conjunto numerable son a su vez numerables). Definimos entonces $S \subset [0, 1)$ como el conjunto de números reales que tienen una expresión decimal que solo utiliza ceros y unos. Queremos ver que no existe una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ a S.

Veamos que dada una función $f : \mathbb{N} \to S$, existe un elemento de S que no está en la imagen de f. Para esto tomamos un número $x \in S$ tal que en el lugar k después de la coma tenga una cifra (0 o 1) diferente al lugar k después de la coma de $f(k)$. Podemos observar que este x no está en la imagen de f porque para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el lugar k después de la coma de x difiere del lugar k después de la coma de $f(k)$.

[1] Asumimos que es cierto el siguiente resultado: dado un número natural n existen únicos números primos $p_1, \ldots, p_r$ y números naturales $k_1, \ldots, k_r$ diferentes de cero tales que $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$.

[2] No daremos aquí una definición formal del conjunto de números reales. Puede pensarse en ellos como los números que se expresan de forma decimal con una cantidad (posiblemente infinita) de cifras después de la coma.

Un ejemplo de lo anterior puede verse a continuación:

$$\begin{aligned}
f(1) =&0,01100010100111\ldots \\
f(2) =&0,01001110010101\ldots \\
f(3) =&0,10100010010101\ldots \\
f(4) =&0,00011101010100\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aquí tenemos que el primer lugar después de la coma de $f(1)$ es 0, el segundo lugar después de la coma de $f(2)$ es 1, etc. Luego $x = 0,1000\ldots$ no está en la imagen de f. $\square$

Ejercicio 4.2.7. Probar que el conjunto S de la proposición anterior es equipotente con el conjunto de sucesiones de ceros y unos $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Tenemos entonces que existen conjuntos infinitos de diferentes órdenes ($\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ por ejemplo). Podríamos decir que desde el punto de vista de su cardinal, $\mathbb{R}$ es estrictamente más grande que $\mathbb{N}$. A partir de aquí aparecen de forma natural dos preguntas:

- ¿Existe algún órden de infinito entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$? Esto podría precisarse de la siguiente forma: ¿Existe un conjunto A que no es equipotente a $\mathbb{N}$ ni a $\mathbb{R}$ y funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : A \to \mathbb{R}$?
- ¿Existen órdenes de infinito más grandes que el de $\mathbb{R}$? Es decir: ¿Existe un conjunto X que no sea equipotente con $\mathbb{R}$ y una función inyectiva $f : \mathbb{R} \to X$?

La teoría de conjuntos no permite responder a la primera pregunta. Esto quiere decir que no puede demostrarse que es cierta ni que es falsa a partir de los axiomas. La segunda pregunta es respondida por el siguiente teorema.

Teorema 4.2.8 (Cantor)**.** *Sea X un conjunto cualquiera. Entonces no existe uan función sobreyectiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$. En particular X no es equipotente con $\mathcal{P}(X)$.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es sobreyectiva. Definimos

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Como f es sobreyectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Nos preguntamos entonces si a pertenece o no a A. Estudiamos las dos opciones:

- Si $a \in A$, entonces por la definición de A se tiene que $a \notin f(a) = A$, lo que es absurdo.
- Si $a \notin A$, entonces $a \notin f(a)$ y por lo tanto $a \in A$, que también es absurdo.

Concluimos entonces que no puede existir dicha función f.

$\square$

El Teorema de Cantor nos dice que existe una gran cantidad de ordenes diferentes de infinito pues puede construirse, por ejemplo, la sucesión de conjuntos

$$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))),\ \ldots$$

de forma tal que cada uno de ellos es estrictamente más grande que el anterior.

Ejercicio 4.2.9. Probar que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4.3. Apéndice

I. El hotel de Hilbert

Un viajero llegó a un hotel que se jactaba de tener infinitas habitaciones, cada una numerada con un número natural. Pero, lamentablemente, al solicitar una habitación el recepcionista le informó que el hotel estaba lleno. Entonces al viajero se le ocurrió una solución: que cada huesped se mudara al habitación siguiente, de esa forma la número 0 *quedaría libre para él.*

Luego de haberse instalado en la habitación número 0*, el viajero pasaba por la recepción cuando vio una gran muchedumbre. Al acercarse a ver que pasaba, se enteró de que había una excursión de infinitos viajeros (pero una cantidad numerable) solicitando habitaciones. Como le constaba que el hotel estaba lleno le propuso al recepcionista lo siguiente: que cada husped se mude a la habitación cuyo número sea el doble de la actual. Al hacerlo de esta forma hubo lugar para todos.*

Observar que en el primer caso el viajero propone una función biyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mientras que en el segundo define una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares. Ambos son casos particulares de lo visto al inicio de la Sección 4.2., donde se establece una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto infinito.

Probar que si X es un conjunto infinito y $x_0 \in X$, es un elemento cualquiera. Entonces $X \setminus \{x_0\}$ es equipotente con X. Observar que esta es una condición necesaria y suficiente para ser infinito, es decir que un conjunto no vacío X es infinito si y solo si $X \simeq X \setminus \{x_0\}$ para cualquier $x_0 \in X$.

II. Ejercicios:

a) Probar que $\mathbb{R}$ es equipotente con $[0,1]$.

b) Probar que $\mathbb{R}$ es equipotente con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Concluir que $\mathbb{R}$ es equipotente con S.

III. Teorema de Shröder-Bernstein

Si X e Y son dos conjuntos finitos, entonces la existencia de una función inyectiva $f : X \to Y$ implica que el cardinal de X es menor o igual al cardinal de Y, pues si se tienen dos funciones biyectivas $\alpha : X \to \{1, \ldots, n\}$ y $\beta : Y \to \{1, \ldots, m\}$, entonces la composición $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ es inyectiva. Por el Principio del Palomar la existencia de esta función implica $n \leq m$. Podemos concluir de aquí que si existen dos funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$, entonces $X \simeq Y$ (en el caso de que X e Y sean finitos).

El caso infinito es un poco más difícil, sin embargo el resultado sigue siendo cierto. Lo enunciamos y demostramos a continuación:

Teorema 4.3.1 (Schröder-Bernstein)**.** *Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera. Si existen dos funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$, entonces X e Y son equipotentes.*

Demostración. Definimos la siguiente función $H : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ por

$$H(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$

Vamos a probar que H tiene un punto fijo, es decir que existe $W \in \mathcal{P}(X)$ tal que $H(W) = W$. Para esto se considera

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{P}(X) : A \subset H(A)\big\},$$

luego ponemos

$$W = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Por un lado se tiene

$$W = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} H(A) \subset H\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = H(W).$$

Por otro lado, lo anterior implica $H(W) \subset H(H(W))$, por lo que $H(W) \in \mathcal{A}$ y entonces se tiene $H(W) \subset W$.

Definimos ahora $h : X \to Y$ por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in W \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin W \end{cases}$$

Observar que como $H(W) = W$, entonces $W^c = X \setminus W \subset g(Y)$, luego h está bien definida.

Como f y $g^{-1}|_{W^c}$ son inyectivas, para ver que h es inyectiva basta probar que si $x \in W$ y $x' \notin W$, entonces $f(x) \neq g^{-1}(x')$. Usando $H(W) = X \setminus g(Y \setminus f(W)) = W$

obtenemos $g(f(W)^c) = W^c$. Como g es inyectiva (ver Ejercicio 1.2.8), al aplicar g^{-1} de ambos lados de la igualdad tenemos

$$f(W)^c = g^{-1}(W^c),$$

es decir que los conjuntos $f(W)$ y $g^{-1}(W^c)$ son disjuntos. Luego $f(x) \neq g^{-1}(x')$. Además esto prueba la sobreyectividad, ya que si $y \in Y$ está en $f(W)$ luego está en $h(W)$, y si no es así $y \in g^{-1}(W^c)$ y por lo tanto $y \in h(W^c)$. $\square$

Capítulo 5

Combinatoria

En el capítulo anterior dijimos que un conjunto X es finito si para algún natural n existe una función biyectiva
$$f : \{1, \dots, n\} \to X.$$
En ese caso decíamos que n es el cardinal de X, o de forma más coloquial, que X tiene n elementos. Luego sabemos expresar de una forma precisa lo que significa *contar* un conjunto finito, que es en definitiva determinar su cardinal.

A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre el problema de cómo contar, es decir, en desarrollar estrategias para determinar el cardinal de un conjunto finito.

Para ilustrar la complejidad que puede tener este problema planteemos dos preguntas:

1. ¿Cuál es el cardinal del siguiente conjunto de símbolos $\{*, 0, 35, +, a, k\}$?
2. ¿Cuántas palabras de cinco letras (no necesariamente pertenecientes al diccionario) no tienen dos vocales juntas?

El primer problema es muy sencillo, uno puede observar rápidamente que el conjunto tiene 6 elementos. Pero la resolución del segundo presenta cierta dificultad. Ya el conteo de todas las posibles palabras de largo 5 es un problema no trivial que equivale, por ejemplo, a contar funciones de la forma $f : \{1, \dots, 5\} \to \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es el abecedario. A esto se le suma la condición de que no puede haber dos vocales juntas, lo que agrega dificultad al problema.

5.1. Principios básicos de conteo

Veremos aquí algunas propiedades fundamentales que servirán de punto de partida para atacar problemas de conteo a lo largo de todo el capítulo.

5.1.1. Principio de la suma

Una primer enunciación del principio de la suma es la siguiente:

Principio de la suma[1]**:** *Si una tarea puede ser realizada de m formas diferentes, una segunda tarea puede ser realizada en n formas diferentes y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay $m+n$ formas de realizar una o la otra.*

A modo de ejemplo podríamos contemplar el siguiente problema:

Ejemplo 5.1.1. *En una esquina de la calle Cassinoni hay un bar llamado El Turco, atendido por su propio dueño (cuyo apodo le da el nombre al lugar). Sobre el mostrador el Turco tiene unos frascos de golosinas que suele dar a modo de cambio cuando no tiene monedas. Un día, para congraciarse con una niña que estaba sentada con su padre, el Turco le ofreció tomar una golosina de alguno de los dos frascos que tenía más a mano. En uno había 25 caramelos surtidos (todos diferentes), mientras que el otro contenía 10 chicles (también todos de diferente sabor). La niña calculó que tenía* $25+10=35$ *opciones para elegir su golosina.*

En el ejemplo anterior uno puede rápidamente interpretar cada frasco como un conjunto, y las opciones de escoger una golosina de un frasco como el cardinal de dicho conjunto. Por otro lado, la elección que se le ofrece a la niña es equivalente a juntar todas las golosinas en una bolsa y pedirle que saque de allí una unidad cualquiera. Este nuevo conjunto es la unión de los dos conjuntos anteriores. Luego si A es el conjunto de los caramelos y B es el conjunto de los chicles, el principio de la suma en este caso puede leerse como la igualdad $\#(A\cup B)=\#A+\#B$. De aquí extraemos una enunciación un poco más precisa de este principio:

Teorema 5.1.2 (Principio de la suma)**.** *Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Entonces $\#(A\cup B)=(\#A)+(\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A=m$ y $\#B=n$. Esto quiere decir que existen dos funciones biyectivas $f:\{1,\dots,m\}\to A$ y $g:\{1,\dots,n\}\to B$. Definimos la función $h:\{1,\dots,m+n\}\to A\cup B$ por:

$$h(k)=\begin{cases} f(k) & \text{si } k\le m \\ g(k-m) & \text{si } k>m \end{cases}$$

Debemos probar que h es biyectiva, luego queda probada la tesis.

Veamos primero que es inyectiva. Supongamos que $h(k)=h(r)$ (sin pérdida de generalidad podemos asumir $k\le r$). Distinguimos tres casos:

- Si $k,r\le m$, entonces $f(k)=f(r)$, y como f es inyectiva, k=r.
- Si $k\le m<r$, entonces $h(k)=f(k)\in A$ y $h(r)=g(r-m)\in B$. Pero esto es absurdo porque A y B son disjuntos.
- Si $k,r>m$, entonces $g(k-m)=g(r-m)$, lo que implica $k-m=r-m$ y luego $k=r$.

[1] Extraido textualmente de [G]

Tenemos entonces la inyectividad de h.

Probemos ahora que h es sobreyectiva. Para $x \in A \cup B$ tenemos dos casos:

- Si $x \in A$, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(k) = x$ y luego $h(k) = x$.
- Si $x \in B$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g(k) = x$ y luego $h(k + m) = x$.

Concluimos que h es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. □

Usando la asociatividad de la unión podemos deducir lo siguiente:

Corolario 5.1.3. *Si $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (\#A_1) + \cdots + (\#A_k)$$

5.1.2. Principio del producto

Consideramos ahora la siguiente enunciación del principio del producto:

Principio del producto[2]: *Si un procedimiento puede ser dividido en un primer paso para el cual hay m posibilidades y un segundo paso, y si para cada forma de realizar el primer paso hay luego n formas de realizar el segundo, entonces el procedimiento puede ser realizado de mn formas diferentes.*

Este principio es un poco más complejo y para lograr una formulación más precisa en términos de cardinales vamos a aproximarnos en dos etapas. Para la primera estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1.4. *Para darle un empuje al negocio, el Turco decide ofrecer para el almuerzo una fórmula consistente en plato principal y postre a un precio muy competitivo. Para el plato principal el bar dispone de siete opciones (tres de ellas son algún tipo de milanesa), mientras que tiene sólo cinco opciones de postre. ¿Cuantas fórmulas es posible armar?*

Reinterpretando lo anterior podemos llamar A al conjunto de platos principales y B al conjunto de postres. Luego podemos ver las diferentes formulas como el conjunto $A \times B$. Lo que estamos diciendo puede escribirse de la siguiente manera:

Proposición 5.1.5. *Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces $\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$, entonces existen funciones biyectivas $f : \{0, \ldots, m-1\} \to A$ y $g : \{0, \ldots, n-1\} \to B$.

Queremos definir una función biyectiva $h : \{0, \ldots, nm-1\} \to A \times B$. Para esto recordemos el teorema de división entera tomando m como divisor (Teorema 2.2.6): Dado $k \in \mathbb{N}$ existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ tales que $k = qm + r$. Luego definimos:

$$h(k) = (f(r), g(q)), \text{ donde } k = qm + r.$$

[2]También extraído de [G]

Para ver que esta función es inyectiva suponemos que $h(k) = h(\ell)$, es decir que si $k = qm + r$ y $\ell = q'm + r'$, entonces $f(r) = f(r')$ y $g(q) = g(q')$. Como f y g son inyectivas tenemos que $q = q'$ y $r = r'$, lo que implica $k = \ell$.

Para ver que es sobreyectiva tomemos un par (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ y pongamos $r = f^{-1}(a)$ y $q = g^{-1}(b)$. Luego es claro que $h(qm + r) = (a, b)$.

Concluimos entonces que h es biyectiva, por lo que se cumple la tesis.

Otra forma (tal vez más directa) de ver que h es biyectiva es verificando que la función

$$(a, b) \mapsto g^{-1}(b)m + f^{-1}(a)$$

es su inversa. $\square$

Sin embargo podemos observar que el principio del producto tal como lo hemos enunciado es más general que esto, ya que la Proposición 5.1.5 no contempla el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1.6. *Un día el Turco decidió ofrecer otra promoción. Se trata de un plato principal entre las siguientes opciones: colita de cuadril al horno con puré, filete de merluza con ensalada o tarta de zapallitos. Con el plato principal se ofrece sin cargo la bebida con el siguiente criterio:*

- *La colita de cuadril (C) puede ir acompañada por vino tinto*[3]*, gaseosa sabor cola o agua con gas.*
- *El filete de merluza (M) puede ir acompañado con vino blanco, jugo de naranja o agua sin gas.*
- *La tarta de zapallitos (Z) puede ir con licuado de frutas, jugo de naranja o agua sin gas.*

Usando el principio del producto en el ejemplo anterior uno puede rápidamente concluir que las posibles combinaciones son $3 \cdot 3 = 9$. Podemos pensar que $A = \{C, M, Z\}$ es el conjunto de los platos principales, mientras que hay tres conjuntos diferentes de bebidas

- $B_C = \{\text{vino tinto}, \text{gaseosa cola}, \text{agua con gas}\}$
- $B_M = \{\text{vino blanco}, \text{jugo de naranja}, \text{agua sin gas}\}$
- $B_Z = \{\text{licuado de frutas}, \text{jugo de naranja}, \text{agua sin gas}\}$

El conjunto de opciones no puede codificarse por un producto cartesiano de una forma directa, sin embargo podemos ver que $\{B_C, B_M, B_Z\}$ es una familia de conjuntos indexada en A, y una opción admisible por *el Turco* es un par (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B_x$. Generalizando esta observación podemos dar una enunciación más formal del principio del producto:

[3] De caja, por supuesto.

Teorema 5.1.7 (Principio del producto)**.** *Sea I un conjunto finito con m elementos y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos finitos tal que $\#A_i = n$ para todo $i \in I$. Pongamos $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i$ y consideramos el conjunto*

$$X = \{(i,a) \in I \times \mathcal{A} : a \in A_i\}.$$

Entonces $\#X = m.n$

Demostración. Probaremos que $X \simeq I \times \{1,\ldots,n\}$, luego por la Proposición 5.1.5 se obtiene lo buscado.

Como para todo $i \in I$ se tiene que $\#A_i = n$, tenemos que existen funciones biyectivas $f_i : \{1,\ldots,n\} \to A_i$. Definimos entonces una función $h : I \times \{1,\ldots,n\} \to X$ por

$$h(i,k) = (i, f_i(k)).$$

No es difícil verificar que esta función h es biyectiva. Luego el teorema queda demostrado. □

Se deja al lector la tarea de observar que esta nueva formulación del principio del producto se corresponde con la realizada al principio de la sección.

5.1.3. Principio de Inclusión-Exclusión

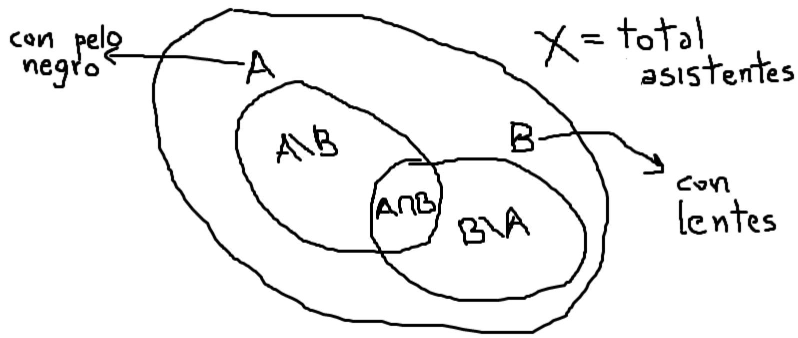
El principio de la suma resuelve el problema de contar los elementos de la unión de conjuntos disjuntos. Sin embargo este es un caso bastante particular y es natural preguntarse acerca de lo que sucede en caso de que los conjuntos que se están uniendo no sean disjuntos.

Ejemplo 5.1.8. *Noche de música en vivo en el bar El Turco. Se presentaba una banda de blues llamada La banda de Dieguito. Con el propósito de controlar que el número de asistentes no sobrepasara el límite habilitado por las autoridades, el Turco contrató al Comadreja, un hombre algo extraño que había llegado al bar unos días atrás pidiéndole una changa.*

Poco después de la medianoche el Turco se acercó a la puerta para preguntarle al Comadreja cuánta gente había entrado al local. Este le mostró una libreta donde tenía anotados algunos números. Según él, le había parecido aburrido contar una a una a todas las personas y prefirió hacerlo de forma indirecta. En su libreta aparecían los siguientes datos:

- 47 *tienen pelo negro.*
- 23 *usan lentes.*
- 17 *usan lentes y tienen el pelo negro.*
- 39 *no tienen el pelo negro ni usan lentes.*

Después de mostrarle estos números al Turco, el Comadreja sacó la lapicera que tenía apretada entre la oreja y el cráneo e hizo el siguiente dibujo:



Luego le explicó al Turco que había cuatro conjuntos disjuntos que considerar y que cada uno tenía su cardinal:

- $\#(A \cap B) = 17$
- $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) = 47 - 17 = 30$
- $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) = 23 - 17 = 6$
- $\#X \setminus (A \cup B) = \#(A \cup B)^c = 39$

Por el principio de la suma se tenía

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#(A \setminus B) + \#(B \setminus A) + \#(A \cap B) = 39 + 30 + 6 + 17 = 92.$$

Pero había otra forma de expresar esto:

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#A + \#B - \#(A \cap B). \tag{5.1}$$

Le explicó también que esta última igualdad se conocía como el principio de inclusión-exclusión.

– Fijate que al sumar los cardinales de A y B estás contando dos veces la intersección, por lo que tenés que restarle después el cardinal de esta para eliminar los repetidos, ¿entendés? - decía moviendo la lapicera sobre la hoja con entusiasmo.

Mientras el Comadreja conversaba de esto y se iba por las ramas entraron como 15 personas más sin que ninguno de los dos se diera cuenta. Adentro La banda de Dieguito tocaba The thrill is gone.

Ejercicio 5.1.9. Construir un ejemplo similar al anterior con tres conjuntos en lugar de dos y ver cómo quedaría la igualdad (5.1).

Lo anterior puede generalizarse para una cantidad finita arbitraria de conjuntos:

Teorema 5.1.10 (Principio de Inclusión-Exclusión)**.** *Consideremos* $A_1, \dots, A_k$ *una familia de conjuntos finitos todos incluidos en un conjunto finito* X*. Luego*

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le k} \#(A_i \cap A_j)\right) + \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\le i\le k} A_i\right).$$

Demostración. Vamos a probarlo en por inducción en la cantidad de conjuntos k. En el caso $k = 1$ la fórmula se reduce a $\#X = \#A_1^c + \#A_1$.

Supongamos ahora que el principio de inclusión-exclusión se cumple para cierto k y consideremos en X la colección de subconjuntos $A_1, \dots, A_{k+1}$. Aplicando la formula a los primeros k conjuntos tenemos

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_i\right) - \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\le i\le k} A_i\right). \tag{5.2}$$

Observemos que

$$\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c = \left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c \cup \left(A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)\right).$$

Además esta unión es disjunta, por lo que

$$\#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c + \#\left(A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)\right). \tag{5.3}$$

Por otro lado, aplicándole el principio de inclusión-exclusión para k subconjuntos al segundo sumando se tiene

$$\begin{aligned}\#A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right) &= \#A_{k+1} - \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_{k+1} \cap A_i\right) \\ &\quad + \left(\sum_{1\le i<j\le k} \#(A_{k+1} \cap A_i \cap A_j)\right) - \cdots + (-1)^k\#\left(\bigcap_{1\le i\le k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

Combinando esto con las igualdades (5.2) y (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned}\#X =& \#\left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k+1} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le k+1} \#(A_i \cap A_j)\right) + \\ & \cdots + (-1)^k\#\left(\bigcap_{1\le i\le k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

El Principio de Inducción prueba entonces el teorema. $\square$

Otra formulación (quizá más útil desde el punto de vista práctico) del principio de inclusión-exclusión es la siguiente:

Principio de Inclusión-Exclusión: *Consideremos un conjunto finito X con $\#X = N$ y un conjunto de condiciones c_i, con $i \in \{1, \ldots, k\}$, que pueden ser satisfechas o no por elementos de X. La cantidad de elementos que no satisfacen ninguna condición se denota por $\overline{N}$, y la cantidad de elementos que cumplen simultáneamente las condiciones $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$ se denota por $N(c_{i_1}, \ldots, c_{i_r})$. Luego se tiene la siguiente igualdad:*

$$\begin{aligned}\overline{N} =& N - (N(c_1) + \cdots + N(c_k)) \\ &+ (N(c_1, c_2) + \cdots + N(c_1, c_k) + N(c_2, c_3) + \cdots + N(c_{k-1}, c_k)) \\ &- \cdots + (-1)^k N(c_1, \ldots, c_k).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.11. Calculemos la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 1000 que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 ni de 5. Notamos por c_1, c_2 y c_3 la condición de ser múltiplo de 2, 3 y 5 respectivamente. Luego, siguiendo la notación mostrada anteriormente, vemos fácilmente que:

- $N(c_1) = \frac{1000}{2} = 500$
- $N(c_2) = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $N(c_3) = \frac{1000}{5} = 200$
- $N(c_1, c_2) = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$
- $N(c_1, c_3) = \frac{1000}{10} = 100$
- $N(c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$
- $N(c_1, c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33.$

Por el Principio de Inclusión-Exclusión se tiene que la cantidad buscada es

$$1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266.$$

5.2. Permutaciones

Consideremos el siguiente problema:

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras A,B,C,D,E y F?.

Observamos lo siguiente: Para ocupar el primer lugar tenemos 6 posibilidades. Luego de hacer la primera elección nos quedan 5 posibilidades para ocupar el siguiente lugar. Entonces por el principio del producto, tenemos $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades para ocupar los dos primeros lugares. Siguiendo de este modo podemos concluir que la cantidad de formas de ordenar estas letras es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Para generalizar y abstraer este problema observemos que el problema de contar las formas de ordenar n símbolos diferentes es equivalente al problema de contar reordenaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Nos concentraremos entonces en este último.

Podemos ver una reordenación de $\{1, \dots, n\}$ como una función biyectiva, pues escribir la secuencia $3, 2, 4, 1, 5$ es equivalente a definir una función

$$f : \{1, \dots, 5\} \to \{1, \dots, 5\}$$

de forma tal que $f(1) = 3$ (el tres ocupa el primer lugar), $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 5$. Definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ es biyectiva}\},$$

y notamos $P_n = \#\mathcal{S}_n$. Decimos que P_n es el **número de permutaciones de n elementos**. Así la identificación de $\mathcal{S}_n$ con las formas de ordenar $\{1, \dots, n\}$ queda

$$f \mapsto f(1)f(2)\dots f(n).$$

En el primer ejemplo vimos que $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Esto nos da una idea de lo que debe ser P_n para cualquier n, que se plasma en el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $P_n = n! = n(n-1)\cdots 2$.*

Demostración. Probaremos esto por inducción. Observemos que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1 = 0!$, puesto que la función nula es el único elemento de $\mathcal{S}_n$.

Supongamos que $P_n = n!$. Luego observamos que ordenar el conjunto $\{1, \dots, n+1\}$ es un proceso que se puede hacer en dos pasos:

- Se coloca primero un elemento en el lugar $n + 1$. Para esto se tienen $n + 1$ posibilidades.
- Se ordenan los restantes n elementos en los primeros n lugares. Para esto se tienen $P_n = n!$ posibilidades.

Por el principio del producto se tiene $P_{n+1} = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$. □

Podemos interpretar la prueba anterior en los términos del Teorema 5.1.7. Aquí el conjunto I es $\{1, \dots, n + 1\}$, y para cada $i \in I$ se tiene que

$$A_i = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\} : f \text{ es biyectiva}\}.$$

Se observa que $A_i \simeq \mathcal{S}_n$ para todo $i \in I$, por lo que $\#A_i = n!$. Luego el conjunto

$$X = \{(i, f) : i \in I, f \in A_i\}$$

tiene cardinal $n!(n + 1) = (n + 1)!$. Por otro lado uno puede observar fácilmente que $\mathcal{S}_{n+1} \simeq X$, mediante la función biyectiva $f \mapsto (f(n + 1), f|_{\{1,\dots,n\}})$.

Ejercicio 5.2.2. *Una cantidad n de personas se sentaron alrededor de una de las mesas circulares del bar El Turco para jugar un juego de cartas. La silla ocupada por cada persona no tenía ninguna injerencia en el juego, sin embargo la persona que cada jugador tuviera a la derecha o a la izquierda sí que la tenía. A algunos metros de la mesa, el Comadreja se vio interesado por saber cuál sería el número de configuraciones posibles. Como no tenía papel dejó escrito el número en la mesa después de hacer algunos cálculos mentales. ¿Cuál es este número?*

El número hallado en el ejercicio anterior es llamado **permutaciones circulares de n elementos**, al que podemos notar por PC_n. En el apéndice de este capítulo puede encontrarse un estudio más detallado de este número.

5.3. Arreglos

En la sección anterior consideramos las formas de reordenar n símbolos diferentes, lo que es igual al cardinal del conjunto de funciones biyectivas de $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo. Variemos un poco esto y consideremos para dos números fijos $k \leq n$ el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(n,k) = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Luego escribimos $A_k^n = \#\mathcal{A}(n,k)$. Este número, llamado **arreglos de n elementos de largo k**, puede interpretarse como la cantidad de posibilidades de formar palabras de largo k usando n símbolos diferentes sin repetirlos.[4] Hacemos aquí, al igual que en el caso de las permutaciones, la identificación

$$f \mapsto f(1)f(2)\ldots f(k).$$

Es claro que $A_n^n = P_n$.

Queremos encontrar una fórmula para A_k^n. Para esto observemos que definir una función $f \in \mathcal{A}(n,k)$ puede hacerse en dos pasos:

1. Se elige $f(1)$, para lo cual se tienen n posibilidades.

2. Se completan las imágenes de los restantes números $2, \ldots, k$. Para esto se tienen A_{k-1}^{n-1} posibilidades.

Del principio del producto obtenemos

$$A_k^n = nA_{k-1}^{n-1} = n(n-1)A_{k-2}^{n-2} = \cdots = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

[4] En la bibliografía la notación para los arreglos puede variar. Por ejemplo el cardinal de $\mathcal{A}(n,k)$ puede notarse A_n^k. Este número también puede encontrarse nombrado por “arreglos de k en n”.

5.3.1. Arreglos con repetición

Supongamos ahora que permitimos repeticiones en el caso anterior, es decir, consideramos palabras de largo k escritas en un abecedario de n letras. La cantidad de formas de hacerlo se denotará por AR_k^n. Estos son los **arreglos con repetición de n elementos de largo k**. En este caso no es necesario que k sea menor o igual a n. Observar que este número es el cardinal del conjunto

$$\{1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,k\}} = \{f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ función}\}.$$

Este es el producto cartesiano de $\{1, \ldots, n\}$ por si mismo k veces, luego por la regla del producto tenemos $\#AR_k^n = n^k$.

Observación 5.3.1. Veamos que $\{0, 1\}^{\{1,\ldots,k\}}$, el conjunto de arreglos con repetición de ceros y unos de largo k, es equipotente con $\mathcal{P}(\{1, \ldots, k\})$. Observamos que dar un subconjunto de $\{1, \ldots, k\}$ equivale a revisar uno a uno sus elementos eligiendo en cada caso si incluirlo o no en el subconjunto. Esto es asignarle a cada uno un 1 (si lo incluimos) o un 0 (si no lo incluimos). Luego ponemos

$$F : \{0, 1\}^{\{1,\ldots,k\}} \to \mathcal{P}(\{1, \ldots, k\}),\ F(f) = f^{-1}(\{1\}).$$

Para ver que esta función es biyectiva alcanza con verificar que $G : \mathcal{P}(\{1, \ldots, k\}) \to \{0, 1\}^{\{1,\ldots,k\}}$, definida por

$$G(A)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

es su inversa. Como conclusión tenemos que el cardinal de $\mathcal{P}(\{1, \ldots, k\})$ es $AR_k^2 = 2^k$. En particular se tiene que si X es un conjunto finito, entonces

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}.$$

5.3.2. Cantidad de relaciones

Consideremos un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. ¿Cuantas relaciones pueden definirse en X?

Para responder esta pregunta recordemos que el conjunto de las relaciones en X es equipotente con el conjunto de las matrices de $n \times n$ de ceros y unos (ver Sección 3.3). Luego es este último conjunto el que tenemos que contar. Observamos que una matriz de ceros y unos te tamaño $n \times n$ es un arreglo con repetición de dos elementos de largo n^2. Concluimos que existen 2^{n^2} relaciones en X.

Si ahora queremos contar la cantidad de relaciones en X que cumplan con cierta propiedad podemos mirar la caracterización de estas relaciones en términos de sus matrices asociadas (Ejercicio 3.3.2).

1. **Relaciones reflexivas:** Las relaciones reflexivas corresponden a las matrices que tienen 1 en todas las entradas de la diagonal. Luego los espacios que quedan libres son $n^2 - n$, por lo que concluimos que la cantidad de relaciones reflexivas es $2^{n^2-n} = 2^{n(n-1)}$.

2. **Relaciones simétricas:** Las relaciones simétricas se corresponden con las matrices simétricas, es decir que quedan determinadas por las entradas que están por encima de la diagonal (incluyendo la diagonal). La cantidad de estas entradas es
$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Luego la cantidad de relaciones simétricas en X es $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. **Relaciones antisimétricas:** Las relaciones antisimétricas corresponden a matrices (a_{ij}) que cumplen la condición
$$\text{Si } i \neq j \Rightarrow (a_{ij}, a_{ji}) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}. \tag{5.4}$$
Contar la cantidad de relaciones antisimétricas en X consiste entonces en contar las formas de:

   1º Poner un 0 o un 1 en cada lugar de la diagonal de una matriz de $n \times n$. Para esto tenemos 2^n posibilidades.

   2º Elegir para cada par (a_{ij}, a_{ji}), con $i < j$, alguno de los tres valores posibles. Aquí tenemos $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ posibilidades, puesto que hay $\frac{n(n-1)}{2}$ de estos pares (correspondientes a las entradas de la matriz por encima de la diagonal).

   Por el principio del producto tenemos que existen $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relaciones antisimétricas en X.

4. **Relaciones asimétricas:** Se deja como ejercicio.

Si comenzamos a combinar propiedades tenemos más familias de relaciones que contar. Por ejemplo uno podría preguntarse cuantas relaciones de orden o de equivalencia pueden definirse en cierto conjunto finito.

5.4. Combinaciones

Nos interesa ahora estudiar una familia de problemas que consisten en elegir subconjuntos de un conjunto dado sin tener en cuenta el orden. Miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.4.1. *Una persona entra a la heladería que queda frente al bar El Turco para comprar un cucurucho de tres sabores. Cuando llega al mostrador se encuentra* *con que tiene 20 diferentes sabores para elegir. ¿Qué posibilidades tiene de armar su helado?*[5]

En general notaremos por C_k^n al número de formas de tomar k elementos de un conjunto de cardinal n y lo llamamos **combinaciones de n tomadas de a k**.[6] De esta forma el problema planteado en el ejemplo anterior consiste en calcular C_3^{20}.

Dicho de otra forma, C_k^n es el número de subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n. Para ser más precisos podemos escribirlo como el cardinal de

$$\mathcal{C}(n,k) = \{A \subset \{1,\dots,n\} : \#A = k\}.$$

Observación 5.4.2.

1. Hay algunos números combinatorios (así le llamaremos a los números C_k^n) que son muy fáciles de determinar. Por ejemplo es claro que $C_0^n = C_n^n = 1$, pues hay un solo subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ con 0 elementos y uno solo con n elementos. También puede verse que $C_1^n = n$, esto es, la cantidad de formas de tomar un subconjunto unitario de $\{1,\dots,n\}$.

2. Observar que $C_k^n = C_{n-k}^n$, ya que elegir un subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ es equivalente a elegir su complemento.

El siguiente teorema da una relación entre números combinatorios que permite conocerlos a todos, aunque no de la forma más eficiente.

Teorema 5.4.3. *(Fórmula de Stiefel) Para $k \leq n$ se tiene la siguiente igualdad*

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n.$$

Demostración. Existen dos tipos (disjuntos) de subconjuntos de k elementos de $\{1,\dots,n+1\}$:

- Conjuntos que contienen el elemento $n+1$. Estos son C_{k-1}^n, porque para completarlos se necesitan tomar otros $k-1$ elementos de entre los restantes n.

- Conjuntos que no contienen al $n+1$. Estos son C_k^n, ya que se deben elegir k elementos del conjunto $\{1,\dots,n\}$.

Luego la tesis del teorema sale directamente del principio de la suma. □

A partir de la Fórmula de Stiefel podemos escribir los primeros números combinatorios:

[5]Suponemos que al cliente no le importa el orden en que se sirven los sabores, cosa que es a las claras un error, puesto que los sabores tienen diferente densidad y firmeza, y la discriminación en este sentido permite armar un helado más estable a fin de evitar eventos desafortunados.

[6]También puede encontrarse en la literatura la notación C_n^k o $\binom{n}{k}$, y la nomenclatura "combinaciones de n en k" o "combinaciones de k en n".

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & \\
 & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & \\
C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

La figura anterior es conocida como **Triangulo de Pascal**. Cada fila se construye sumando dos números de la fila precedente y escribiendo el resultado debajo de estos; luego se agregan unos en los extremos. De esta forma puede seguirse de manera de obtener cualquier número combinatorio que se quiera conocer.

La siguiente proposición relaciona las combinaciones con los arreglos y las permutaciones. Esto nos dará una fórmula expícita para los números combinatorios.

Proposición 5.4.4. *Tomemos $k \leq n$. Luego se cumple la igualdad*

$$A_k^n = C_k^n \cdot P_k. \tag{5.5}$$

Demostración. Aquí podemos usar el principio del producto y dividir la tarea de elegir una función inyectiva $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ en dos pasos:

1º Se elige la imagen de f, para lo que se tienen C_k^n posibilidades.

2º Se ordenan los elementos elegidos. De esta forma se define una función biyectiva entre $\{1, \ldots, k\}$ y $f(X)$, lo que termina de definir la función f. Para esto tenemos P_k posibilidades.

De lo anterior obtenermos (5.5). □

A partir de la igualdad (5.5) y las fórmulas de arreglos y permutaciones obtenemos la fórmula para las combinaciones:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{5.6}$$

De esta forma podemos terminar el Ejemplo 5.4.1 concluyendo que el cliente tiene

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140.$$

posibilidades de armar su helado.

Ejercicio 5.4.5. Probar la fórmula de Stiefel usando (5.6).

5.4.1. Teorema del binomio

Nos enfocamos ahora en el problema de calcular la n-ésima potencia de un binomio $x + y$. Veamos los primeros ejemplos:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Observamos que los coeficientes se corresponden con las primeras filas del Triángulo de Pascal. Así por ejemplo podemos escribir

$$(x + y)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_k^4 x^{4-k} y^k.$$

La formula anterior puede generalizarse para cualquier exponente, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 5.4.6 (Teorema del binomio)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k. \tag{5.7}$$

Daremos dos pruebas del Teorema del binomio. La primera será por inducción mientras que para la segunda usaremos un argumento puramente combinatorio.

Primera prueba del Teorema del binomio. Como vimos en los ejemplos, el caso para $n = 1$ ya está probado. Supongamos entonces que la fórmula (5.7) se cumple para cierto n. Luego

$$\begin{aligned}
(x + y)^{n+1} &= (x + y)\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k (x + y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_k^n x^{n+1-k} y^k + C_k^n x^{n-k} y^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n x^{n+1-k} y^k \\
&= C_0^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k + C_n^n y^{n+1}
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stiefel en el sumando del medio y las igualdades $C_0^n = C_0^{n+1} = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ en los otros, obtenemos

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k.$$

La prueba termina usando el principio de inducción. $\square$

Antes de dar la segunda prueba veamos, a modo de ejemplo, lo que sucede en le caso $n = 3$. Desarrollamos entonces $(x+y)^3$ de la siguiente manera:

1º. Del producto $(x+y)(x+y)(x+y)$ elegimos x en los tres factores, obteniendo x^3.

2º. Elegimos x en los dos primeros e y en el tercero. Obtenemos x^2y.

3º Elegimos x en el primero y el tercero e y en el segundo. Obtenemos x^2y

4º Elegimos y en el primero y x en los otros dos. Obtenemos x^2y.

Siguiendo de esta manera, los pasos 5, 6 y 7 corresponden a elegir dos y y un x, y el octavo a elegir y en todos los factores. Finalmente tenemos:

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Segunda prueba del Teorema del binomio. Generalizado la idea anterior vemos que elegir de cada uno de los n factores $(x+y)$ una variable x o y se corresponde con elegir una función $f : \{1, \dots, n\} \to \{x, y\}$. De esta forma por ejemplo $f(k) = x$ significa que estamos tomando x en el k-ésimo factor. Se tiene entonces

$$(x+y)^n = \sum_{f \in \mathcal{X}} f(1) \cdots f(n),$$

donde $\mathcal{X} = \{x, y\}^{\{1,\dots,n\}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ a $\{x, y\}$.

El coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en el desarrollo es exactamente la cantidad de funciones f que cumplen $f(1)\dots f(n) = x^{n-k}y^k$, es decir, el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \# f^{-1}(y) = k\}.$$

Este es equipotente con $\{A \subset \{1, \dots, n\} : \#A = k\}$, luego el coeficiente que estamos buscando es C_k^n. $\square$

Ejercicio 5.4.7. Escribir el desarrollo de $(x-y)^n$.

5.4.2. Combinaciones con repetición

Supongamos ahora que tenemos X un conjunto con n elementos y queremos tomar k de ellos permitiendo repeticiones. A la cantidad de posibilidades que se tienen de hacer esto la llamamos **número de combinaciones con repetición de n tomadas de a k** y lo notamos por CR_k^n. Al igual que sucede en los casos estudiados anteriormente, CR_k^n sólo depende del cardinal de X, por lo que siempre puede suponerse $X = \{1, \dots, n\}$.

Notar que CR_k^n puede interpretarse como la cantidad de posibles soluciones de la ecuación

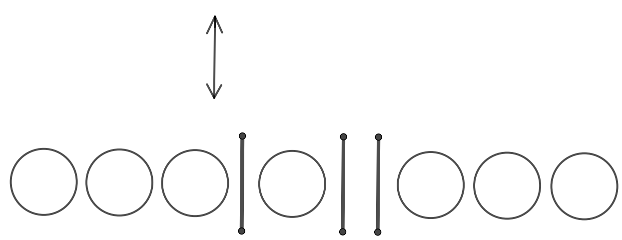
$$x_1 + \cdots + x_n = k,$$

con variables $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. Aquí x_i corresponde al número de veces que se elije el elemento i. Luego podemos escribir

$$CR_k^n = \#\mathcal{CR}(n,k) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

El número CR_k^n también puede verse como la cantidad de formas que se tienen de meter k pelotas iguales en n cajas distintas. Aquí x_i indica la cantidad de pelotas que se colocan en la i-ésima caja. Este proceso es equivalente a colocar las n pelotas en fila y poner entre ellas $n-1$ separaciones. De forma tal que las pelotas que quedan antes de la primer separación se asignan a la primera caja, las que quedan entre la primera y la segunda separación se asignan a la segunda caja y así sucesivamente. Puede interpretarse esto como una secuencia formada por dos símbolos, tanto pueden ser pelotas y separaciones como unos y ceros. Un ejemplo de esto se ve en la siguiente figura.

$$\{1,1,1,0,1,0,0,1,1,1\} \sim 3+1+0+3=7$$



Expresamos esto más formalmente en el siguiente resultado:

Proposición 5.4.8. *El conjunto $\mathcal{CR}(n,k)$ es equipotente con el conjunto de todas las $(n+k-1)$-uplas formadas por k unos y $n-1$ ceros.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{X}$ al segundo conjunto y definamos una función biyectiva $f : \mathcal{CR}(n,k) \to \mathcal{X}$ de la siguiente forma:

- Los lugares de $f(x_1,\ldots,x_n)$ de la forma $x_1 + \cdots + x_h + h$ para $h = 1,\ldots,n-1$ tienen ceros.
- El resto de los lugares tienen unos.

Se deja como ejercicio probar que la función descrita es biyectiva. □

De la Proposición 5.4.8 se puede deducir la fórmula

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

que es la cantidad de elecciones posibles de los k lugares en donde se pondrán los unos en la $(n+k-1)$-upla.

Resumiendo, el número CR_k^n puede verse como cantidad de:

- formas de elegir k elementos de un conjunto de n permitiendo repeticiones.
- soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{N}$.
- maneras de distribuir k objetos iguales en n recipientes distintos.
- Palabras de largo $n+k-1$ que se pueden formar con dos símbolos repitiendo k veces uno de ellos y $n-1$ veces el otro.

5.5. Otras cantidades interesantes

5.5.1. Permutaciones con repetición

Ejemplo 5.5.1. *El Turco estaba sentado detrás del mostrador con un frasco en la mano izquierda y la vista fija en la etiqueta. La otra mano alternaba tareas, de a ratos rascaba su pelada y de a ratos ahuyentaba una mosca que volaba cerca del frasco atraída por el azucarado contenido.*

"MERMELADA" leyó en la etiqueta como por centésima vez, y lo leyó con mayúsculas, sobreactuando la pronunciación como quién le enseña a un niño una palabra difícil.

Desde que el Comadreja le había enseñado el asunto de las permutaciones no había parado de contar ordenaciones: de los borrachos acodados a lo largo del mostrador, de las botellas en el tercer estante o los trofeos de campeonatos de truco y escoba de quince en el último. Pero se había topado con un problema nuevo con la palabra MERMELADA, pues la repetición de la M, la E y la A hacía que al aplicar la fórmula que el otro le había enseñado estuviera contando siempre de más.

Podemos imaginarnos una gran familia de ejemplos que consisten, en esencia, en el problema del ejemplo anterior: contar las formas de ordenar n símbolos sabiendo que estos se repiten con frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ (suponemos aquí que $n_1 + \cdots + n_k = n$). La cantidad descrita es llamada **permutaciones de n elementos con repeticiones de frecuencias $\mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_k}$**, y se denota por $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$. Este número puede verse como el cardinal del conjunto

$$\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k} = \left\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \# f^{-1}(i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \right\},$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Vamos a obtener una fórmula para $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$ usando el principio del producto. Para esto observemos que el proceso de ordenar k símbolos $A_1, \ldots, A_k$ con repeticiones $n_1, \ldots, n_k$ puede hacerse en los siguientes pasos:

1. Elegimos los lugares que ocuparán los n_1 símbolos A_1 entre los n lugares disponibles. Para esto tenemos $C^n_{n_1}$ posibilidades.

2. Colocamos los símbolos $A_2, \ldots, A_k$ en los $\tilde{n}_1 = n_2 + \ldots + n_k$ lugares restantes. Para esto tenemos $P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k}$ posibilidades.

Luego el principio del producto nos da la igualdad

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k} = C^n_{n_1} \cdot P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k} \tag{5.8}$$

Notando $\tilde{n}_i = n_{i+1} + \cdots + n_k$ y usando (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} P_{n;n_1,\ldots,n_k} &= C^n_{n_k} \cdot P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k} = C^n_{n_1} \cdot C^{\tilde{n}_1}_{n_2} \cdot P_{\tilde{n}_2;n_3,\ldots,n_k} = \cdots = C^n_{n_1} \cdot C^{\tilde{n}_1}_{n_2} \cdots C^{\tilde{n}_{k-1}}_{n_k} \\ &= \frac{n!}{\tilde{n}_1! n_1!} \cdot \frac{\tilde{n}_1!}{\tilde{n}_2! n_2!} \cdot \frac{\tilde{n}_2!}{\tilde{n}_3! n_3!} \cdots \frac{\tilde{n}_{k-1}!}{\tilde{n}_k! n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}. \end{aligned}$$

Usando esta fórmula podemos rápidamente resolver el problema planteado en el Ejemplo 5.5.1. Observar que las repeticiones correspondientes a las letras M, E, R, L, A y D son $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$ y $n_6 = 1$, luego la cantidad buscada es

$$P_{9;2,2,1,1,2,1} = \frac{9!}{2!2!1!1!2!1!} = \frac{362880}{8} = 45360.$$

Usemos ahora las permutaciones con repetición para generalizar el teorema del binomio (Teorema 5.4.6).

Teorema 5.5.2 (Teorema Multinomial)**.** *El coeficiente del monomio $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ es*

$$P_{n;n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

Observar que si $k = 2$, entonces $C^n_{n_1} = P_{n;n_1,n_2}$, de donde sale la fórmula dada por el Teorema del Binomio.

Demostración. Siguiendo la idea de la prueba combinatoria del Teorema 5.4.6 observamos que

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{f \in \mathcal{X}} f(1) \cdots f(n),$$

donde $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_k\}^{\{1,\ldots,n\}}$. Tenemos entonces que el coeficiente de $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$ en el desarrollo es el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \#f^{-1}(x_i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k\},$$

que es $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$ ya que el conjunto descrito es claramente equipotente con $\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k}$. □

Para ilustrar la demostración anterior supongamos que $n = 5$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 2$ y que queremos formar $x_1^2 x_2 x_3^2$. Una manera de obtener este monomio es haciendo la siguiente elección (marcada en negrita):

$$(x_1+x_2+x_3)^5 = (x_1+x_2+\mathbf{x_3}).(x_1+\mathbf{x_2}+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(x_1+x_2+\mathbf{x_3}).$$

Esto se identifica con la palabra $x_3x_2x_1x_1x_3$. Luego las formas de obtener dicho monomio en el desarrollo están en biyección con el conjunto de las palabras de largo cinco que se pueden formar con tres variables repitiendo dos veces x_1 y x_3. Esta cantidad es, como ya vimos, $P_{5;2,1,2}$.

Ejercicio 5.5.3. Escribir una prueba por inducción del Teorema Multinomial.

5.5.2. Desordenes

Consideramos aquí el siguiente problema: dada una palabra formada por n símbolos diferentes, ¿cuántas palabras se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original? Llamaremos a este número **desordenes de n elementos** y lo notaremos por D_n. Observamos que este número es el cardinal del conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyctiva}, f(i) \neq i \text{ para todo } i\}$$

Una forma de hallar D_n es usando el principio de inclusión-exclusión. Para esto definimos

$$A_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ biyectiva}, f(i) = i\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_n = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P_{n-k}$ y que hay C_k^n intersecciones de esta forma, luego

$$D_n = P_n - nP_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_i^n P_{n-i}.$$

5.5.3. Cantidad de funciones sobreyectivas

Nos preguntamos ahora cuantas funciones sobreyectivas pueden definirse de un conjunto de n elementos a un conjunto de k elementos ($k \leq n$), es decir, cuál es el cardinal de

$$\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : f \text{ sobreyectiva}\},$$

al que notamos por $Sob(n, k)$.

Para encontrar una fórmula para este número usaremos el principio de inclusión-exclusión. Consideramos entonces $Z = \{1, \ldots, k\}^{\{1,\ldots,n\}}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, k\}$, que tiene cardinal k^n, y los subconjuntos

$$A_i = \{f \in Z : i \notin f(\{1, \ldots, n\})\}.$$

Es claro que el conjunto de funciones sobreyectivas es $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = (k - \ell)^n$ y que hay C_ℓ^k intersecciones de esta forma. Luego tenemos

$$\begin{aligned} Sob(n, k) &= k^n - C_1^k (k-1)^n + C_2^k (k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k 1^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k (k-i)^n. \end{aligned}$$

El número

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} Sob(n, k)$$

se llama **número de Stirling de segunda especie** y denota la cantidad de particiones de k subconjuntos que pueden hacerse en un conjunto de n elementos. El número total de particiones se conoce como el n-ésimo **número de Bell** y se denota por

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k).$$

Este puede interpretarse también como el número de relaciones de equivalencia que es posible definir en un conjunto con n elementos.

5.6. Apéndice

I. Recordemos el problema dado al principio del capítulo: ¿Cuántas palabras de cinco letras no tienen dos vocales juntas?

Para resolver este problema podemos dividir en cuatro casos:

<u>Palabras con tres vocales</u>: Tenemos en este caso que todos los lugares impares de la palabra tienen vocal, luego tenemos 5^3 formas de llenar estos lugares con vocales y 22^2 de llenar los restantes con consonantes.

Palabras con dos vocales: Aquí primero debemos elegir dos lugares de entre los cinco donde colocar las vocales, tenemos 5 formas para hacerlo. Después de hecho esto, tenemos 5^2 formas de llenar estos lugares y 22^3 de llenar el resto.

Palabras con una vocal: Tenemos 5 formas de elegir el lugar donde irá la vocal y 5 formas de llenarlo. Luego hay 22^4 formas de llenar los lugares restantes.

Palabras sin vocales: Aquí tenemos 22^5 palabras posibles.

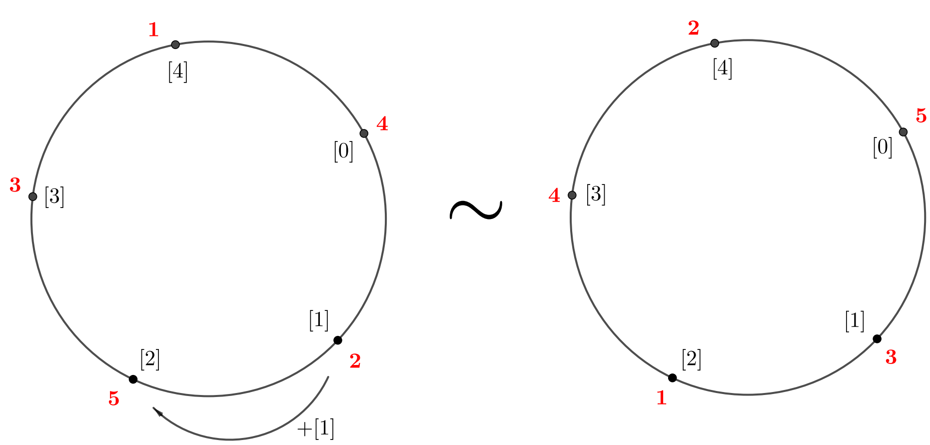
En conclusión, la cantidad buscada es

$$5^3 \cdot 22^2 + 5 \cdot 5^2 \cdot 22^2 + 5 \cdot 5 \cdot 22^4 + 22^5 = 12401532.$$

II. Permutaciones circulares

Vamos a aprovechar lo que sabemos de relaciones de equivalencia para expresar PC_n como el cardinal de un conjunto.

Observemos que la diferencia entre el proceso descrito en el Ejercicio 5.2.2 y las permutaciones es que los n elementos se ordenan de forma circular en lugar de ordenarse de forma lineal, por lo que se corresponde con una función con el mismo codominio (el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ correspondiente a los elementos a ordenar) pero con un dominio diferente (correspondiente a los lugares a ocupar). Para emular un dominio circular de n elementos consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_n$, es decir, el cociente de $\mathbb{Z}$ por la relación de congruencia módulo n.



Observamos que sumar $[1]$ en $\mathbb{Z}_n$ corresponde a hacer un giro de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ (por lo que sumar $[k]$ es hacer un giro de $\frac{2\pi k}{n}$). Vamos a querer que una distribución de los números $\{1, \ldots, n\}$ en dicho círculo sea equivalente a una rotación de la misma, tal como se ve en la figura.

Teniendo en cuenta estas observaciones definimos en el conjunto

$$X = \{f : \mathbb{Z}_n \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es biyectiva}\}$$

la relación de equivalencia $\sim$ por

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f([x]) = g([x+k]) \text{ para todo } [x] \in \mathbb{Z}_n.$$

Luego PC_n es el cardinal del conjunto $X/\sim$.

Observar que si $\sim$ es una relación de equivalencia cualquiera en un conjunto finito X, entonces $\#X$ es igual a la suma de los cardinales de todas las clases de equivalencia. Justificar la fórmula de permutaciones circulares a partir de este hecho.

Dejamos como ejercicio definir y dar una fórmula para los **arreglos circulares de n elementos de largo k**.

III. Números de Stirling de primera especie

Tomemos una permutación de n elementos $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Un **ciclo** en f es una ℓ-upla $(x_1, \ldots, x_\ell)$ de forma tal que $f(x_i) = x_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, \ell - 1$ y $f(x_\ell) = x_1$. Puede probarse que toda permutación f se descompone en ciclos, es decir, existen ciclos

$$(x_1, \ldots, x_{\ell_1}), \ldots, (x_{\ell_{k-1}+1}, \ldots, x_{\ell_k})$$

tal que $\ell_k = n$ y todos los x_i son distintos. En este caso puede escribirse

$$f = (x_1, \ldots, x_{\ell_1}) \cdots (x_{\ell_{k-1}+1}, \ldots, x_{\ell_k})$$

El **número de Stirling de primera especie sin signo** para el par (n, k) es la cantidad de permutaciones de n elementos que tienen exactamente k ciclos. Notamos este número por $z(n, k)$. Aquí es importante tener en cuenta que las ℓ-uplas $(x_1, \ldots, x_\ell)$ y $(x_2, \ldots, x_\ell, x_1)$ cuentan como un único cíclo.

Hagamos algunas observaciones inmediatas:

- $\sum_{k=1}^{n} z(n, k) = P_n = n!$
- $z(n, n) = 1$
- $z(n, 1) = PC_n = (n-1)!$

Proposición 5.6.1. *Los números de Stirling de primera especie sin signo satisfacen la siguiente relación de recurrencia:*

$$z(n, k) = (n-1)z(n-1, k) + z(n-1, k-1) \text{ para } k < n. \tag{5.9}$$

Demostración. Dividimos las permutaciones de n elementos con k ciclos en dos tipos disjuntos:

- Permutaciones que tienen el ciclo (n), es decir, que fijan el elemento n. Cada una de estas puede verse como una permutación de $n-1$ elementos con $k-1$ ciclos, y sabemos que hay $z(n-1, k-1)$ de ellas.
- Permutaciones que tienen el elemento n en un ciclo de largo $\ell \geq 2$. En este caso observamos que si retiramos el elemento n obtenemos una permutación de $n-1$ elementos con k ciclos. Este proceso construye una función sobreyectiva entre la primer y la segunda familia de permutaciones de forma tal que cada elemento del codominio tiene exactamente $(n-1)$ preimágenes. De aquí deducimos que esta cantidad es $(n-1)z(n-1, k)$.

A partir de esto y el principio de la suma se concluye (5.9). □

Observar que a partir de (5.9) se pueden determinar todos los números de Stirling de primera especie sin signo.

El **número de Stirling de primera especie (con signo)** es la cantidad $s(n, k) = (-1)^{n-k} z(n, k)$.

IV. Ejercicio: Probar las siguientes identidades en las que intervienen los números de Stirling:

a) $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) x(x-1)\cdots(x-k+1)$

b) $x(x-1)\cdots(x-k+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n, k) x^k$

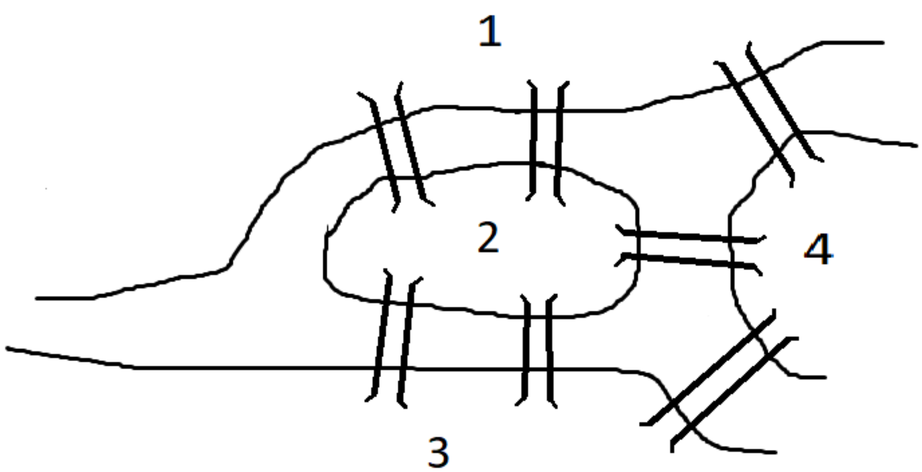
Capítulo 6

Grafos

Para motivar este capítulo presentaremos dos problemas. El primero es un problema célebre que data del siglo XVI y que, según se considera, da origen a la teoría de grafos. El segundo es un problema lúdico que circula entre los escolares (o circulaba en alguna época y alguna escuela).

1. Problema de los puentes de Königsberg

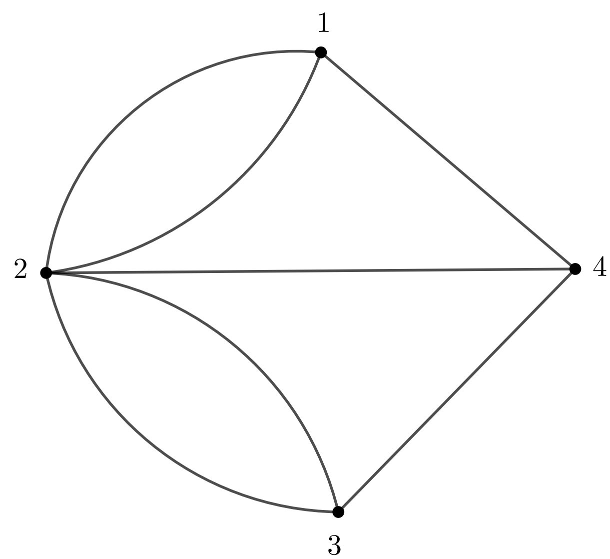
La ciudad de Königsberg (antigua capital de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, sobre el que se disponían siete puentes como se muestra a continuación:



En este escenario se plantea el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todos los puentes pasando por cada uno una única vez y terminando el recorrido en el punto de partida?

Es posible resolver el problema por fuerza bruta, es decir, listando todos los posibles recorridos que no repitan puentes y verificando si entre ellos hay uno que cumpla las condiciones. Sin embargo, el matemático suizo Leonard Euler dio una solución en el año 1736 (en una publicación titulada *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) que puede generalizarse a toda una familia de problemas similares a este.

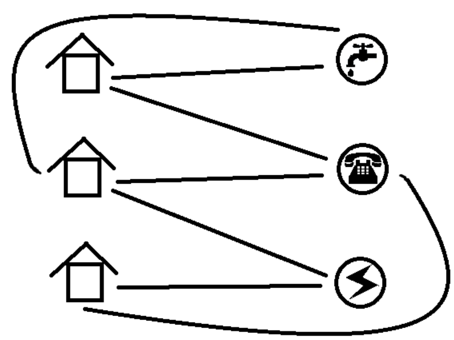
El primer paso en el análisis del problema consiste en simplificar el contexto hasta quedarse con los elementos escenciales del mismo. Observamos entonces que hay dos tipos de objetos en el problema: las regiones y los puentes. Se puede entonces representar el mapa anterior por medio de la siguiente figura, donde las regiones son representadas por puntos y los puentes por aristas. A los efectos del problema que estamos considerando no hay diferencia entre el mapa y esta figura (a la que vamos a denominar *grafo*, o más especificamente en este caso, *multigrafo*).



En la actualidad la disposición de los puentes es diferente a la descrita, por lo que el problema ha cambiado. El lector puede plantearse entonces, además del propuesto, el problema de los puentes de Kaliningrado.

2. Problema de la conexión de servicios básicos en el plano

Se disponen en un territorio plano tres casas y tres usinas de servicios públicos: agua, telefonía y electricidad. El problema consiste en conectar las tres casas a los tres servicios mediante conectores independientes (cables o ductos) que no se corten entre sí. (Como nos encontramos en un mundo plano, no es posible pasar un conector por encima de otro.)

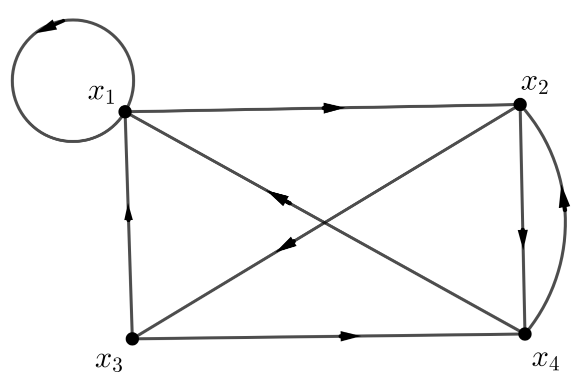


Hay una diferencia escencial entre el primer problema y el segundo. Mientras el primero depende solamente de la estructura del grafo, es decir, de como están conectados los puntos con aristas, en el segundo se agrega una nueva circunstancia: el hecho de que el grafo está contenido en el plano. Veremos más adelante que estos corresponden a dos tipos diferentes de problemas más generales y mostraremos sus soluciones.

6.1. Primeras definiciones y ejemplos

Un **grafo dirigido** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito al que llamamos conjunto de **vértices** y E es un subconjunto de $V \times V$ al que llamamos conjunto de **aristas**.

El conjunto de aristas no es otra cosa que una relación en el conjunto de vértices, luego tenemos una nueva representación (esta vez geométrica) de las relaciones definidas en un conjunto. Por ejemplo, para el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ podemos representar la relación $\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$ como sigue:



Nos interesa también definir grafos no dirigidos, es decir, que tengan aristas no orientadas. Para esto debemos reemplazar los pares ordenados por pares no ordenados.

Dados dos conjuntos X e Y consideramos su **producto simétrico**[1] como el conjunto

$$X \cdot Y = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}.$$

Un **grafo no dirigido** (también llamado simplemente **grafo**) es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset V \cdot V$. Las aristas de la forma $\{x, x\} = \{x\}$ se denominan **lazos**. Decimos que dos vértices x y y de un grafo G (no dirigido) son **adyacentes** si $\{x, y\}$ es una arista del grafo.

Observar que de forma similar al caso de los grafos dirigidos, un grafo no dirigido puede definirse como un conjunto de vértices V junto con una relación simétrica E en V.

En general usaremos la notación $G = (V, E)$ tanto para grafos dirigidos como para grafos no dirigidos. Escribimos también en este caso $V(G) = V$ y $E(G) = E$.

6.1.1. Isomorfismos de grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un **isomorfismo de grafos** si

(i) f es biyectiva, y

(ii) $\{x, y\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Es decir, dos vértices son adyacentes si y sólo si sus imágenes por f lo son.

Observar que si $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos, entonces queda definida automaticamente una función biyectiva $f : E_1 \to E_2$ (usamos la misma notación que para la función en los vértices). También notamos al isomorfismo por $f : G_1 \to G_2$ entendiendo esto como una correspondencia tanto entre los vértices como entre las aristas de ambos grafos. Emplearemos la notación $G_1 \cong G_2$ para indicar que G_1 y G_2 son **isomorfos**, es decir, que existe un isomorfismo entre ellos.

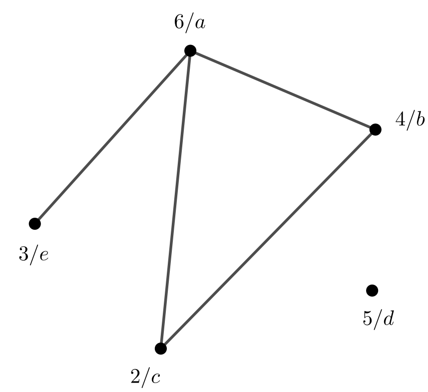
Si G_1 y G_2 son grafos dirigidos, entonces la definición de isomorfismo es análoga. La única modificación que hay que hacer es cambiar los pares en (ii) por pares ordenados.

Ejemplo 6.1.1. Consideramos los siguientes grafos:

- $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y E_1 definido por: x e y son adyacentes si x e y tienen algún divisor primo en común.
- $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ y $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}\}$.

Definimos $f : V_1 \to V_2$ por $f(2) = c$, $f(3) = e$, $f(4) = b, f(5) = d$ y $f(6) = a$. Puede verse que f es un isomorfismo entre los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.

[1] Esta nomenclatura no es estandar.

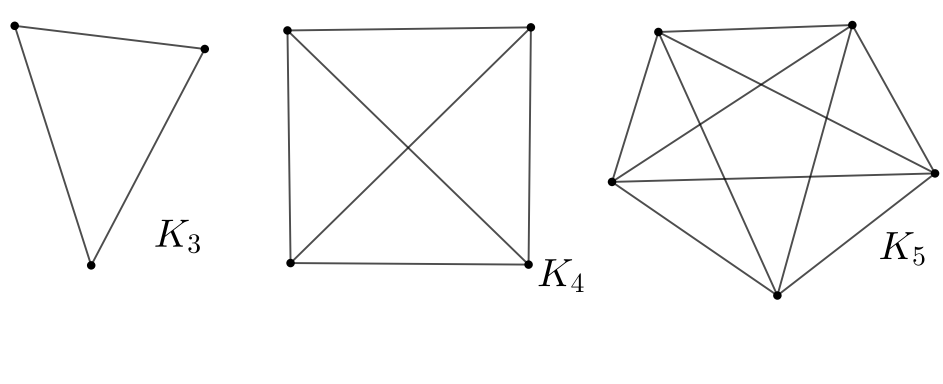


Observar que f no es el único isomorfismo entre ambos grafos. Por ejemplo, uno puede considerar $g : V_1 \to V_2$ por $g(2) = b$, $g(3) = e$, $g(4) = c$, $g(5) = d$ y $g(6) = a$. ¿Hay algún otro isomorfismo?

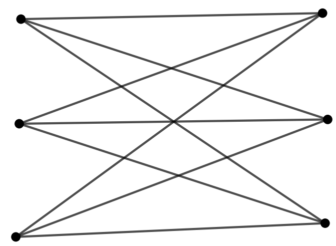
Ejercicio 6.1.2. Observar que el isomorfismo de grafos define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o grafos dirigidos.

En general nos interesarán, más que los grafos, las clases de isomorfismos de grafos. Por ejemplo, al mirar los grafos del Ejemplo 6.1.1, veremos los números y las letras simplemente como puntos que están unidos de a pares. Adoptaremos entonces la mirada que se plantea al principio del capítulo con el problema de los puentes de Königsberg, en el cual uno se olvida de que está trabajando con regiones y puentes y ve sólo un conjunto de vértices unidos por un conjunto de aristas.

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **completo** si $E = (V \cdot V) \setminus D$, donde $D = \{\{x, x\} : x \in V\}$ es el conjunto de los lazos en V. Es decir que es el grafo sin lazos de vértices V con el máximo número de aristas. Podemos observar que la clase de isomorfismo de un grafo completo sólo depende del número de vértices, es decir, para cada $n \geq 1$ todos los grafos completos con n vértices son isomorfos. Luego notamos por K_n a cualquiera de ellos (o a todos ellos).



Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $E = V_1 \cdot V_2$. Haciendo la misma consideración que para el grafo completo, ponemos la notación $K_{n,m}$ para referirnos al grafo bipartito con vértices $V = V_1 \cup V_2$ con $\#V_1 = n$ y $\#V_2 = m$.



$K_{3,3}$

6.1.2. Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido). Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.

Si fijamos un grafo (o grafo dirigido) G, podemos denotar el conjunto de los subgrafos de G como $\mathcal{S}(G)$ y definir en este la siguiente relación de orden:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2.$$

Puede verse que en general esta relación de orden no es total. En adelante, cuando consideremos el máximo/mínimo subgrafo de G que cumpla determinada propiedad P, lo haremos siempre con respecto a la relación inducida por $\leq$ en el subconjunto

$$\mathcal{S}(G, P) = \{G' \in \mathcal{S}(G) : G' \text{ satisface } P\}.$$

Un **encaje** de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ en otro grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función inyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que si $x, y \in V_1$ son adyacentes, entonces $f(x), f(y) \in V_2$ son adyacentes. Denotamos también al encaje por $f : G_1 \to G_2$, y por $f : E_1 \to E_2$ a la función inducida en las aristas. De forma similar se define la noción encaje para grafos dirigidos.

Dados dos grafos (o grafos dirigidos) G_1 y G_2 escribimos

$$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2.$$

Proposición 6.1.3. *Se tiene que $G_1 \preceq G_2$ si y sólo si existe G_1' un subgrafo de G_2 que es isomorfo a G_1.*

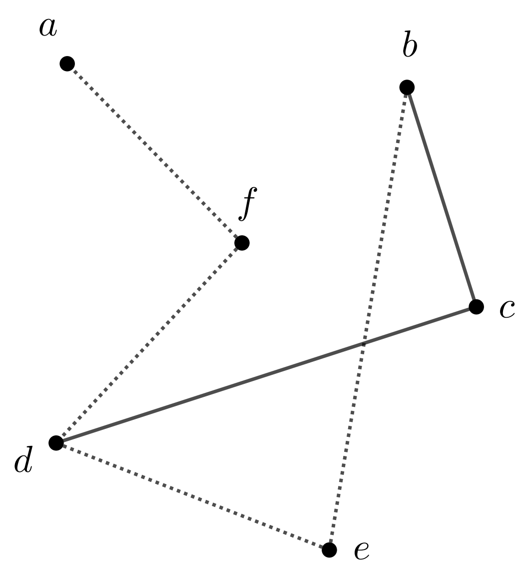
Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que tenemos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, y que $f : G_1 \to G_2$ es un encaje. Luego definimos el subgrafo $G_1' = (f(V_1), f(E_1))$. Es claro por la definición de encaje que f define un isomorfismo entre G_1 y G_1'.

($\Leftarrow$) Un isomorfismo $f : G_1 \to G'_1$ (con $G'_1 \leq G_2$) se extiende de forma obvia a un encaje $f : G_1 \to G_2$. $\square$

Como en realidad nos interesa trabajar con las clases de isomorfismo de grafos, diremos también que G_1 es subgrafo de G_2 si $G_1 \preceq G_2$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido) y $V' \subset V$ un subconjunto cualquiera. El **subgrafo generado** por V' es el máximo subgrafo de G que tiene a V' como conjunto de vértices.

En la siguiente figura puede verse el grafo generado por los vértices b, c y d de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E = \{\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$. Las líneas punteadas indican las aristas de G que no están en el subgrafo generado.

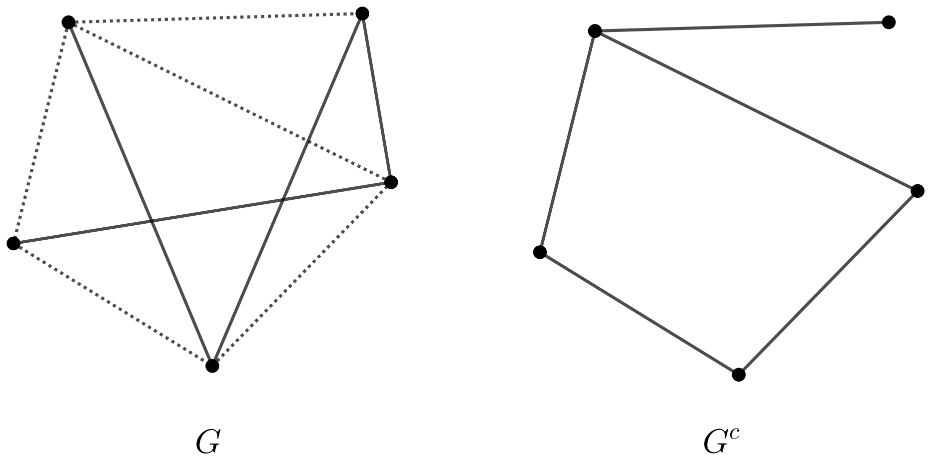


Definimos el **complemento** de un grafo sin lazos $G = (V, E)$ como el grafo

$$G^c = (V, (V \cdot V) \setminus (E \cup D)),$$

donde D es el conjunto de lazos en V. Es decir que es el grafo que resulta de sacarle a K_n las aristas de G, donde $n = \#V$.

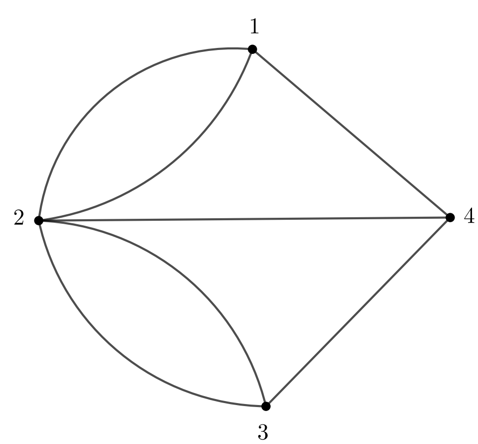
En la siguiente figura podemos ver el grafo G y su complemento G^c. Las líneas punteadas a la izquierda indican las aristas que están en K_5 pero no en G.



Ejercicio 6.1.4. Probar que si G_1 y G_2 son dos grafos tales que $V(G_1) = V(G_2)$, entonces $G_1 \leq G_2$ implica $G_2^c \leq G_1^c$. Concluir que si G_1 y G_2 tienen la misma cantidad de vértices, entonces $G_1 \preceq G_2$ implica $G_2^c \preceq G_1^c$.

6.1.3. Multigrafos

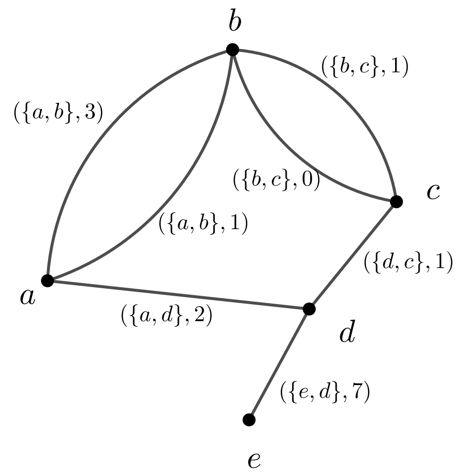
Volvamos al problema de los puentes de Königsberg y a la forma de modelarlo.

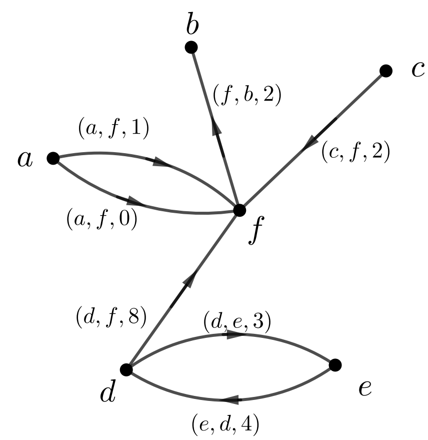


Como podemos ver en la figura, hay dos aristas entre 1 y 2 y dos aristas entre 2 y 3, luego el modelo no se ajusta a nuestra definición de grafo. Haremos entonces las siguientes definiciones:

Un **multigrafo** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \cdot V) \times \mathbb{N}$. Dados dos vértices $x, y \in V$, las aristas que los unen son los elementos de la forma $(\{x, y\}, n) \in E$.

Un **multigrafo dirigido** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \times V) \times \mathbb{N}$. En este caso las aristas que unen dos vértices $x, y \in V$ son de la forma $(x, y, n) \in E$.



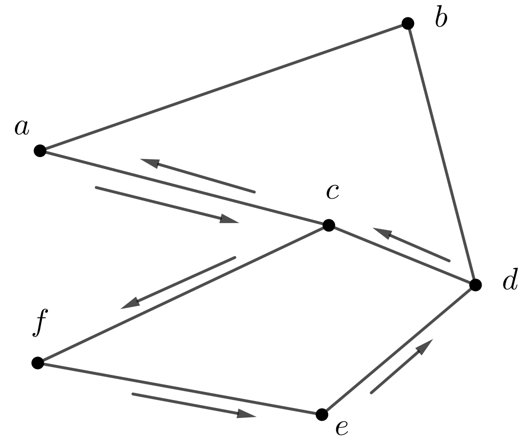


Ejercicio 6.1.5. Escribir las definiciones (tanto en el caso dirigido como en el caso no dirigido) de:

- isomorfismo de multigrafos,
- encaje de un multigrafo en otro,
- sub-multigrafo, y
- sub-multigrafo generado.

6.2. Caminatas en grafos

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $c = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tal que x_{i-1} es adyacente a x_i para todo $i = 1, \ldots, n$. En este caso decimos que el camino une x_0 con x_n. Si $x_0 = x_n$ el camino se dice **cerrado**. La **longitud** del camino c es $long(c) = n$, es decir, la cantidad de aristas (contadas con repetición) por las que pasa el camino. Un camino cerrado de la forma (x_0) se denomina **trivial** y su longitud es 0.



(a, c, f, e, d, c, a)

Decimos que un camino es un **recorrido** si no repite aristas, y que es un **camino simple** si no repite vértices. Llamaremos **circuito** a un recorrido cerrado y **ciclo** a un camino simple cerrado. Observar que un camino simple es un recorrido, salvo que se trate de un ciclo de longitud 2. También sucede que un ciclo de longitud mayor o igual a tres es un circuito.

Proposición 6.2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $x, y \in V$. Si existe un camino que une x con y, entonces existe un camino simple que une ambos vértices.*

Demostración. Supongamos que tenemos un camino de longitud n desde x a y. Consideramos entonces el conjunto de todos los caminos de x a y con longitud menor o igual a n, al que notamos por $\mathcal{C}_n$. Es claro que este conjunto es no vacío, además es finito porque V es finito. Luego existe un camino $c = (x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y)$ que minimiza la longitud de todos los elementos de $\mathcal{C}_n$.

Si c no es un camino simple, entonces existen dos índices diferentes $i, j \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $x_i = x_j$. Suponiendo que $i < j$ podemos observar que $c' = (x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k, lo que contradice el hecho de que k es el mínimo de las longitudes de los caminos en $\mathcal{C}_n$. Concluimos entonces que c debe ser un camino simple. $\square$

Ejercicio 6.2.2. Probar que un grafo bipartito no puede tener ciclos de largo impar.

Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **conexo** si para todo par de vértices $x, y \in V$ existe un camino que los une. Por otro lado, dado un grafo $G = (V, E)$, podemos definir la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de los vértices de la siguiente manera:

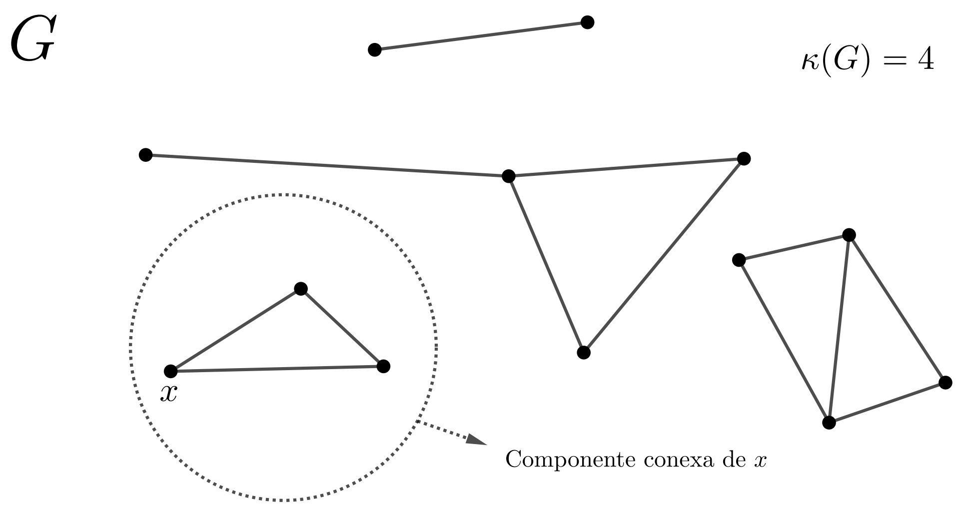
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{ existe un camino que une } x \text{ con } y.$$

Se deja como ejercicio probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

La **componente conexa** de un vértice $x \in V$ es el subgrafo de G generado por la clase de equivalencia $[x] \subset V$.

Ejercicio 6.2.3. Probar que la componente conexa de un vértice x de un grafo es el máximo subgrafo conexo que contiene a x.

Usaremos la notación $\kappa(G)$ para indicar el número de componentes conexas del grafo G, que coincide con el cardinal del cociente $V/\mathcal{R}$. Observar que G es conexo si y sólo si $\kappa(G) = 1$.



Hay una noción de distancia natural en los grafos conexos que está relacionada con la longitud: Para un par de vértices $x, y \in V$ tomamos $\mathcal{C}(x, y)$ el conjunto de los caminos que unen a x con y, luego definimos

$$dist(x, y) = \text{mín}\{long(c) : c \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

Observación 6.2.4. En general, una **distancia** o **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que cumple:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.
- Desigualdad triangular: dados tres puntos x, y, z, se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Luego $dist : V \times V \to \mathbb{N}$ es efectivamente una distancia.

El diámetro de un grafo conexo $G = (V, E)$ es

$$\text{Diam}(G) = \text{máx}\{dist(x, y) : x, y \in V\}.$$

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido también se pueden considerar en él caminos, recorridos y caminos simples. Sin embargo en este caso *dist* no resulta una verdadera distancia en los vértices ya que no se cumple la segunda condición de la Observación 6.2.4.

Para dar un camino en un multigrafo debemos especificar cuál de las aristas se toma al unir dos vértices adyacentes. Teniendo esto en cuenta definimos un **camino** en un multigrafo $G = (V, E)$ como una secuencia

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n)$$

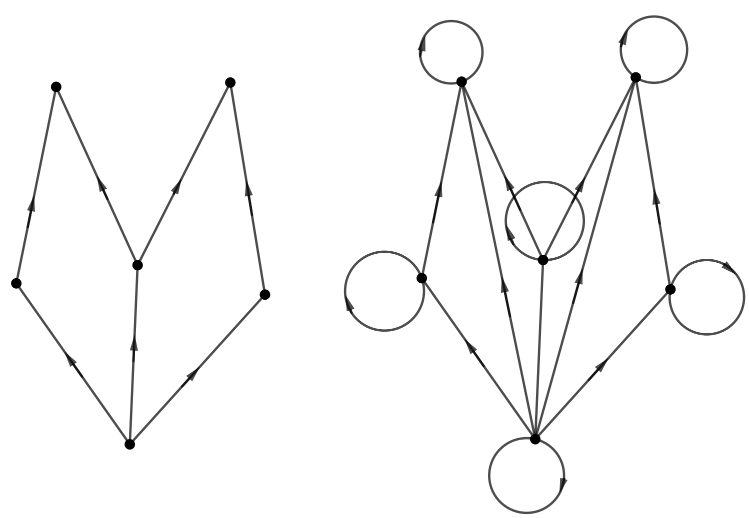
donde $x_1, \ldots, x_n \in V$ y para cada $i = 0, \ldots, n-1$, e_i es una arista que une x_i con x_{i+1}. Para multigrafos dirigidos la definición es análoga.

Luego de tener esta definición se hacen de forma obvia las definiciones de **camino cerrado**, **recorrido**, **circuito, camino simple** y **ciclo** en un multigrafo o multigrafo dirigido.

Observación 6.2.5. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido sin ciclos que no sean lazos, entonces puede definirse una relación de orden en V de la siguiente forma:

$$x \leq y \Leftrightarrow \text{existe un camino de } x \text{ a } y. \tag{6.1}$$

Por otro lado un conjunto ordenado puede verse como un grafo dirigido sin ciclos (diferentes de lazos). Sin embargo, si $\leq$ es una relación de orden en V, entonces existe más de un grafo que genera $\leq$ mediante (6.1).



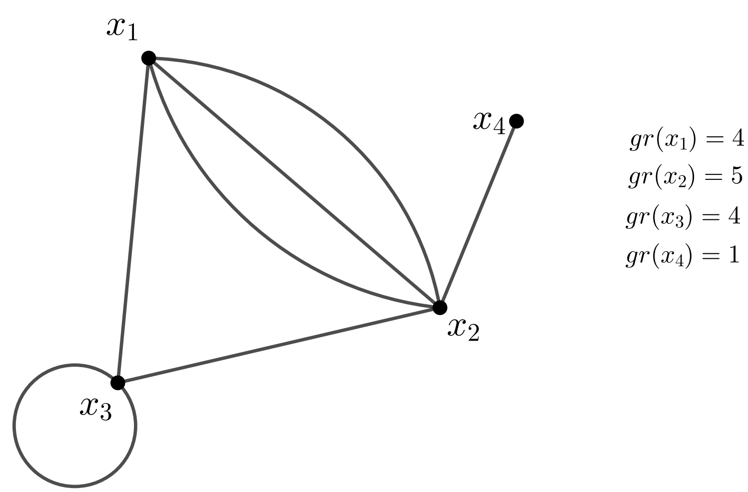
En la figura anterior pueden verse grafos dirigidos que generan la misma relación de orden $\mathcal{R}$.

6.2.1. Recorridos y circuitos eulerianos

Diremos que un recorrido o un circuito en un multigrafo no dirigido G es **euleriano** si pasa por todas las aristas del multigrafo. Observar que, en particular, el problema de los puentes de Königsberg consiste en encontrar o probar la inexistencia de un circuito euleriano. Una generalización de dicho problema puede enunciarse de la siguiente forma:

Problema 6.2.6. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo no dirigido. ¿Existe un recorrido euleriano en G? ¿Y un circuito euleriano?*

El **grado** de un vértice x en un multigrafo G, notado por $gr(x)$, es el número de aristas que inciden en el vértice. Un lazo en x cuenta doble.



Proposición 6.2.7. *Si $G = (V, E)$ es un multigrafo, entonces*

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\#E.$$

Demostración. Simplemente observamos que cada lazo contribuye a sumar dos al grado de un vértice y cada arista que une dos vértices suma uno en el grado de cada uno de ellos. $\square$

El siguiente teorema resuelve parte del Problema 6.2.6.

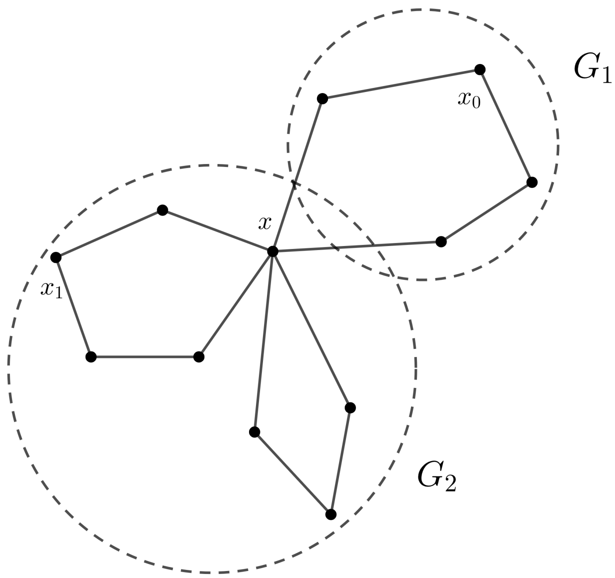
Teorema 6.2.8. *Un multigrafo conexo G admite un circuito euleriano si y solo si el grado de todos sus vértices es par.*

Para simplificar la prueba probaremos antes el siguiente lema:

Lema 6.2.9. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo conexo. Entonces existe un vértice x_0 que no desconecta G, es decir que el subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$ es conexo.*

Demostración. Probaremos por inducción en $n = \#V \geq 2$ la siguiente propiedad ligeramente más fuerte: Dado un vértice $x_0 \in V$ existe otro vértice $x_1 \in V \setminus \{x_0\}$ que no desconecta G. Esto es claro para $n = 2$.

Supongamos que es cierto para $m < n$ y tomemos $x_0 \in V$. Si $x \in V \setminus \{x_0\}$ desconecta al grafo (en otro caso no hay nada más que probar) tomamos $G_1 = (V_1, E_1)$ la componente conexa del grafo generado por $V \setminus \{x\}$ que contiene a x_0 y G_2 el subgrafo de G generado por $V \setminus V_1$.



Usando la hipótesis de inducción tomamos $x_1 \neq x$ un vértice de G_2 que no desconecta dicho grafo. Tenemos entonces que x_1 no desconecta G y es diferente a x_0. $\square$

Presentaremos dos pruebas del Teorema 6.2.8. Veamos la primera.

Demostración del Teorema 6.2.8. ($\Rightarrow$) Asumimos que existe un circuito euleriano y sea $x \in V$. Notamos por E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Podemos suponer aquí que G no tiene lazos, puesto que si los tuviera esto no alteraría la existencia de un recorrido euleriano ni la paridad de las aristas.

Escribimos el circuito euleriano empezando de x:

$$(x = x_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n = x).$$

Si en el circuito se tiene $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = x$ (con $i_1 = 0$ e $i_k = n$), entonces

$$E_x = \{e_{i_1}, e_{i_2-1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{k-1}-1}, e_{i_{k-1}}\}.$$

Concluimos que $gr(x) = \#E_x$ es par.

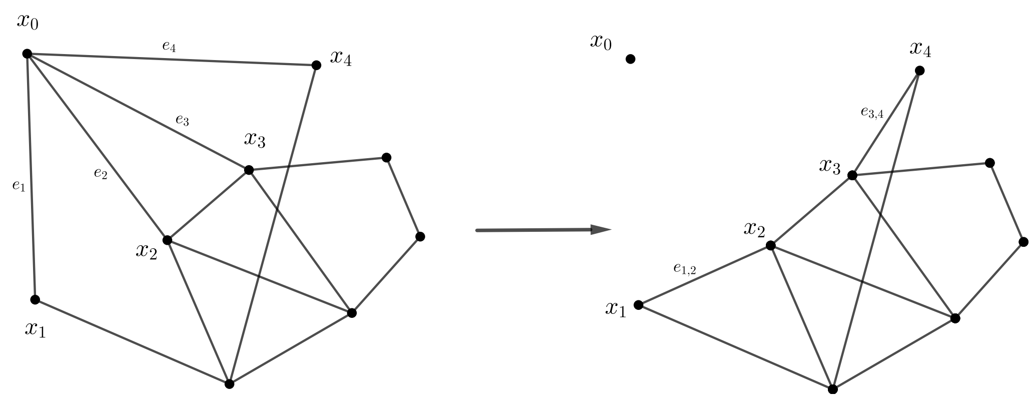
($\Leftarrow$) Lo probaremos por inducción en $n = \#V$. Es claro que se cumple para $n = 1$ porque en un multigrafo con un solo vértice las aristas deben ser lazos.

Supongamos ahora que todo multigrafo conexo con $n-1$ vértices de grado par admite un circuito euleriano y tomemos $G = (V, E)$ con n vértices de grado par. Fijamos un vértice $x_0 \in V$ que no desconecta G (aquí usamos el Lema 6.2.9). Por la observación hecha anteriormente podemos suponer que no hay lazos en x_0. A partir de G vamos a construir un grafo de vértices $V \setminus \{x_0\}$. Lo hacemos en dos pasos:

Primer paso: Si entre x_0 y sus adyacentes no hay aristas múltiples notamos por $x_1, \ldots, x_k$ a sus adyacentes y por $e_1, \ldots, e_k$ a las aristas que los unen a x_0 (respectivamente). Observemos que $k = gr(x_0)$ y por lo tanto es par. Consideramos entonces el grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V \setminus \{x_0\}$ y

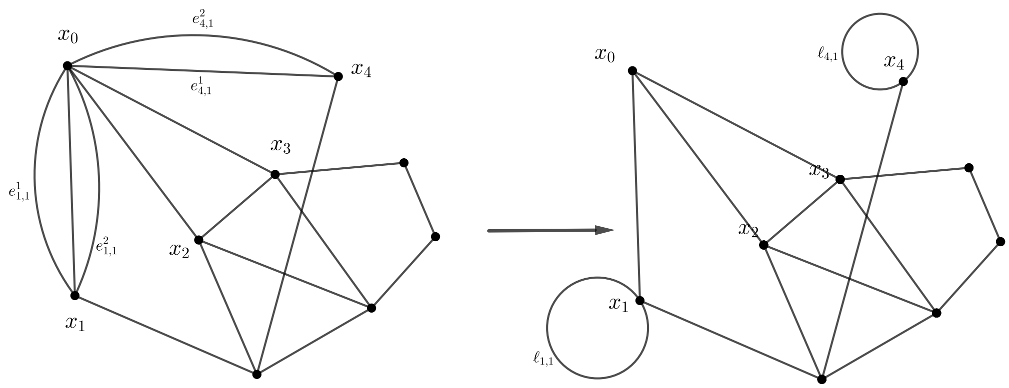
$$E' = (E \cup \{e_{1,2}, e_{3,4}, \ldots, e_{k-1,k}\}) \setminus \{e_1, \ldots, e_k\},$$

donde $e_{i,i+1}$ son nuevas aristas que unen los vértices x_i y x_{i+1}.



Observar que G' tiene $n-1$ vértices de grado par, pues el proceso descrito no cambia el grado de los vértices $x_1, \ldots, x_k$; entonces por hipótesis de inducción admite un circuito euleriano. En este circuito cambiamos las secuencias $x_i, e_{i,i+1}, x_{i+1}$ por la secuencia $x_i, e_i, x_0, e_{i+1}, x_{i+1}$ y la secuencias $x_{i+1}, e_{i,i+1}, x_i$ por la secuencia $x_{i+1}, e_{i+1}, x_0, e_i, x_i$, con lo que obtenemos un circuito euleriano en G.

Segundo paso: En el caso general suponemos que entre x_0 y x_i hay m_i aristas. Dividimos m_i entre dos y escribimos $m_i = 2q_i + r_i$ con $r_i \in \{0, 1\}$. Definimos entonces el grafo $G'' = (V, E'')$ a partir de G, en el que se agregan q_i lazos a x_i y se borran $2q_i$ de las aristas que unen x_i con x_0. Notamos $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,q_i}$ a los nuevos lazos agregados al vértice x_i. Cada lazo $\ell_{i,j}$ sustituye a dos aristas $e^1_{i,j}$ y $e^2_{i,j}$ que unen x_i con x_0. Observar que esto no altera la paridad del grado de los vértices.



Si G'' queda conexo (que en este caso es lo mismo que decir que x_0 no queda aislado), entonces cumple con lo supuesto en el primer paso y por lo tanto admite un circuito euleriano c. Luego, cambiando en c cada lazo ℓ_{ij} por la secuencia $e^1_{i,j}, x_0, e^2_{i,j}$, obtenemos un circuito euleriano en G.

Si G'' queda disconexo se toma un circuito euleriano c en el multigrafo que resulta de quitar a G'' el vértice x_0, y luego se construye un circuito euleriano en G llevando a cabo el mismo proceso de sustitución de lazos que antes.

□

Demostración alternativa del Teorema 6.2.8. [2]

Dejaremos tal como está la prueba de ($\Leftarrow$) en la primera demostración y probaremos sólo la otra implicación. Lo haremos por inducción en la cantidad de aristas, que denotaremos por n. Se dejan al lector los primeros casos ($n = 1, 2, 3$).

Supongamos que tenemos un multigrafo conexo G con n aristas tal que todos sus vértices tienen grado par, y que todo multigrafo conexo con $m < n$ aristas que cumpla esta misma condición admite un circuito euleriano.

Fijemos cualquier vértice x_0 de G. Si G tiene un lazo en x_0 entonces el multigrafo que resulta de quitarle a G dicho lazo admite un circuito euleriano por hipótesis de inducción. Esto implica que también G admite un circuito euleriano. Suponemos entonces a partir de ahora que no hay lazos en x_0.

<u>Afirmación:</u> Existe un circuito C que empieza y termina en x_0.

Tomamos un recorrido en G que comience en x_0 y tenga longitud máxima. Lo escribimos

$$C = (x_0, e_1, \ldots, e_m, x_m), \tag{6.2}$$

donde las aristas $e_1, \ldots, e_m$ son todas diferentes pero los vértices $x_0, \ldots, x_m$ pueden repetirse. Esto puede hacerse porque las longitud de todo recorrido en G puede ser a lo sumo $\#E$.

[2] Esta prueba es la dada en [G]. Fue añadida en estas notas a último momento por ser más simple que la propuesta originalmente.

Si $x_0 \neq x_m$, entonces suponemos que $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = x_m$ con índices todos diferentes y escritos en forma creciente (e $i_1 \neq 0$). Luego las aristas pertenecientes al recorrido que inciden en x_m son

$$e_{i_1}, e_{i_1+1}, e_{i_2}, e_{i_2+1}, \ldots, e_{i_k}, e_{i_k+1}, e_m.$$

En la anterior lista de aristas puede haber repeticiones pero solo de la forma $e_{i_\ell+1} = e_{i_{\ell+1}}$, en este caso dicha arista debe ser un lazo en x_m. Teniendo esto en cuenta tenemos que el grado de x_m en C (mirado ahora como multigrafo) es impar. Como el grado de x_m en G es par debe haber otra arista e diferente a las anteriores que conecta x_m con un vértice y (no necesariamente diferente a los anteriores). Luego el recorrido

$$(x_0, e_1, \ldots, e_m, x_m, e, y)$$

es estrictamente más largo que C, lo que es absurdo. Concluimos entonces que $x_0 = x_m$, y por lo tanto C es un circuito. Esto termina la prueba de la afirmación.

Tomemos ahora G' el multigrafo que resulta de quitarle a G todas las aristas de C y los vértices que quedan aislados al quitar dichas aristas. El circuito C es un circuito euleriano sobre si mismo, por lo que el grado de cada uno de sus vértices para C debe ser par. Como para cada vértices x en G' se tiene

$$gr_G(x) = gr_{G'}(x) + gr_C(x),$$

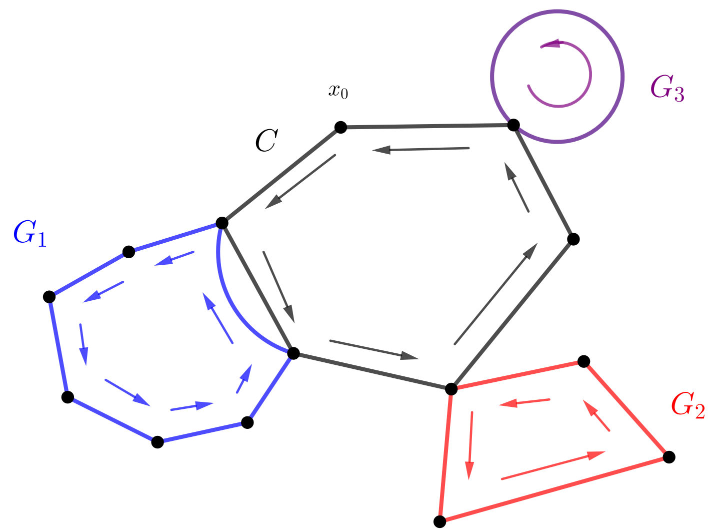
tenemos que G' tiene todos sus vértices de grado par.

Sean $G_1, \ldots, G_r$ las componentes conexas de G'. Cada una de estas tiene necesariamente menos aristas que G, además el grado de sus vértices debe ser par, luego en cada una de ellas hay un circuito euleriano.

Consideramos el circuito C como en (6.2) y suponemos que tenemos índices $j_1, \ldots, j_r$ tal que x_{j_ℓ} es el primer vértice de G_ℓ que aparece en el circuito C. Tomamos para cada ℓ un circuito euleriano $\mathbf{c}_\ell$ en G_ℓ que comienza y termina en x_{j_ℓ}. Luego construimos en G el circuito

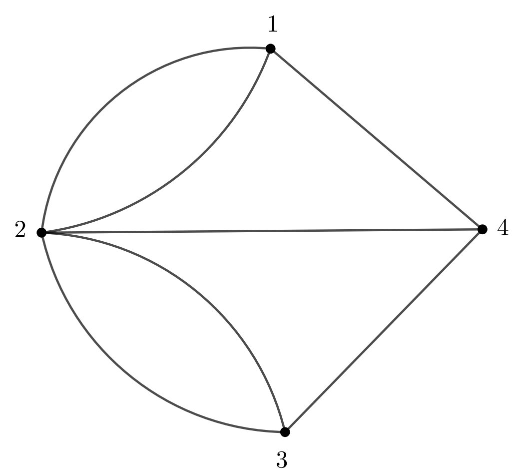
$$(x_0, e_1, \ldots, e_{j_1-1}, \mathbf{c_1}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_r-1}, \mathbf{c_r}, e_{j_r}, \ldots, x_m = x_0).$$

Este es necesariamente euleriano pues pasa por todas las aristas de C y de los subgrafos $G_1, \ldots, G_r$.



□

Utilizando el Teorema 6.2.8 podemos rápidamente concluir la solución del problema de los puentes de Königsberg.



Vemos que $gr(1) = gr(3) = gr(4) = 3$ y $gr(2) = 5$, por lo que no puede haber un circuito euleriano. Como se ve en el siguiente corolario tampoco puede haber un recorrido euleriano abierto.

Corolario 6.2.10. *Un multigrafo conexo G admite un recorrido euleriano abierto si y sólo si dos de sus vértices tienen grado impar y el resto tienen grado par.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un recorrido euleriano $(x_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, x_n)$. Luego si agregamos al grafo G una arista que une x_0 con x_n tenemos que existe un circuito euleriano. Por el Teorema 6.2.8 se tiene que el grado de todas las aristas de este nuevo grafo es par. Por lo tanto el grado de todos los vértices del grafo original G es par, salvo para x_0 y x_n, que tienen grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que x e y son los vértices que tienen grado impar. Se considera G' el grafo que resulta de agregarle una arista a G uniendo x con y. Luego los vértices de G' tienen todos grado par, por lo que existe un circuito euleriano en G'. Es claro entonces que existe un recorrido euleriano en G que une x con y. $\square$

Para el caso de un multigrafo dirigido $G = (V, E)$ podemos hacer la siguientes definiciones:

- El *grado entrante* de x es la cantidad de aristas entrantes en x (de la forma $(y, x, n) \in V \times V \times \mathbb{N}$). Lo notamos por $gr_-(x)$.
- El *grado salientes* de x es la cantidad de aristas salientes en x (de la forma $(x, y, n) \in V \times V \times \mathbb{N}$). Lo notamos por $gr_+(x)$.

Tenemos entonces la versión del Teorema 6.2.8 para multigrafos dirigidos:

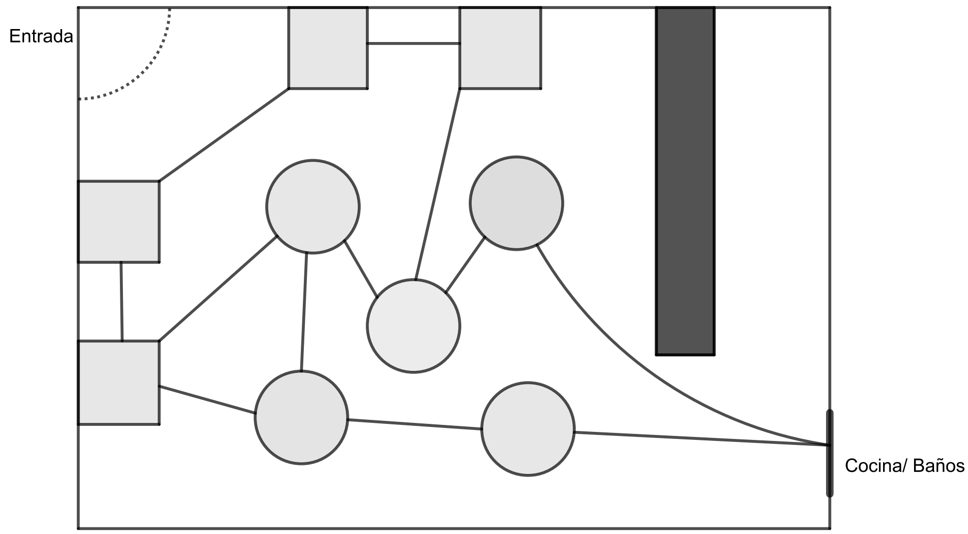
Teorema 6.2.11. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo dirigido. Entonces:*

1. *G admite un circuito euleriano si y solo si el grado entrante de cada vértice es igual a su grado saliente.*
2. *G admite un recorrido Euleriano abierto si y solo si existen dos vértices x_0 y x_1 tales que:*
   - $gr_+(x_0) = gr_-(x_0) - 1$.
   - $gr_-(x_1) = gr_+(x_1) - 1$.
   - *Si $x \neq x_0, x_1$, entonces $gr(x)_+ = gr(x)_-$.*

Las pruebas del Teorema 6.2.8 y el Corolario 6.2.10 pueden adaptarse al caso dirigido para probar el Teorema 6.2.11. Se deja como ejercicio verificarlo.

6.2.2. Caminos y ciclos Hamiltonianos

Ejemplo 6.2.12. *Influido por lo que le contaba el Comadreja (que para ese tiempo hasta dormía en el bar), el Turco se había obsesionado con los grafos. Tanto era así que una mañana se puso a dibujar líneas sobre el piso uniendo pares de mesas. Ese día le pidió al único mozo del bar que siempre que se moviera entre las mesas lo hiciera respetando las aristas que había marcado. Después de negociar una subida de sueldo a cambio del nuevo capricho, el mozo aceptó. Se muestra a continuación el plano del bar incluyendo los caminos que dibujó el Turco entre las mesas.*



Un día, ya tomado por completo por el delirio, el Turco le pidió al mozo que cambiara todos los manteles de las mesas con la condición de no pasar dos veces por la misma mesa. Le dijo además que si en un momento se quedaba sin posibilidades de continuar tendría que volver a la cocina y empezar de nuevo. Totalmente fastidiado, el mozo reboleó los manteles por el aire y se fue pateando mesas para nunca volver.

Al otro día el Turco contrató al Comadreja para cubrir el puesto, confiado en que él sí entendería sus excentricidades.

La sociedad de ambos personajes abrió la puerta a una etapa dorada del bar. Por desgracia esta duró poco. Pronto los clientes dejaron de ir. Quizá tenga que ver el hecho de que se les haya ocurrido conectar, con una línea dibujada en el suelo, la puerta de entrada con una de las mesas y exigirle a los clientes que también ellos respetaran las aristas al moverse.

Del ejemplo anterior podemos extraer el siguiente problema: Dado un grafo G, ¿existe un camino simple que pasa por todos los vértices? Un tal camino se denomina **camino Hamiltoniano**. Por otro lado, un **ciclo Hamiltoniano** es un ciclo que pasa por todos los vértices.

Consideraremos en esta sección grafos y no multigrafos por una sencilla razón: un camino o ciclo Hamiltoniano solo puede pasar por una arista que une dos vértices dados, luego un multigrafo admite un camino o ciclo Hamiltoniano si y sólo si lo admite el grafo que resulta de sacarle al multigrafo original las aristas que repiten pares de vértices adyacentes.

Determinar cuáles son exactamente los grafos que admiten caminos o ciclos Hamiltonianos es más difícil que para recorridos y circuitos eulerianos. Daremos sin embargo algunos condiciones suficientes. Una idea general que engloba a estas condiciones es la siguiente: cuanto más aristas haya en el grafo más probable será que admita un camino o ciclo Hamiltoniano.

Teorema 6.2.13. *Sea G un grafo sin lazos con n vértices.*

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*

2. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano.*

Demostración. Empecemos probando la primera parte. Para esto veamos primero que G es conexo. Si no lo fuera tomamos dos componentes conexas G_1 y G_2 y dos vértices x e y, uno en cada una de estas componentes conexas. Si G_1 tiene n_1 vértices y G_2 tiene n_2 vértices, tenemos

$$gr(x) + gr(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2,$$

lo que contradice la hipótesis.

Tomamos ahora $c = (x_1, \ldots, x_m)$ un camino simple de longitud máxima, suponemos que no es un camino Hamiltoniano, es decir que $m < n$.

Afirmación: Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de c.

Si x_1 y x_m son adyacentes o si alguno de estos vértices es adyacente a otro vértice fuera del camino c, entonces c puede prolongarse por alguno de los extremos, lo que contradice el hecho de que tiene longitud máxima.

En el otro caso todos los vértices adyacentes a los vértices x_1 y x_m están en el conjunto $\{x_2, \ldots, x_{m-1}\}$. Vamos a definir los siguientes conjuntos de índices:

$$S_1 = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_1 \text{ es adyacente a } x_k\}$$

$$S_m = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_m \text{ es adyacente a } x_{k-1}\}.$$

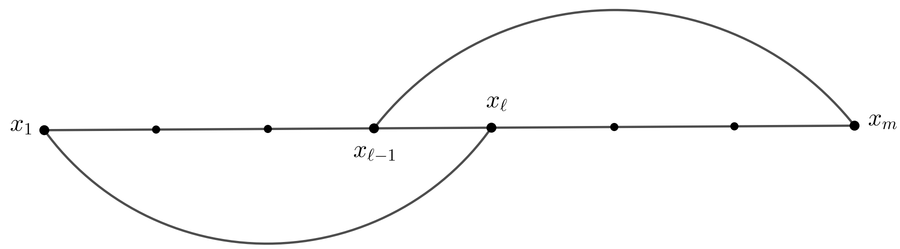
Como $gr(x_1) + gr(x_m) \geq n - 1$, entonces

$$\#S_1 + \#S_m \geq n - 3 > m - 3 = \#\{3, \ldots, m-1\},$$

lo que implica que $S_1 \cap S_m \neq \emptyset$. Tomamos $\ell \in S_1 \cap S_m$, luego x_ℓ es adyacente a x_1 y $x_{\ell-1}$ es adyacente a x_m. Obtenermos así el ciclo

$$(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_m, x_{m+1} \ldots, x_\ell, x_1).$$

Esto prueba la afirmación.



Ahora reescribimos el ciclo de largo m obtenido en la afirmación de la forma $(y_1, \ldots, y_m, y_1)$. Como $m < n$ y G es conexo, existe un vértice del ciclo y_k que es adyacente a un vértice x fuera del ciclo. Entonces existe un camino simple

$$(x, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

que es más largo que el camino c tomado al principio. Esto es absurdo porque c tiene longitud máxima. Concluimos entonces que $m = n$ y por lo tanto c es un camino Hamiltoniano.

Para probar la segunda parte observamos que por lo anterior el grafo G admite un camino Hamiltoniano. Repitiendo el argumento utilizado para probar la afirmación puede construirse un ciclo que pase por los mismos vértices de este camino, quedando así un ciclo Hamiltoniano. $\square$

Ejercicio 6.2.14. Probar que si $G = (V, E)$ es un grafo sin lazos con $\#V \geq 3$ y $\#E \geq C_2^{n-1} + 2$, entones G admite un ciclo Hamiltoniano.

Un grafo dirigido $G = (V, E)$ es de tipo **torneo** si dados dos vértices $x, y \in V$, una (y sólo una) de las aristas (x, y) y (y, x) está en E. El nombre de esta familia de grafos viene de que a partir de él se modela el resultado de un torneo del tipo *todos contra todos* sin permitir empates. Observar que quitando la dirección a las aristas de un grafo de tipo torneo se obtiene el grafo completo. Sobre estos grafos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.2.15. *Todo grafo dirigido de tipo torneo admite un camino Hamiltoniano.*

Demostración. Suponemos que $G = (V, E)$ tiene n vértices y tomamos un camino simple de longitud máxima $c = (x_1, \ldots, x_m)$. Si este camino pasa por todos los vértices $(n = m)$ entonces es un camino Hamiltoniano. Si no es así tomamos un vértice $x_0 \neq x_1, \ldots, x_m$.

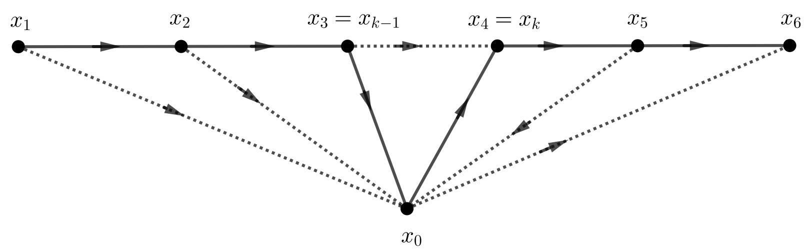
Sabemos que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ una de las aristas (x_0, x_i) y (x_i, x_0) está en E. Distinguimos dos casos:

- Si $(x_0, x_1) \in E$ o $(x_m, x_0) \in E$, entonces el camino c puede extenderse a un camino simple de longitud más grande, lo que es absurdo.

- En el otro caso se tiene que $(x_1, x_0), (x_0, x_m) \in E$, luego consideramos

$$k = \text{mín}\{i : (x_0, x_i) \in E\}.$$

  Construimos entonces el camino simple $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_k, \ldots, x_m)$ que es más largo que el camino original.

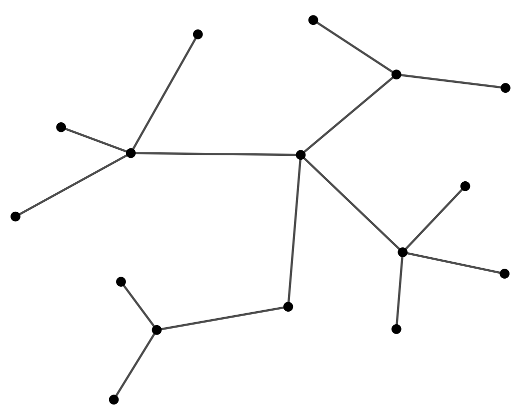


Al llegar a un absurdo en los dos casos podemos concluir que la suposición es falsa, es decir que un camino simple de largo máximo es necesariamente Hamiltoniano. □

Ejercicio 6.2.16. ¿Es cierto que todo grafo dirigido de tipo torneo admite un ciclo Hamiltoniano?

6.3. Árboles

Decimos que un grafo no dirigido G es un **árbol** si es conexo y no tiene ciclos (en particular no tiene lazos).



Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$ decimos que un subgrafo $T \leq G$ es un **árbol recubridor** si es un árbol y cumple $V(T) = V$.

Teorema 6.3.1. *Todo grafo conexo tiene un árbol recubridor.*

En la prueba del teorema usaremos el siguiente lema:

Lema 6.3.2. *Todo conjunto ordenado finito $(X, \leq)$ no vacío tiene un elemento maximal.*

La prueba del lema se deja como ejercicio. Se sugiere hacerla por inducción en el cardinal de X.

Demostración del Teorema 6.3.1. Consideramos $\mathcal{T}$ el conjunto de árboles que son subgrafos de G, lo ordenamos por:

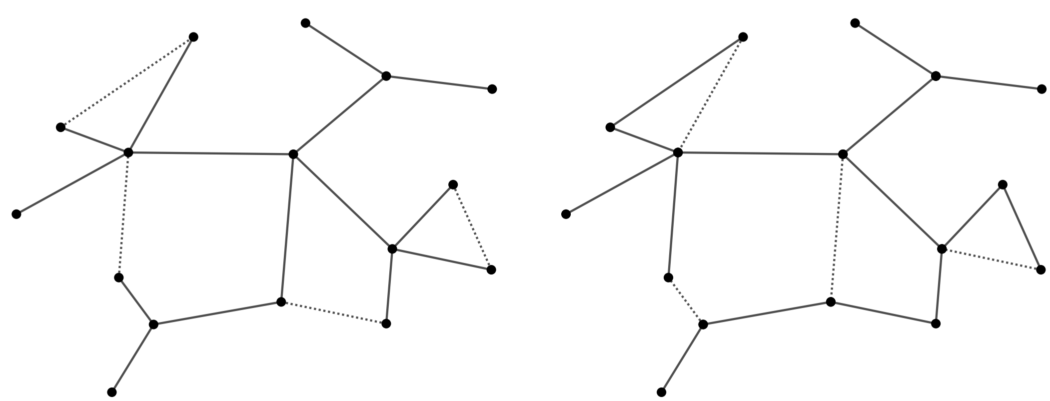
$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1 \textit{ es subgrafo de } T_2.$$

El conjunto $\mathcal{T}$ es finito, luego por el Lema 6.3.2 existe elemento maximal $T_M \in \mathcal{T}$. Vamos a probar que T_M es un árbol recubridor de G.

Si existe un vértice $v_0 \in V(G) \setminus V(T_M)$, entonces existen vértices $v_1 \in V(G) \setminus V(T_M)$ y $v_2 \in V(T_M)$ que son adyacentes en G. Esto lo vemos tomando $v \in V(T_M)$ y un camino $(v_0 = x_0, \ldots, x_n = v)$. Si consideramos $k = \max\{i : x_i \notin V(T_M)\}$, entonces podemos tomar $v_1 = x_k$ y $v_2 = x_{k+1}$.

Tenemos entonces que si T_M no es un árbol recubridor, entonces existe un árbol más grande, que resulta de agregar a T_M el vértice v_1 y la arista $\{v_1, v_2\}$, lo que es absurdo. $\square$

En general el árbol recubridor de un grafo no es único. En la siguiente figura pueden verse dos diferentes árboles recubridores de un mismo grafo G. Las líneas punteadas indican las aristas de G que no están en el árbol recubridor correspondiente.

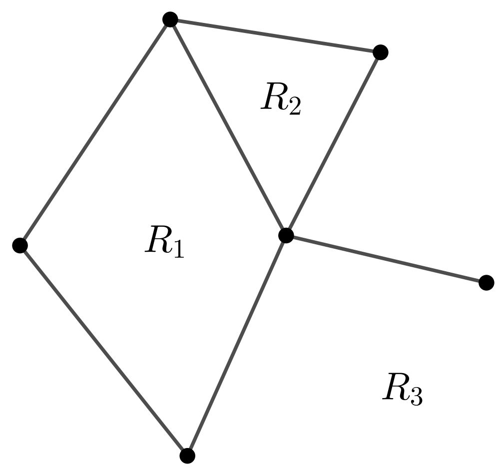


6.4. Grafos planos

El segundo problema dado al principio del capítulo (conexión de servicios básicos) puede interpretarse de la siguiente manera: ¿Es posible dibujar en el plano el grafo bipartito $K_{3,3}$ de forma tal de no intersectar sus aristas?

Podemos preguntarnos más en general si un grafo puede dibujarse en el plano sin intersectar aristas. Diremos en este caso que el grafo es **plano** o **planar**, y que su dibujo en el plano es una **representación plana** del grafo.

Fijado un grafo plano junto con su representación plana, observamos que los puntos del plano que no son vértices y no pertenecen a ninguna arista se distribuyen en lo que llamamos **regiones**. Podemos definir el **grado** de una región como la cantidad de aristas que la delimitan.



$gr(R_1) = 4$

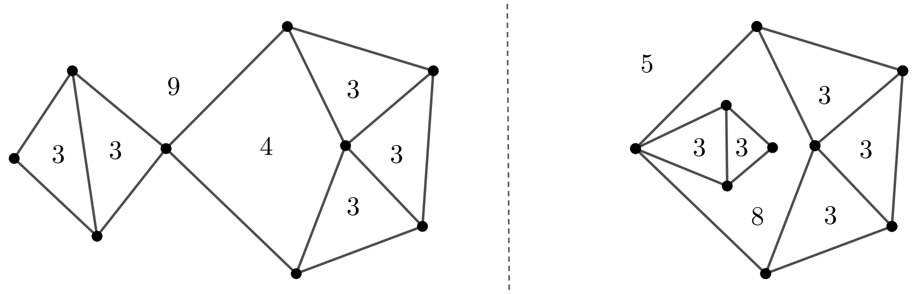
$gr(R_2) = 3$

$gr(R_3) = 7$

Hay dos cosas importantes a tener en cuenta en la definición del grado de una región:

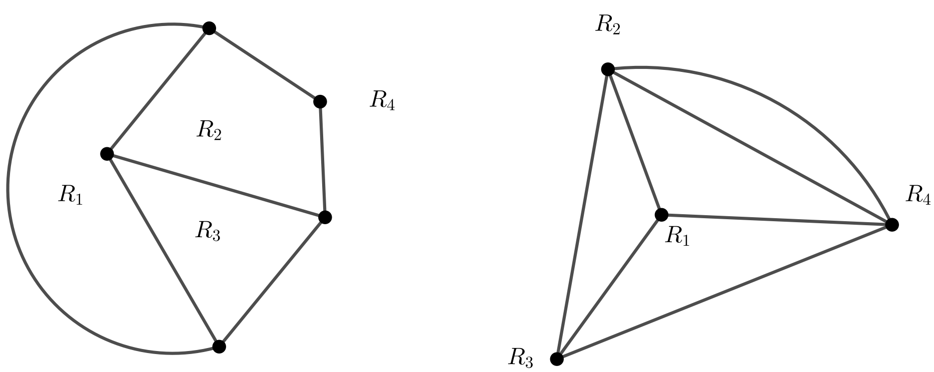
1. Si una región está delimitada por un vértice de grado 1 que no es aislado, entonces la arista que incide en ese vértice cuenta como dos lados de la región. Esto es lo que sucede con la región no acotada R_3 de la figura anterior.

2. La definición de grado de una región no es intrínseca del grafo si no que depende de la representación plana. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo, en el que tenemos dos representaciones planas del mismo grafo. El grado de cada región es indicado en su interior.



Dado un grafo o multigrafo G junto con una representación plana dada, puede definirse su **dual** G^* como el multigrafo cuyos vértices son las regiones de G y existen tantas aristas que unen dos regiones R_1 y R_2 como aristas de G estén simultaneamente en el borde de ambas regiones.

Observar que si una región de G tiene grado k, entonces esta tiene grado k como vértice del dual G^*. De aquí y del ejemplo anterior deducimos que el dual de un grafo plano depende de la representación plana fijada.



G $\qquad\qquad$ G^*

6.4.1. Característica de Euler

Dado un grafo (o multigrafo) plano G notamos por $v(G)$ a la cantidad de vértices de G, por $a(G)$ a la cantidad de aristas de G y por $r(G)$ a la cantidad de regiones de G (esta última puede depender a priori de la representación plana).

El siguiente teorema de Euler relaciona las cantidades anteriores para grafos planos.

Teorema 6.4.1. *Sea G un grafo plano conexo sin lazos junto con una representación plana fijada. Entonces*

$$v(G) - a(G) + r(G) = 2. \tag{6.3}$$

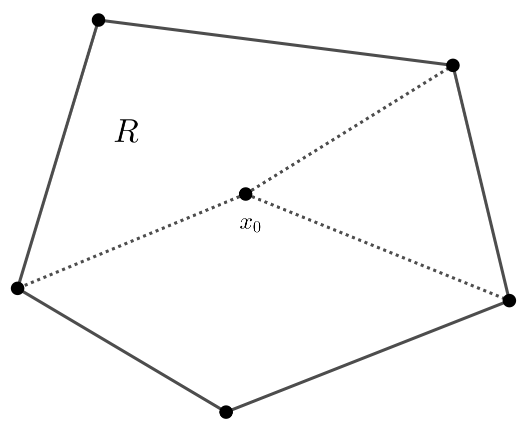
Demostración. Lo haremos por inducción en el número de vértices n.

Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro. Supongamos ahora que la formula es cierta para todo grafo de n vértices y tomemos un grafo $G = (V, E)$ con $v = v(G) = n + 1$. Notamos también $a = a(G)$ y $r = r(G)$.

Tomemos $x_0 \in V$ un vértice que no desconecta el grafo (ver Lema 6.2.9) y notemos G' al subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$. En este caso tenemos por hipótesis de inducción

$$2 = v(G') - a(G') + r(G') = (v - 1) - (a - gr(x_0)) + r(G'), \tag{6.4}$$

El vértice x_0 pertenece a una región R del grafo G'.



Pongamos $gr(x_0) = k$, luego

- si $k = 1$, entonces al agregar la única arista que incide en x_0 la región R no se divide, luego $r(G') = r$.
- si $k > 1$, cada arista que incide en x_0 es borde de dos regiones diferentes de G y a la vez cada región de G tiene en su borde dos aristas diferentes que inciden en x_0, esto implica que R se divide en k regiones. Es decir que $r = r' + k - 1$. (Esto no cambia si R es la región no acotada).

Observar que en ambos casos la ecuación (6.4) implica que $v - a + r = 2$, luego por el principio de inducción queda demostrado el teorema. $\square$

Observación 6.4.2.

1. El teorema anterior muestra que la cantidad de regiones no depende de la representación plana si no sólo del grafo G.

2. Un grafo plano puede verse como un grafo en la esfera. Se observa fácilmente que un grafo es plano si y sólo si admite una representación en la esfera (por lo que podemos llamarlos también **grafos esféricos**).

3. El número $v-a+r$ se denomina **característica de Euler**. Tenemos entonces que tanto la característica de Euler del plano como la de la esfera es 2. Sin embargo hay superficies con característica de Euler diferente.

4. Si permitimos lazos la fórmula (6.3) sigue siendo cierta. También es cierta para multigrafos (se deja como ejercicio).

Ejercicio 6.4.3. Generalizar el Teorema 6.4.1 para grafos no conexos.

Corolario 6.4.4. *Sea G un grafo plano conexo sin lazos con $a = a(G) > 2$ (notamos también $v = v(G)$ y $r = r(G)$). Luego*

(1) $3r \leq 2a$

(2) $a \leq 3v - 6$

Demostración. El grado de cada región es al menos tres (porque G no es un multigrafo y no tiene lazos). Observamos que cada arista es borde o bien de dos regiones o bien es dos veces borde de una región, luego

$$2a = \sum_{R \text{ región}} gr(R) \geq 3r.$$

Esto prueba (1).

Por el Teorema 6.4.1 y la parte (1),

$$2 = v - a + r \leq v - a + \frac{2}{3}a = v - \frac{1}{3}a,$$

lo que implica (2). $\square$

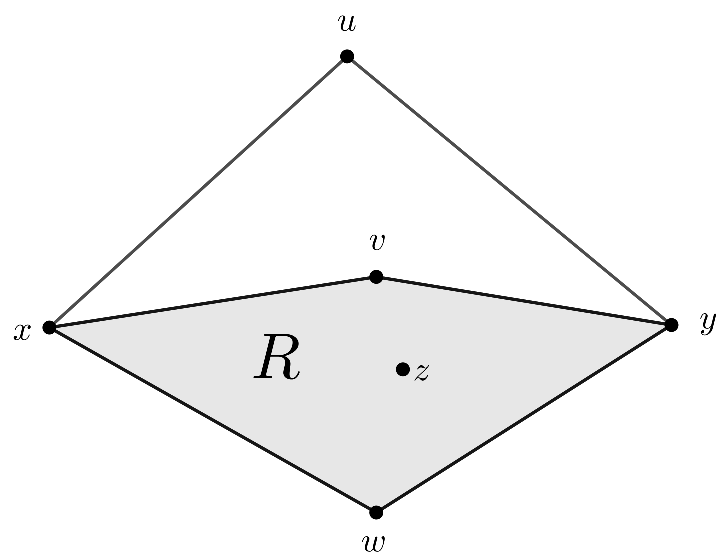
6.4.2. Grafos no planos

En este punto volvemos al segundo de los problemas presentados al principio del capítulo. La siguiente proposición responde a la pregunta planteada.

Proposición 6.4.5. *Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.*

Demostración. Veamos que $K_{3,3}$ no es plano. El caso de K_5 puede probarse usando un argumento similar.

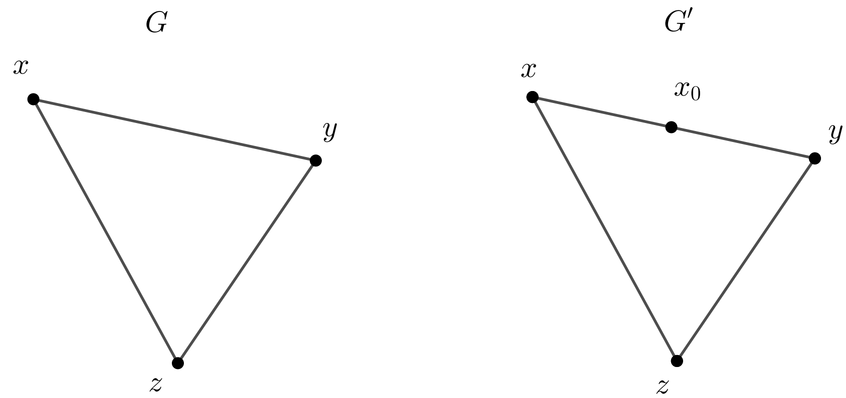
Supongamos que $K_{3,3}$ es plano y notemos por $\{u, v, w, x, y, z\}$ a sus vértices, de forma tal que u, v y w son adyacentes a x, y y z. El subgrafo generado por los vértices u, v, w, x e y es $K_{3,2}$. Usando la característica de Euler podemos deducir que este subgrafo plano tiene 3 regiones. Como un grafo bipartito no tiene ciclos de grado impar (Ejercicio 6.2.2) concluimos que las tres regiones del subgrafo tienen grado cuatro.



Llamemos R a la región (de $K_{3,2}$) que contiene al sexto vértice z. En el borde de dicha región sólo pueden aparecer dos de los tres vértices u, v y w, por lo que uno de ellos no puede conectarse con z. Esto muestra que no existe una representación plana de $K_{3,3}$. $\square$

En realidad la proposición anterior es parte de un resultado más general que enunciaremos sin demostrar. Para esto necesitamos hacer primero algunas definiciones.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es una **subdivisión elemental** de G si $V' = V \cup \{x_0\}$ y existe un par de vértices adyacentes $x, y \in V$ tal que $E' = (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, x_0\}, \{x_0, y\}\}$. Dicho de otro modo, G' se obtiene al dividir en dos una arista de G poniendo en esta un nevo vértice. De forma similar puede hacerse la definición para multigrafos.



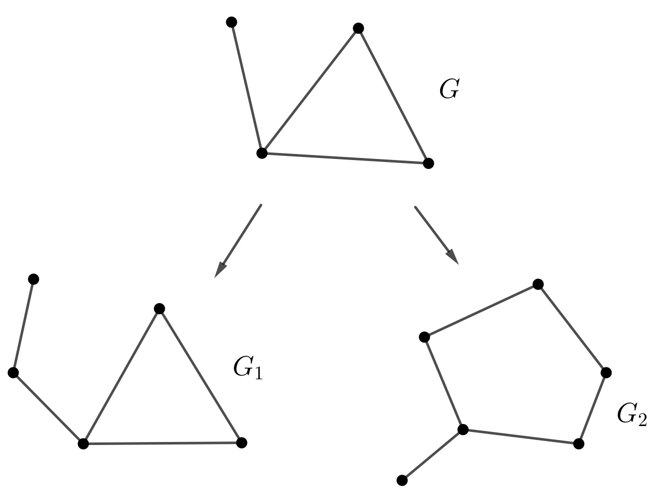
Un grafo G' es una **subdivisión** de otro grafo G si existe una secuencia finita de grafos

$$G_0 = G, G_1, \ldots, G_{k-1}, G_k = G'$$

tal que G_i es una subdivisión elemental de G_{i-1} para todo $i = 1, \ldots, k$.

Diremos que G_1 y G_2 son grafos (o multigrafos) **homeomorfos** si existen tres grafos G, G_1' y G_2' tales que

- G_1' y G_2' son subdivisiones de G,
- G_1 es isomorfo a G_1' y G_2 es isomorfo a G_2'.



Observación 6.4.6.

- La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o multigrafos $\mathcal{G}$.
- La condición de planaridad se preserva por homeomorfismo, es decir que si G_1 y G_2 son homeomorfos, entonces G_1 es plano si y sólo si G_2 lo es.
- Todo multigrafo es homeomorfo a un grafo. Más precisamente todo multigrafo tiene una subdivisión que es un grafo. Luego el problema de la planaridad de multigrafos se reduce al caso de los grafos.

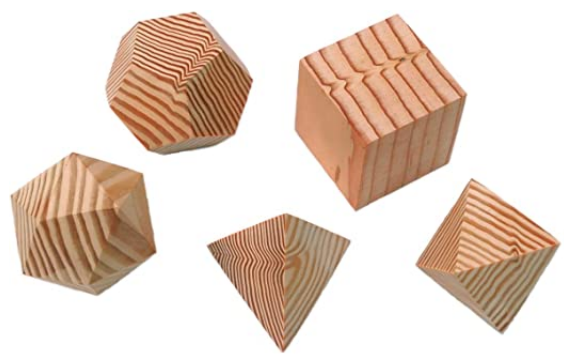
Habiendo definido estas nociones estamos listos para enunciar el siguiente teorema:

Teorema 6.4.7 (Kuratowski)**.** *Un grafo G es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.*

La prueba del teorema anterior puede encontrarse en [L] o [W].

6.4.3. Solidos platónicos

Para su cumpleaños número cincuenta y dos el Turco recibió una caja de madera con cinco solidos:



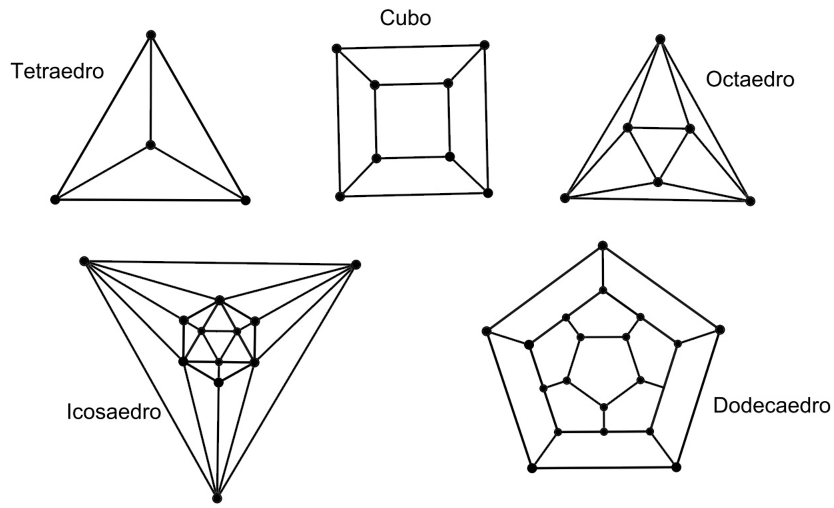
Nunca supo de quién era el regalo, había encontrado la caja sobre la barra al llegar al bar con una tarjeta que decía "Solidos platónicos. Feliz cumpleaños".

Entrenado como estaba en el asunto de los grafos reconoció rápidamente que lo que tenía delante eran cinco grafos esféricos que cumplían dos condiciones:

(i) *Todos los vértices tenían el mismo grado, siendo este mayor o igual a* 3.

(ii) *Todas las regiones tenían el mismo grado. También mayor o igual a* 3.

Supuso (de forma acertada) que estas eran las condiciones que definen a los solidos platónicos. Se preguntó si habría más que cinco solidos como estos. Rápidamente *tomó papel y lápiz y se puso a hacer algunas cuentas. También dibujó dichos grafos en el plano:*



Más tarde llegó el Comadreja al bar, y al verlo con dificultades para resolver su problema le contó el siguiente teorema:

Teorema 6.4.8. *Existen sólo cinco solidos platónicos.*

Demostración. Supongamos que G es un grafo plano que representa a un sólido platónico. Notamos entonces por m al grado de los vértices y por n al grado de las regiones. Ponemos también $v = v(G)$ y $a = a(G)$ y $r = (G)$. Tenemos

$$2a = \sum_{x \in V} gr(x) = mv \text{ y } 2a = \sum_{R \text{ región}} gr(R) = nr. \tag{6.5}$$

Usando la fórmula de la característica de Euler se tiene

$$0 < 2 = v - a + r = \frac{2a}{n} - a + \frac{2a}{m} = a\left(\frac{2m - mn + 2n}{mn}\right). \tag{6.6}$$

Lo que implica $2m - mn + 2n > 0$, que es equivalente a

$$(m-2)(n-2) = mn - 2m - 2n + 4 < 4.$$

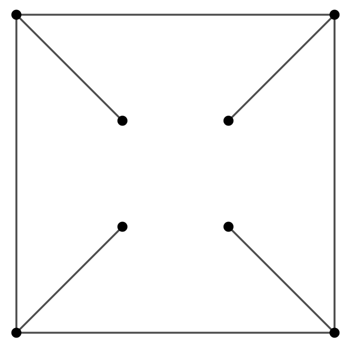
Si sumamos a esto la condición $m, n \geq 3$ tenemos las siguientes soluciones:

- $\underline{m = n = 3}$: Sustituyendo en la ecuación (6.6) tenemos $2 = \frac{a}{3}$ y por lo tanto $a = 6$. Por último las ecuaciones (6.5) nos dan $v = 4$ y $r = 4$. Esto determina que el grafo es completo de cuatro vértices, es decir que el solido es el tetraedro.

- $\underline{m = 3 \text{ y } n = 4}$: Usando nuevamente las ecuaciones (6.5) y (6.6) obtenemos $a = 12$, $v = 8$ y $r = 6$. Para ver que en este caso G es el cubo hagamos algunas observaciones:

(1) El borde de la región no acotada de G es un cuadrilátero. El resto de las aristas y vértices de G están en el interior de dicho cuadrilátero.

(2) Como el grado de cada vértice del cuadrilátero en G es 3, entonces el siguiente es un subgrafo de G:



Debemos usar aquí también que no hay regiones triangulares. Observar que ya están representados los ocho vértices de G.

(3) Como cada arista del cuadrilátero está en el borde de dos regiones de grado cuatro, la única forma de agregar las cuatro aristas restantes da como resultado el cubo.

- $\underline{m = 3 \text{ y } n = 5}$: En este caso tenemos $a = 30$, $v = 20$ y $r = 12$. Aquí podemos usar un argumento similar al del caso anterior para ver que G es el dodecaedro. Con los dos casos restantes se puede proceder de la misma manera.

- $\underline{m = 4 \text{ y } n = 3}$: Luego $a = 12$, $v = 6$ y $r = 8$. Lo que determina el octaedro.

- $\underline{m = 5 \text{ y } n = 3}$: Aquí tenemos $e = 30$, $v = 12$ y $r = 20$. Luego G es el icosaedro.

$\square$

6.5. Apéndice

I. Las definiciones de grafo plano y representación plana dadas en la Sección 6.4 son poco precisas. Para ofrecer una opción más formal consideramos la siguiente alternativa:

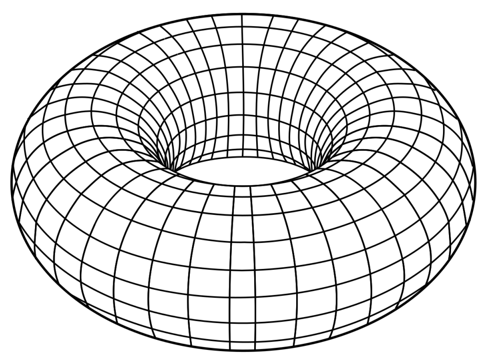
- Una **curva plana** es una función continua $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que se escribe $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ donde las funciones $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ son continuas. Diremos en este caso que α **une** $x = \alpha(0)$ con $y = \alpha(1)$.

- Para un par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\mathcal{C}(x, y)$ al conjunto de curvas planas que unen x con y. El conjunto de todas las curvas planas será notado $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. Una **representación plana** de un grafo (o multigrafo) $G = (V, E)$ es un par de funciones inyectivas $F : V \to \mathbb{R}^2$ y $H : E \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ tales que:
  - $H(\{x, y\}) \in \mathcal{C}(F(x), F(y))$
  - Si $e \in E$ y $\alpha = H(e)$, entonces $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ con $t_1 < t_2$ implica $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$. (Se eliminan las auto-intersecciones).
  - Si e_1 y e_2 son dos aristas distintas en E y $\alpha_1 = H(e_1)$ y $\alpha_2 = H(e_2)$, entonces $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$ implica $t_1, t_2 \in \{0, 1\}$. (Se eliminan las intersecciones de aristas distintas que no sean en los extremos.)
- Decimos entonces que el grafo G es **plano** (o **planar**) si admite una representación plana.

II. Ejercicio: El toro es la superficie que se obtiene al rotar el círculo

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

alrededor del eje z.



Decimos que un grafo es **tórico** si admite una representación en el toro.

a) Mostrar que $K_{3,3}$ y K_5 son grafos tóricos.

b) Calcular en algunos ejemplos la cantidad $v(G) - a(G) + r(G)$. Conjueturar un enunciado del Teorema de la característica de Euler para el toro.

c) Investigar:

1) Si existen grafos que no sean tóricos.
2) Si dado un grafo cualquiera G, existe una superficie S tal que G admite una representación en S.

III. Pelotas de fútbol

El problema de determinar cuáles son todos los sólidos platónicos es equivalente a este otro: ¿de cuántas formas se puede hacer una pelota de fútbol cosiendo cascos de cuero iguales con forma poligonal?

Ejercicio 6.5.1. Dibujar en el plano el grafo determinado por los cascos hexagonales y pentagonales en una pelota de fútbol clásica. ¿Qué otras pelotas cuyos cascos sean polígonos regulares es posible fabricar?

IV. Ejercicio: Para cada sólido plátonico G determinar cuántos isomorfismos de la forma $f : G \to G$ existen.

Bibliografía

[G] Ralph Grimaldi; *Matemática discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones.*

[H] Paul Halmos; *Teoría intuitiva de conjuntos.*

[L] Chung Laung Liu; *Introduction to combinatorial mathematics.*

[W] Dougles West; *Introduction to graph theory.*