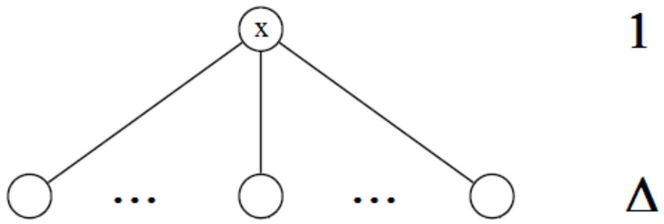
Teorema de Hoffman-Singleton.

Felipe Negreira.

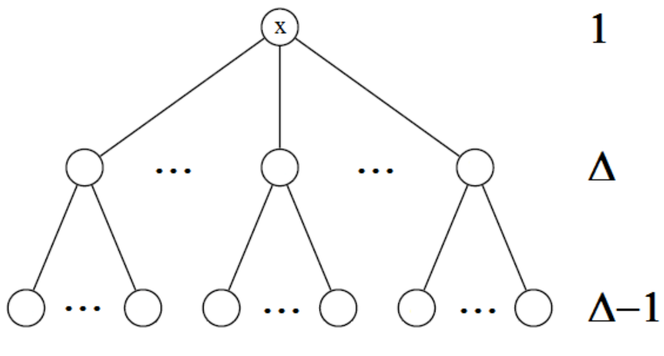
18 de junio de 2012.

Sea X un grafo regular de grado Δ, conexo y de diámetro 2. ¿Cuál es la cantidad máxima de vértices que puede tener X bajo estas condiciones?

Si x es un vértice cualquiera de X entonces por la regularidad, x tiene Δ vecinos distintos.



A su vez cada uno de estos vecinos tiene $\Delta - 1$ vecinos distintos de x; pero si se quiere maximizar la cantidad de vértices en X entonces estos vecinos de vecinos de x tienen que ser todos nuevos y distintos, es decir cada vecino de x tiene que agregar $\Delta - 1$ vértices al agregar a sus vecinos distintos de x.



No se puede seguir bajando de está forma porque de lo contrario el grafo no tendría diámetro 2. O sea que esto da una primera cota para la cantidad de vértices de X, aunque claro que hay que agregar aristas para que en efecto X sea regular de grado Δ y tenga diámetro 2. Esta cota es

$$1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 + 1.$$

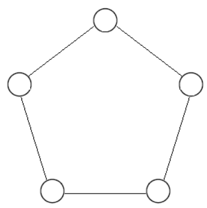
La preguntas es ahora ¿se puede alcanzar esa cota?, si es así ¿cuándo?, es decir ¿para qué valores de Δ?. La primera respuesta es la siguiente

Definición. Un *grafo de Moore de diámetro* 2 es un grafo regular conexo de diámetro 2 y con $\Delta^2 + 1$ vértices donde Δ es el grado del grafo.

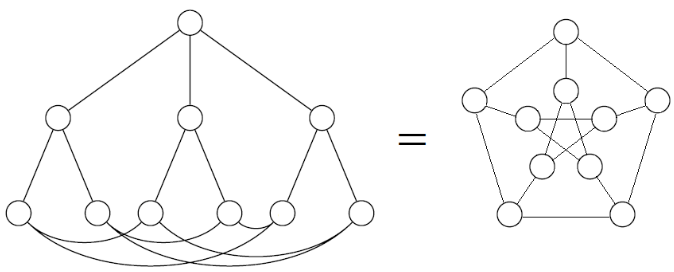
En realidad esta definición no contesta las preguntas sino que las traduce a ¿para qué valores Δ se puede construir un grafo de Moore de diámetro 2 y grado Δ?

$\Delta = 1$: No hay grafos de Moore de diámetro 2 porque sólo hay dos vértices.

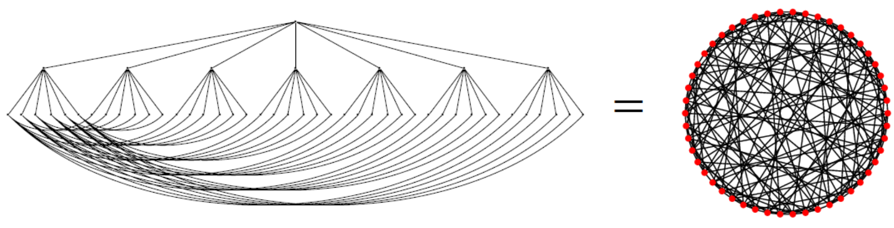
$\Delta = 2$: C_5 o el pentágono.



$\Delta = 3$: El grafo de Petersen.



Se podría seguir probando, pero cada vez sería más complicado y además inabarcable. El teorema que se va a demostrar dice que los otros valores posibles para Δ son 7 y 57. Para 7 se conoce el siguiente grafo llamado grafo de Hoffman-Singleton



mientras que para 57 no se sabe aún si existe.

Teorema de Hoffman-Singelton. *Los únicos valores posibles para el grado de un grafo de Moore de diámetro* 2 *son:* 2*,* 3*,* 7 *y* 57*.*

Demostración. De aquí en adelante X es un grafo de Moore de diámetro 2 con grado Δ y $A = A(X)$ es la matriz de adyacencia de X.

La prueba de este teorema está dividida en 4 partes.

Parte 1: Demostrar que $A^2 + A - J - (\Delta - 1)I = 0$.

Para verificar la igualdad $A^2 + A - J - (\Delta - 1)I = 0$ se cumpla se tiene que cumplir entrada a entrada.

Es preciso recordar que para todo par de vértices v y u se tiene que A_{vu} es la cantidad de caminos de largo 1 de v a u, y que A^2_{vu} es la cantidad de caminos de largo 2 de v a u, incluso aceptando $v = u$.

Si v es un vértice de X, A^2_{vv} son la cantidad de caminos de largo 2 de v a v, o en otras palabras, como X es un grafo, la cantidad de aristas en las que participa v. Ahora como el grafo es regular de grado Δ, entonces $A^2_{vv} = \Delta$.

Por otra parte A_{vv} son la cantidad de caminos de largo 1 de v a v; y como no hay lazos en X entonces A_{vv}.

Por definición $J_{vv} = 1$ y $(\Delta - 1)I_{vv} = \Delta - 1$. En suma

$$A^2_{vv} + A_{vv} - J_{vv} - (\Delta - 1)I_{vv} = 0.$$

Si v y u son dos vértices distintos de X, entonces $A_{vu} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ y } u \text{ son vecinos,} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
Además $J_{vu} = 1$ y $(\Delta - 1)I_{vu} = 0$.

Luego alcanza con demostrar que $A^2_{vu} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \text{ y } u \text{ son vecinos,} \\ 1 & \text{si no,} \end{cases}$ para ver que

$$A^2_{vu} + A_{vu} - J_{vu} - (\Delta - 1)I_{vu} = 0.$$

Si v y u son vecinos entonces hay una arista entre ellos. Luego para que $A^2_{vu} \neq 0$ tiene que haber un tercer vértice w que sea vecino de v y de u. Pero esto es imposible por el conteo de vértices hecho en la introducción, pues tomando el vértice inicial $x = v$ se tiene que X tiene a lo sumo tantos vértices como $\Delta + (\Delta - 2)(\Delta - 1) + 2(\Delta - 2) = \Delta^2 - 1 < \Delta^2 + 1$ lo cual es absurdo. En tanto cuando v y u son vecinos, $A^2_{vu} = 0$.

Si v y u son vecinos entonces como el grafo es conexo y de diámetro 2, hay un camino de largo 2 de v a u. Luego $A^2_{vu} \geq 1$. Si fuese $A^2_{vu} > 1$ entonces hay al menos dos caminos largo 2 que unen v con u; pero esto es imposible de vuelta por el conteo de vértices hecho en la introducción, pues tomando el vértice inicial $x = v$ se tiene que X tiene a lo sumo tantos vértices como $\Delta + (\Delta - 1)(\Delta - 1) + \Delta - 2 = \Delta^2 < \Delta^2 + 1$ lo cual es absurdo. En tanto cuando v y u no son vecinos, $A^2_{vu} = 1$.

Parte 2: Demostrar que los valores propios de A distintos de Δ verifican una ecuación polinómica de segundo grado.

Lo primero a observar es que como X es un grafo conexo y regular de grado Δ entonces Δ es un valor propio de A y su subespacio propio es $< (1, \ldots, 1) >$, por lo que, en efecto, A tiene valores propios distintos de Δ. Sea λ un de ellos y sea $f \neq 0$ un vector propio de λ.

Como $\lambda \neq \Delta$ entonces $f \perp (1, \ldots, 1)$ y por lo tanto $Jf = 0$. Por otra parte $Af = \lambda f$, $A^2 f = A\lambda f = \lambda^2 f$ y $(\Delta - 1)If = (\Delta - 1)f$. En suma

$$A^2 f + Af - Jf - (\Delta - 1)If = \lambda^2 f + \lambda f - (\Delta - 1)f = 0$$

y por lo tanto

$$\lambda^2 + \lambda - (\Delta - 1) = 0.$$

Parte 3: Si λ_1 y λ_2 son dichos valores propios, sean n_1 y n_2 las dimensiones de sus subespacios propios. A partir del orden conocido del grafo y de que la traza de la matriz A, hallar dos ecuaciones que relacionen Δ, n_1, n_2, λ_1 y λ_2.

Como X es un grafo de Moore de diámetro 2 entonces la cantidad de vértices de X es $\Delta^2 + 1$. Luego la dimensión de A es $\Delta^2 + 1$.

Ahora como A es diagonalizable y sus valores propios son Δ, λ_1 y λ_2, con dimensiones respectivas 1, n_1 y n_2, entonces $1 + n_1 + n_2 = \Delta^2 + 1$.

Como $A_{vv} = 0$ para cualquier vértice v, entonces la traza de A es 0. Luego como la traza se conserva por equivalencia de matrices, se tiene que $\Delta + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$.

En total

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = \Delta^2, \\ \Delta + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0. \end{cases}$$

Parte 4: Discutir los posibles valores de Δ a partir de dichas ecuaciones.

Por construcción $\begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_1 - (\Delta - 1) = 0, \\ \lambda_2^2 + \lambda_2 - (\Delta - 1) = 0. \end{cases}$

Luego se puede suponer $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4(-(\Delta-1))}}{2} = \frac{-1+\sqrt{4\Delta-3}}{2}, \\ \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4(-(\Delta-1))}}{2} = \frac{-1-\sqrt{4\Delta-3}}{2}. \end{cases}$

Llamando $D = \sqrt{4\Delta - 3}$ se tiene que $\lambda_1 = \frac{-1+D}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{-1-D}{2}$.

Por la parte anterior $\Delta + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$. Entonces

$$\Delta + \frac{-1+D}{2} n_1 + \frac{-1-D}{2} n_2 = 0,$$

lo cual implica que

$$\Delta - \frac{1}{2}(n_1 + n_2) - \frac{D}{2}(n_2 - n_1) = 0.$$

Como también $n_1 + n_2 = \Delta^2$, entonces

$$\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{D}{2}(n_2 - n_1) = 0 \text{ y en consecuencia } D(n_2 - n_1) = 2\Delta - \Delta^2.$$

Luego, en particular, como Δ es entero, $D(n_2 - n_1)$ tiene que ser entero. Por lo tanto, como también $n_2 - n_1$ es entero, si D es irracional (en cuyo caso también lo son λ_1 y λ_2), entonces $D(n_2 - n_1) = 0$, o sea $2\Delta - \Delta^2 = 0$ y como $\Delta > 0$, entonces $\Delta = 2$.

Si D es racional, entonces existen p, q enteros relativamente primos tales que $D = \frac{p}{q}$. Luego $D^2 = \frac{p^2}{q^2}$, o sea $4\Delta - 3 = \frac{p^2}{q^2}$, por lo que $q^2(4\Delta - 3) = p^2$. Y como Δ es entero esto implica que q^2 divide a p^2, pero como p y q son coprimos, entonces $q^2 = q = 1$. Luego $D = p$ es entero.

Pero además, en cualquier caso la igualdad $D(n_2 - n_1) = 2\Delta - \Delta^2$ implica que $16D(n_2 - n_1) = 32\Delta - 16\Delta^2$, lo cual se puede escribir sólo en términos de D y $n_2 - n_1$ pues

$$16\Delta^2 = (D^2 + 3)^2 \text{ y } 32\Delta = 8D^2 + 24.$$

Sustituyendo se tiene que

$$16D(n_2 - n_1) = (D^2 + 3)^2 - (8D^2 + 24) = D^4 - 2D^2 - 15,$$

lo cual implica que

$$D^4 - 2D^2 - 16D(n_2 - n_1) = 15,$$

y factorizando en D se tiene que

$$D(D^3 - 2D^3 - 16(n_2 - n_1)) = 15.$$

O sea que si D es racional, y por tanto entero, es un divisor de 15. Como además D es positivo sólo es posible que $D = 1, 3, 5$ o 15.

Si $D = 1$, entonces $D^2 = 4\Delta - 3 = 1$ y por tanto $\Delta = 1$ lo cual es contradictorio con el hecho de que el grafo tenga diámetro 2. Luego $D \neq 1$.

Si $D = 3$, entonces $D^2 = 4\Delta - 3 = 9$ y por tanto $\Delta = 3$.

Si $D = 5$, entonces $D^2 = 4\Delta - 3 = 25$ y por tanto $\Delta = 7$.

Si $D = 15$, entonces $D^2 = 4\Delta - 3 = 225$ y por tanto $\Delta = 57$.

En suma los únicos valores que puede tomar Δ son $2, 3, 7$ y 57. $\square$