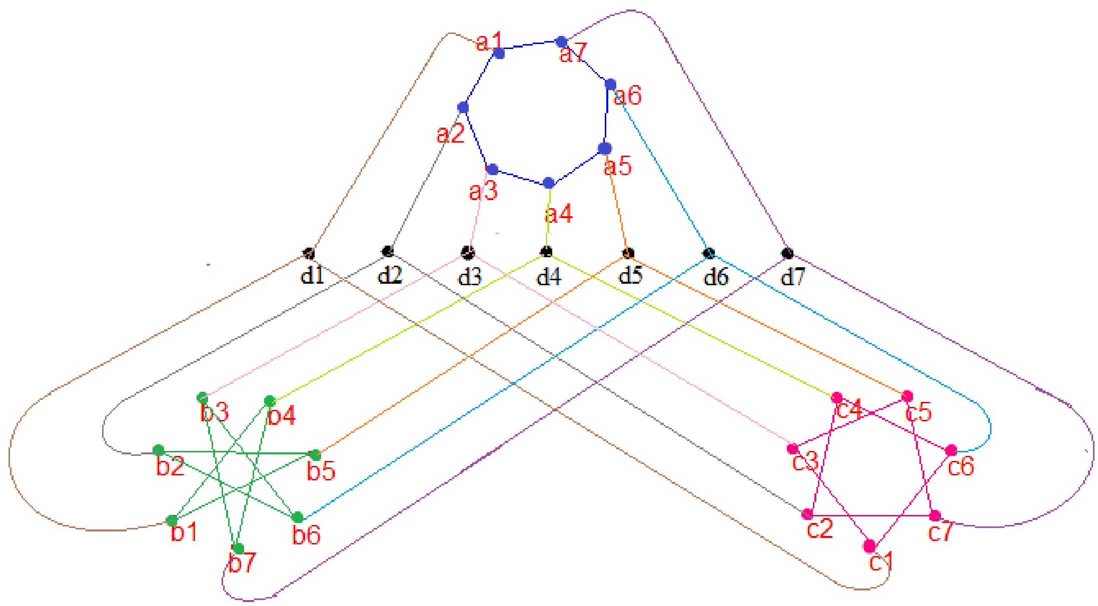
2012

Un grafo no Hamiltoniano



Natalia Flores

Teoría algebraica de grafos.

06/06/2012

Un grafo no Hamiltoniano.

W.T Tutte (1959)

El grafo que se presentará es un grafo cúbico de 28 vértices, descubierto por el Prof. H.S.M Coxeter, que no tiene ciclos de menos de 7 aristas y en el cual todos los arcos orientados formados por tres aristas son equivalentes bajo el grupo de automorfismos.

En este artículo se prueba, además, que no es un grafo Hamiltoniano.

La estructura del grafo es la siguiente:

Son 3 heptágonos: A($a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_1$)

B($b_1b_5b_2b_6b_3b_7b_4b_1$)

C($c_1c_6c_4c_2c_7c_5c_3c_1$)

Los siete vértices restantes son $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$, tales que los tres vértices incidentes con d_i son a_i, b_i, c_i.

Entonces si en el grafo G tuviera un ciclo hamiltoniano H, que pasa por la arista a_1a_2 y por a_2a_3 entonces a_2d_2 no puede pertenecer a H, de lo contrario un vértice del ciclo tendría grado 3 lo que es absurdo. Por lo tanto para que d_2 tenga grado dos en H, b_2d_2 y c_2d_2 deben pertenecer a H.

Notación: $(a_1a_2, a_2a_3) \rightarrow (b_2d_2, c_2d_2)$

Observación: existe un automorfismo U en G, en el cual, a , x_i le corresponde x_{i+1}, donde x es a, b, c o d, 1≤i≤7 y $x_8=x_1$.

Prueba: por construcción ∀ i, 1≤i≤7, $a_i \sim a_{i+1} \Rightarrow a_{i+1} \sim a_{i+2}$

$$\left.\begin{array}{l} U(a_i) = a_{i+1}, \\ U(a_{i+1}) = a_{i+2} \end{array}\right\} \Rightarrow U(a_i) \sim U(a_{i+1})$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 \sim b_5, \\ b_2 \sim b_6 \\ U(b_1) = b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow U(b_1) \sim U(b_5)$$

Lo mismo se observa con el resto de los vértices b_i.

De igual manera se puede concluir que si $c_i \sim c_{i+1} \Rightarrow U(c_i) \sim U(c_{i+1})$

William Thomas Tutte, OC, FRS, conocido como Bill Tutte, (14 mayo 1917- 2 mayo 2002) fue un británico, decodificador y matemático. Durante la Segunda Guerra Mundial hizo un avance fundamental y brillante en el Criptoanálisis del cifrado de Lorenz, un gran sistema de cifrado alemán, que tuvo un impacto significativo en la victoria de los Aliados en Europa. Él también tenía una serie de importantes logros matemáticos, incluyendo los trabajos de cimentación en los campos de la combinatoria y teoría de grafos.

Tutte nació en Newmarket, en Suffolk, hijo de un jardinero. A la edad de 18 años, estudió química y matemáticas en el Trinity College, la Universidad de Cambridge. Como estudiante (junto con tres de sus amigos) se convirtió en el primero en resolver el problema de la cuadratura del cuadrado. Juntos, los cuatro crearon el seudónimo de Blanche Descartes, bajo el cual Tutte publicó durante años.

$a_i \sim d_i$, $b_i \sim d_i$, $c_i \sim d_i$, ∀ i, 1≤i≤7,

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a_{i+1} \sim d_{i+1} \\ U(a_i) = a_{i+1}, \\ \mathrm{U}(\mathrm{d_i}) = \mathrm{d_{i+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{U}(\mathrm{a_i}) \sim \mathrm{U}(\mathrm{d_i}).$$

ídem, b_i, c_i, con lo que se prueba que U es un automorfismo

Supondremos que G tiene un ciclo Hamiltoniano, H, entonces no todas las aristas de A podrían pertenecer a H, porque de lo contrario se formaría un ciclo de 7 vértices (A), que no es Hamiltoniano.

Sea s el máximo de aristas consecutivas de A que pertenecen a H.

Entonces 1<s≤6, (s ≠1 porque A tiene 7 vértices y H tiene que incluirlos a todos, si d_1a_1, $a_1a_2, d_2a_2, d_3a_3, a_3a_4, d_4a_4, d_5a_5, a_5a_6, d_6a_6, d_7a_7$ pertenecen a H entonces para seguir el ciclo a_1a_7 es parte de H, pero en este caso habrían dos aristas consecutivas de A en H)

Caso 1: s=6

Por el automorfismo U podemos suponer que las aristas consecutivas de A que pertenecen a H son: a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_6, a_6a_7, de lo contrario el razonamiento es similar.

$(a_1a_2, a_2a_3) \rightarrow (b_2d_2, c_2d_2)$ (porque a_2d_2 no puede pertenecer a H)

De la misma manera:

$(a_2a_3, a_3a_4) \rightarrow (b_3d_3, c_3d_3)$

$(a_3a_4, a_4a_5) \rightarrow (b_4d_4, c_4d_4)$

$(a_4a_5, a_5a_6) \rightarrow (b_5d_5, c_5d_5)$

$(a_5a_6, a_6a_7) \rightarrow (b_6d_6, c_6d_6)$

Si b_4d_4 ∈H ⇒ b_1b_4 *o* b_4b_7 ∈H pero esto es equivalente ya que existe otro automorfismo V en G, en el cual a x_i le corresponde x_{8-i}. entonces supongo que b_1b_4 ∈H. podemos extender el razonamiento a :

$(b_1b_4, b_4d_4) \rightarrow (b_3b_7, b_7d_7)$

$(b_3b_7, b_3d_3) \rightarrow (b_2b_6, b_6d_6)$

$(b_2b_6, b_2d_2) \rightarrow (b_1b_5, b_5d_5)$

$(\ b_1b_4 \ , b_1b_5) \rightarrow \ (a_1d_1, c_1d_1)$

$(\ a_1d_1 \ , a_1a_2) \rightarrow \ (a_7d_7, a_7a_6)$

$(\ a_7d_7 \ , b_7d_7) \rightarrow \ (c_2c_7, c_5c_7)$

$(\ c_5c_7 \ , c_5d_5) \rightarrow \ (c_1c_3, c_3d_3)$

$(\ c_1c_3 \ , c_1d_1) \rightarrow \ (c_4c_6, c_6d_6)$

De esta manera H quedó totalmente determinado, pero consiste en dos ciclos:

$H_1=\{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7d_7b_7b_3d_3c_3c_1d_1a_1\}$

Y $H_2= \{b_1b_5d_5c_5c_7c_2d_2b_2b_6d_6c_6c_4d_4b_4b_1\}$

Por lo que H no es Hamiltoniano absurdo, por lo que en H no pueden haber 6 aristas de A consecutivas.

Caso 2: s=5

Por el automorfismo U, podemos asumir que H incluye a las aristas a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_5a_6, pero a_7 debe estar contenido en H, por lo que d_7a_7 está incluido en H, pero como H es un ciclo, el grado de los vértices debe ser 2, con lo que a_7a_6, o a_7a_1 debe estar incluido en H para que el grado de a_7 sea dos, pero en cualquiera de esos casos la cantidad de aristas consecutivas pasa a ser 6, lo que es imposible por el caso anterior.

Caso 3: s=4

Por el automorfismo U, podemos asumir que H incluye a las aristas a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_5d_5, y a_1d_1

$(a_1a_2, a_2a_3) \rightarrow(\ b_2d_2 \ , c_2d_2)$

$(a_2a_3, a_3a_4) \rightarrow(\ b_3d_3 \ , c_3d_3)$

$(a_3a_4, a_4a_5) \rightarrow(\ b_4d_4, c_4d_4)$

$(a_1a_2, a_1d_1) \rightarrow(\ a_6a_7 \ , a_7d_7)$

$(a_4a_5, a_5d_5) \rightarrow(\ a_6a_7 \ , a_6d_6)$

(Porque por el a6 y a7 tienen que pertenecer a H, entonces tienen que haber una arista que "llegue" a cada uno de ellos y otra que "salga" de ellos)

H debe incluir b_3b_6 *o* b_3b_7 pero esto es equivalente ya que existe otro automorfismo W en G, en el cual a x_i le corresponde x_{6-i}. entonces supongo que b_3b_7 ∈H. podemos extender el razonamiento a:

$(\ b_3b_7\ ,b_3d_3) \rightarrow\ (b_2b_6, b_6d_6)$

$(\ b_2b_6\ ,b_2d_2) \rightarrow\ (b_1b_5, b_5d_5)$

$(\ b_6d_6\ ,a_6d_6) \rightarrow\ (c_1c_6, c_4c_6)$

$(\ b_5d_5\ ,a_5d_5) \rightarrow\ (c_3c_5, c_5c_7)$

$(\ c_3c_5\ ,c_3d_3) \rightarrow\ (c_1c_6, c_1d_1)$

$(\ a_1d_1\ ,c_1d_1) \rightarrow\ (b_1b_4, b_1b_5)$

$(b_1b_4\ ,b_4d_4) \rightarrow\ (b_3b_7, b_7d_7)$

$(\ c_4c_6\ ,c_4d_4) \rightarrow\ (c_2c_7, c_2d_2)$

Ahora H quedó totalmente determinado como dos ciclos:

$(a_1a_2a_3a_4a_5d_5b_5b_1b_4d_4c_4c_6c_1d_1a_1)$ y $(b_2d_2c_2c_7c_5c_3d_3b_3b_7d_7a_7a_6d_6b_6b_2)$

Por lo que absurdo.

Caso 4: s=2

Podemos asumir que H incluye a las aristas $a_1a_2,\ a_2a_3,\ a_1d_1,\ a_3d_3$. Pero en este caso H contiene a aristas consecutivas del heptágono $a_1a_2a_3d_3c_3c_1d_1a_1$, lo que es equivalente al heptágono A, dado el automorfismo X, entonces este caso se puede reducir al caso anterior.

Caso 5: s=3

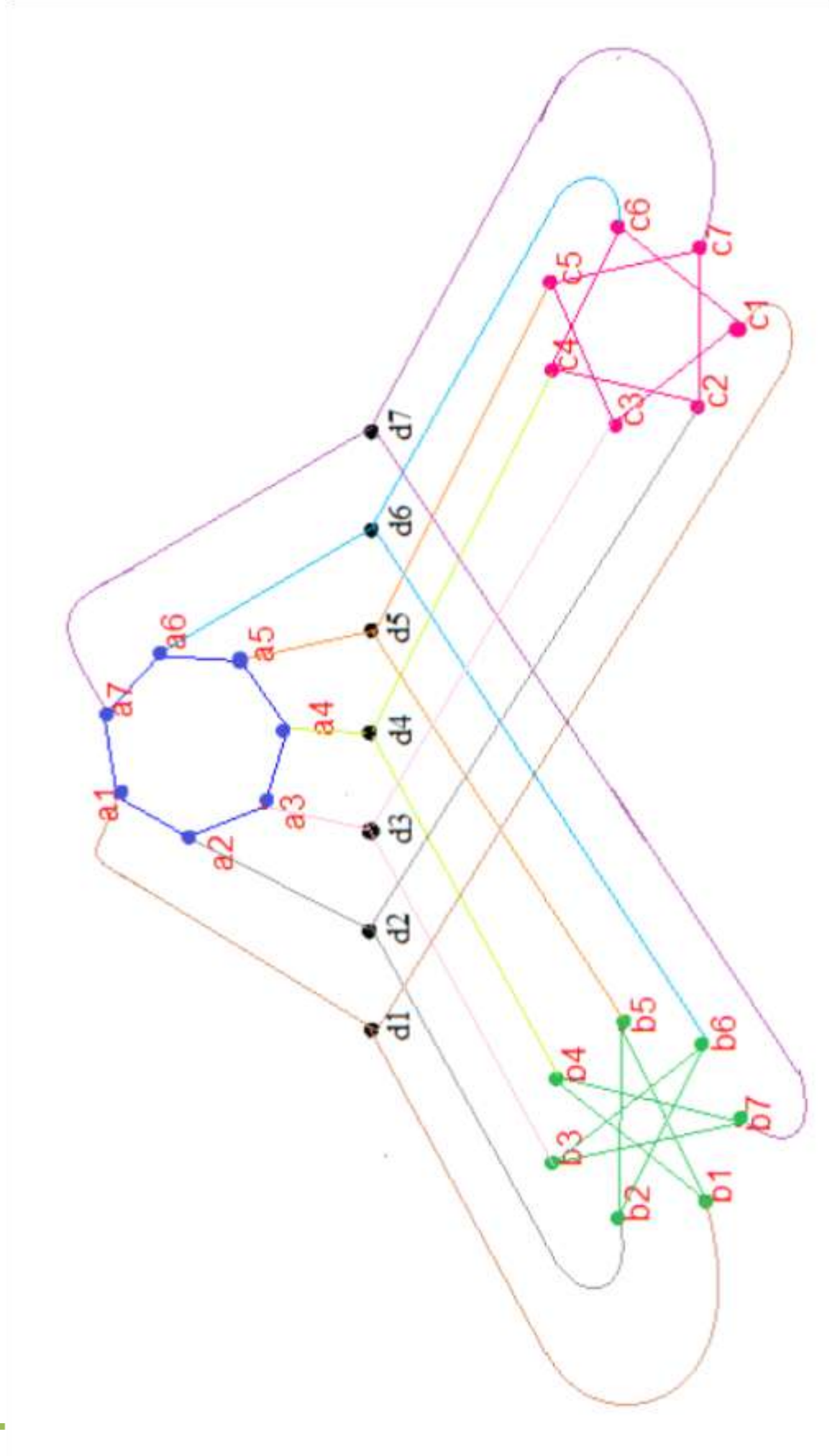
Podemos decir que H incluye a las aristas $a_4a_5,\ a_5a_6,\ a_6a_7, a_4d_4,\ a_7d_7$. entonces tenemos:

$(a_4a_5, a_4d_4) \rightarrow (\ a_2a_3\ ,a_3d_3)$

$(a_6a_7, a_7d_7) \rightarrow (\ a_1a_2\ ,a_1d_1)$

Entonces H contiene las aristas: a_1a_2, a_2a_3, a_1d_1, a_3d_3, por lo que el caso 5 se reduce al caso 4 donde H contiene 4 aristas consecutivas del heptágono $a_1a_2a_3d_3c_3c_1d_1a_1$, lo que resulta absurdo.

Con esto se concluye que el grafo G no tiene ciclo Hamiltoniano.


a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
c1
c2
c3
c4
c5
c6
c7
d1
d2
d3
d4
d5
d6
d7