Universidad de la República

Teoría Algebraica de Grafos
Primer semestre 2012

Práctico 2

De Grupos y Grafos

1. Sea G un grupo de permutaciones actuando transitivamente sobre un conjunto V. Probar que hay un elemento $g \in G$ que no fija puntos.

2. Sea $g \in \mathrm{Sym}(n)$, que deja fijos $n - s$ puntos. Mostrar que $\mathrm{orb}_2(g)$ es maximal cuando todos los ciclos que factorizan a g son trasposiciones.

3. Construir un grafo plano cúbico (o sea regular de valencia tres) con 12 vértices con grupo de automorfismo trivial.

4. Si G es un grupo de permutaciones sobre V, mostrar que el número de órbitas de G en VxV es $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |fix(g)|^2$, y deducir una forma similar para el número de órbitas de G en el conjunto de pares de elementos distintos de V.

5. Sea G un grupo de permutaciones actuando transitivamente sobre V. Probar que G determina una órbita simétrica no-diagonal en $V \times V$ si y solo si $|G|$ es par.

6. Demostrar que el único grupo de permutaciones primitivo actuando sobre V que contiene trasposiciones es $Sym(V)$.

7. Sea X un grafo para el cual $\mathrm{Aut}(X)$ actúa transitivamente en $V(X)$. Sea B un bloque no primitivo para $\mathrm{Aut}(X)$. Mostrar que el subgrafo de X inducido por B es regular.

8. Sea G un grupo de permutaciones actuando transitivamente sobre V tal que para cada elemento $v \in V$ existe un elemento de G de orden dos que tiene a v como único punto fijo. Mostrar que $\sharp(V)$ es impar. Probar que G actúa generosa-transitivamente.

9. Sea X un grafo no vacío no conexo. Si $\mathrm{Aut}(X)$ actúa transitivamente, mostrar que es no primitivo.

10. Demostrar que $\mathrm{Aut}(J(4n-1, 2n-1, n-1))$ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathrm{Sym}(4n)$. Probar que $w(J(4n-1, 2n-1, n-1)) \leq 4n-1$, y caracterizar en qué caso la igualdad ocurre.