Teoría Algebraica de Grafos
Primer semestre 2012

Universidad de la República

Práctico 3

Grafos transitivos

1. Probar que el grafo de Petersen no es un grafo de Cayley.
2. Probar que un grafo de Cayley $X(G, C)$ es conexo si y solo si C genera el grupo G.
3. Sea T un conjunto de trasposiciones de $\mathrm{Sym}(n)$. Probar que el grafo $X(\mathrm{Sym}(n), T)$ es bipartito.
4. Probar que un grafo vértice transitivo con un número primo de vértices es un grafo de Cayley.
5. Probar que un grupo de permutaciones abeliano transitivo es regular.
6. Sea G un grupo abeliano y sea $C \subset G - \{e\}$, cerrado por inversos. Probar que, si $\sharp C \geq 3$, entonces $X(G, C)$ tiene cintura menor o igual a cuatro.
7. Sea $C \subset G - \{e\}$, cerrado por inversos. Probar que si G es abeliano y contiene un elemento de orden mayor o igual a tres, entonces $|\mathrm{Aut}(X(G, C))| \geq 2|G|$.
8. Sean $G =< \ a, b \ >$, $A =< \ a \ >$, $B =< \ b \ >$, con $A \cap B = \{e\}$. Probar que $X(G, A \cup B)$ es un grafo línea.
9. Demostrar que la conectividad de un grafo conexo arista-transitivo es igual al grado mínimo del grafo.
10. Sea X un grafo. Mostrar que dos subconjuntos A y B de $V(X)$ con m elementos no pueden ser separados por menos de m vértices si y solo si existen m caminos disjuntos entre A y B.
11. Mostrar que dos caminos de longitud máxima en un grafo conexo deben compartir un vértice.
12. Probar que dos ciclos de longitud máxima en un grafo 3-conexo comparten, como mínimo, tres vértices.
13. Probar que si A es un átomo y B un fragmento de X tal que $A \subset N(B)$, entonces $\sharp A \leq (\sharp N(B))/2$.
14. Mostrar que en un grafo vértice transitivo de grado k, tal que $K_0(X) = \frac{2}{3}(k+1)$, los átomos inducen grafos completos.
15. El subgrupo $\mathrm{Alt}(5) < \mathrm{Sym}(5)$ está generado por las permutaciones $\alpha = (1, 2, 3)$ y $\beta = (3, 4, 5)$. Probar que el grafo de Cayley dirigido $X(\mathrm{Alt}(5), \{\alpha, \beta\})$ no es hamiltoniano.