Universidad de la República

Práctico 4

Álgebra Lineal y Grafos

1. Probar que si dos grafos son coespectrales los ciclos impares más cortos tienen igual longitud.

2. Mostrar que toda submatriz principal de una matriz semidefinida positiva es semidefinida positiva.

3. Sea A una matriz semidefinida positiva simétrica. Probar que la fila iésima es cero si y solo si $A_{ii} = 0$.

4. Determinar los valores propios de: 1) K_n; 2) $L(K_5)$; 3) $P = \overline{L(K_5)}$; 4) $L(P)$.

5. Determinar los valores propios y multiplicidad de los mismos para $K_{m,n}$.

6. Sea P_n un camino con n vértices con conjunto de vértices $\{v_1, ..., v_n\}$, donde $v_i \sim v_{i+1}$ para $i = 1, ..., n-1$. Supongamos que f es un vector propio asociado al valor propio θ tal que $f(v_1) = 1$. Se definen los polinomios $p_r(x)$ en forma recursiva como $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ y $p_{r+1}(x) = xp_r(x) - p_{r-1}(x)$. Demostrar que $f(v_r) = p_{r-1}(\theta)$ y que $p_n(x)$ es el polinomio característico de P_n.

7. Mostrar que, cuando n es impar, entonces $\phi(C_{2n}, x) = -\phi(C_n, x)\phi(C_n, -x)$.

8. Si Y es un subgrafo de X, probar que $\rho(A(Y)) \leq \rho(A(X))$. Si X es conexo y se da la igualdad entonces probar que $Y = X$.

9. Sea X un grafo con grado máximo α. Entonces $\sqrt{\alpha} \leq \rho(A(X)) \leq \alpha$ y estudiar cuando se dan las igualdades.

10. Un grafo X se dice *con paseos regulares* si para todo $r \in \mathbb{N}$ los elementos de la diagonal de $A(X)^r$ son iguales. Probar que un grafo regular con cuatro o menos valores propios diferentes tiene paseos regulares.

11. Sea $\begin{pmatrix} 0 & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$. Probar que v vector propio de B se puede extender a un vector propio de A si y solo si v es ortogonal a b.

12. Sea $\begin{pmatrix} 0 & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$. Probar que $\frac{\det(xI-A)}{\det(xI-B)} = x - b^T(xI - B)^{-1}b$.

13. Sea X un grafo regular con $2m$ vértices y supongamos que $S \subset V(X)$ tal que $\sharp S = m$. Sea $\hat{X}$ el grafo que se obtiene de adjuntar a X un nuevo vértice que será adyacente a todos los vértices de X. Sea $\widehat{X}$ el grafo que se obtiene de adjuntar a X un nuevo vértice que será adyacente a todos los vértices de $X - S$.

   - Probar que $\hat{X}$ y $\widehat{X}$ son coespectrales.
   - Dar un ejemplo donde $\hat{X}$ y $\widehat{X}$ no sean isomorfos.