Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 1

1. Sea $(R, +, \cdot, 0)$ un anillo sin unidad. Probar que existe un anillo con unidad $(\overline{R}, +, \cdot, 0, 1)$ tal que R es un ideal de $\overline{R}$.

2. *a*) Probar que todo anillo cuyos elementos no nulos son invertibles a izquierda es un anillo con división.

   b) Probar que todo dominio finito es un anillo de división.

3. Sea H el subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$$

   con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Probar que H es un subanillo de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Consideremos los elementos:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   Probar que todo elemento h de H se escribe de la forma $h = a1 + bi + cj + dk$. Probar que si $h \neq 0$ es invertible, y por lo tanto H es un anillo no conmutativo de división llamado **Anillo de Cuaterniones**.

4. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Probar que:

   a) $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{k})$ es simple.

   b) En el anillo $\mathbb{CFM}_{\mathbb{N}}(\mathbb{k})$, el conjunto de las matrices con un número finito de filas no nulas es un ideal no trivial.

   c) $\mathbb{CFM}_{\mathbb{N}}(\mathbb{k})$ tiene un único ideal no trivial.

5. Sea R un anillo y $n > 1$ un número natural.

   a) Probar que $I \to \mathbb{M}_{n\times n}(I)$ es un isomorfismo entre el retículo de ideales de R y el retículo de ideales de $\mathbb{M}_{n\times n}(R)$.

   b) Probar que si I es un ideal de R entonces $\mathbb{M}_{n\times n}(R)/\mathbb{M}_{n\times n}(I) \cong \mathbb{M}_{n\times n}(R/I)$.

6. Sea R un anillo. Denotemos con R^+ el grupo aditivo adyacente a R. Para cada $r \in R$ definimos las funciones λ_r y ρ_r por: $\lambda_r(x) = rx$ y $\rho_r(x) = xr$.

   a) Probar que $\lambda(r) = \lambda_r$ es un morfismo de anillos inyectivo entre R y $End^l(R^+)$ y que $\rho(r) = \rho_r$ es un morfismo de anillo inyectivo entre R y $End^r(R^+)$.

   b) Probar que si R^+ es cíclico, entonces R es conmutativo y λ y ρ son isomorfimos.

7. Sea R un anillo y $A \subseteq R$. El R-centralizador de A es $Cen_R(A) = \{x \in R : ax = xa \text{ para todo } a \in A\}$. Probar que:

   a) $Cen_R(A)$ es un subanillo de R.

   b) A es un subanillo conmutativo maximal de R si y solo si $A = Cen_R(A)$.

   c) Si $x \in Cen_R(A)$ es invertible en R entonces $x^{-1} \in Cen_R(A)$.

   d) Deducir que el centro de un anillo simple es un cuerpo.

8. Encontrar un ejemplo de un anillo cuyo centro no sea un subanillo conmutativo maximal.

9. Sea R un anillo. Probar que hay un único morfismo de anillos $\chi : \mathbb{Z} \to R$. El núcleo de χ es de la forma $n\mathbb{Z}$ para algún $n \geq 0$. Este n es la característica de R.

10. Sea p un número primo. Probar que para todo número natural n los ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ forman una cadena y que todo ideal propio es nilpotente. Probar que el anillo producto

$$\prod_{n>1} \mathbb{Z}_{p^n}$$

tiene un ideal cuyos elementos son nilpotentes y no es nilpotente.