Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 2

1. Sean I y M ideales propios de un anillo R. Probar que:

   a) M es maximal si y solo si R/M es un anillo simple.

   b) R tiene un ideal maximal que contiene a I.

   c) R tiene al menos un ideal maximal.

2. Sea p un primo positivo. Entonces $M = \{\frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{Q}$ con subgrupo $\mathbb{Z}$. Denotaremos con $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ al cociente $M/\mathbb{Z}$.

   a) Probar que para cada $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y cada $m \neq 0$ entero, hay un elemento $y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ con $x = my$.

   b) Probar que todo subgrupo propio de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es cíclico generado por $\frac{1}{p^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Deducir que el retículo de subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es una cadena bien ordenada y que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no tiene subgrupos maximales.

3. Sea R un anillo conmutativo

   a) Un ideal P es primo si y solo si R/P es un dominio. Deducir que todo ideal maximal es primo.

   b) Existen cadenas de ideales primos de longitud arbitraria. Sugerencia: Considerar $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$.

   c) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = x$ para todo $x \in R$, entonces todo ideal primo es maximal.

4. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos y $K \subseteq M$. Probar que

   a) Si $K \cap Kerf = 0$ entonces $f|_K : K \to N$ es un monomorfismo.

   b) Si $K + Kerf = M$ entonces $f|_K : K \to N$ es un epimorfismo.

5. *a*) Probar que si M es un $\mathbb{Z}$-módulo ciclico y finito entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

   b) Probar que hay una sucesión exacta sobre $\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

   c) Probar que hay una sucesión exacta sobre $\mathbb{Z}$

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \ldots$$

6. Sea R un dominio y M un R-módulo. El conjunto $T(M) = \{x \in M : l_r(x) \neq 0\}$ es un submódulo de M llamada submódulo de torsión de M. Si $T(M) = M$ decimos que M es de torsión y si $T(M) = 0$ decimos que M es libre de torsión. Sea $f : M \to N$ un morfismo de módulos.

   a) $T(M/T(M)) = 0$.

   b) Si N es libre de torsión, entonces $T(M)$ es un submódulo de $Kerf$.

   c) Si M es de torsión, entonces $Im(f)$ es un submódulo de $T(N)$.

7. Sea R un dominio. Un R-módulo a izquierda es (R) divisible si $aM = M$ para cada $a \in R$. Sea Q el cuerpo de fracciones de R.

   a) Si M es un Q-espacio vectorial entonces M es R divisible y libre de torsión.

b) Si M es divisible y libre de torsión sobre R via $\lambda : R \to End^l(M)$, entonces existe un único morfismo de anillos $\theta : Q \to End^l(M)$ con $\theta|_R = \lambda$, en particular θ induce una estructura de Q-espacio vectorial en M.

c) Si $f : M \to N$ es un epimorfismo y M es R-divisible entonces N también lo es.

8. Sea p un número primo. Consideremos $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

   a) Probar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible. Además probar que si $n \in \mathbb{Z}$ no es divisible por p, entonces $x \to nx$ define un isomorfismo $\mathbb{Z}_{p^\infty} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$

   b) Probar que un grupo abeliano M es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ si y solo si M es generado por un conjunto numerable $g_1, g_2, \ldots$ tales que satisfacen $pg_1 = 0$ y $pg_{n+1} = g_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

9. Para p primo calcular los siguientes grupos abelianos:

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}), \quad Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}), \quad Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z})$$

10. Calcular los anillos de endomorfismos de

    a) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$

    b) ${}_{R}Re$ donde R es el anillo de las matrices triangulares inferiores 3×3 sobre un cuerpo $\Bbbk$ y

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$