Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 3

1. Sean R y S anillos y $\phi : R \to S$ un morfismo de anillos. Para cada S-módulo a izquierda M definimos $T_\phi(M)$ el R-módulo a izquierda (M, γ) donde $\gamma(r)(x) = \phi(r)x$ para cada $r \in R$ y $x \in M$. Para cada $f \in Hom_S(M, N)$ sea $T_\phi(f) \in Hom_R(T_\phi(M), T_\phi(N))$ definida mediante $T_\phi(f) = f$. Probar que:

   a) Probar que T_ϕ define un funtor entre la categoría de S-módulos a izquierda y la categoría de R-módulos a izquierda.

   b) Probar que si ϕ es sobreyectiva la restricción de T_ϕ entre la categoría de los S-módulos finitamente generados a izquierda y la categoría de los R-módulos finitamente generados a izquierda es un funtor. Ver que si ϕ no es sobreyectiva dicha restricción puede no ser un funtor.

2. Sea I un ideal de R. Para cada R-módulo a izquierda M Sea $F(M)$ el R/I-módulo a izquierda $\frac{M}{IM}$. Para cada morfismo de R-módulos a izquierda $f : M \to N$ sea $F(f) : F(M) \to F(N)$ definida por $F(f)(x + IM) = f(x) + IN$.

   a) Probar que F define un funtor entre la categoría de los R-módulos a izquierda y la categoría de los R/I-módulos a izquierda.

   b) Probar que la restricción de F a la categoría de los R-módulos a izquierda finitamente generados define un funtor entre ésta y la categoría de los R/I-módulos a izquierda finitamente generados.

3. Sea R un anillo y $e \in R$ un elemento idempotente no nulo. Para cada R-módulo a izquierda definimos $T_e(M) = eM$ y para cada morfismo de R-módulos a izquierda $f : M \to N$ definimos $T_e(f) = f|_{eM}$. Probar que T_e es un funtor aditivo entre la categoría de R-módulos a izquierda y la de eRe-módulos a izquierda.

4. Sea M un R-módulo a izquierda no nulo. Consideremos $M_1 = \{(m, 0)|\ m \in M\}$ y $M_2 = \{(0, m)|\ m \in M\}$ submódulos de M^2. Para cada $\sigma \in End(_RM)$ se define $M^\sigma = \{(m, m\sigma)|\ m \in M\}$.

   a) $M^2 = K \oplus M_2$ si y solamente si $K = M^\sigma$ para algún σ.

   b) Si $K = M^\sigma$ para algún $\sigma \in Aut(_RM)$ entonces $M^2 = M_1 \oplus K$.

5. Sea $M = K + L$ y $f : M \to N$ sea un epimorfismo. Probar que $N = f(K) \oplus f(L)$ si $K \cap L = ker(f)$.

6. *a*) Dar un ejemplo de un módulo indescomponible que tenga un submódulo descomponible.

   b) Dar un ejemplo de un módulo indescomponible que tenga un cociente descomponible.

7. Sean $g : N \to M$ y $f : K \to N$ morfismos. Probar que:

   a) Si f y g son monomorfismos (epimorfismos) que escinden, entonces gf es un monomorfismo (epimorfismo) que escinde.

   b) Mostrar que el recíproco no es cierto.

   c) Deducir que el sumando directo de un sumando directo es un sumando directo.

8. *a*) Sea $e \in R$ un idempotente. Probar que para cada $x \in R$ $t = e + (1 - e)xe$ es también un idempotente. Probar además que para cada t existe un $y \in R$ tal que $e = t + (1 - t)yt$.

   b) Sea M un R-módulo a izquierda no nulo y $e \in End(_RM)$ un idempotente. Para cada idempotente $t \in End(_RM)$ probar que $Imt = Imf$ si y solamente si $t = e+(1-e)xe$ para algún $x \in End(_RM)$.

9. Considerar los siguientes diagramas conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[rr, "g"] & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K & & \\
M \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"] & & N \arrow[ul, "f"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

   a) Probar que en el primer diagrama si g es un monomorfismo, entonces h es un monomorfismo esencial si y solamente si f y g lo son.

   b) Probar que en el segundo diagrama si g es un epimorfismo, entonces h es un epimorfismo superfluo si y solamente si f y g lo son.

10. Considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Supongamos que las filas son exactas y α es un epimorfismo. Probar que si g es superfluo también lo es g'.