Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 4

1. Sea M un módulo tal que $M = K \oplus K' = L \oplus L'$.

   a) Probar que $K = L$ implica que $K' \cong L'$ pero que no tienen por que ser iguales.

   b) Probar que si tenemos H un submódulo de M, tal que $K \subseteq H \subseteq M$, entonces

   $$H \cong K \oplus (H \cap K')$$

2. Sea $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto de R-módulos e I un ideal a izquierda de R. Probar que

   a) $I(\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A} I M_\alpha$

   b) $\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha / I(\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha) \cong \oplus_{\alpha\in A} M_\alpha / I M_\alpha$

3. Sean R un dominio y $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto de módulos.

   a) Probar que $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$ es divisible si y solamente si M_α es divisible para todo $\alpha \in A$.

   b) Probar que $\oplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ es libre de torsión si y solamente si M_α es libre de torsión para todo $\alpha \in A$.

4. Sea M un grupo abeliano libre de torsión. Probar que hay un monomorfismo de grupos abelianos $f : M \to \mathbb{Q}^M$.

5. *a*) Probar que no existe ningún monomorfismo desde $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ hacia $\mathbb{Z}^A$ (para ningún A).

   b) Probar que el monomorfismo natural $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no escinde.

6. Sea $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_n \ldots$ una cadena de submódulos de M tal que M_n es un sumando directo de M para todo n natural. Probar que existe una sucesión $M'_1,\ M'_2, \ldots M'_n, \ldots$ de sumandos directos de M, tales que $M_k = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_k$ para $k = 1, 2, \ldots n, \ldots$.

7. Sea R el anillo de las matrices 2×2 triangulares superiores sobre $\mathbb{Z}_2$.

   a) Hacer una lista de todos los sumandos directos de ${}_RR$ y R_R.

   b) Para la lista de la parte anterior encontrar los idempotentes que generan a los sumandos directos.

   c) Encontrar dos idempotentes e, f tales que $Re = Rf$ pero que $eR \neq fR$.

8. Sean e y f idempotentes en un anillo R.

   a) Probar que $Re = Rf$ si y solamente si $f = e + (1-e)xe$ para algún $x \in R$.

   b) Probar que $Re \cong Rf$ si y solamente si existe $x \in eRf$ e $y \in Re$ tales que $xy = e$ e $yx = f$.

   c) Probar que $Re \cong Rf$ si y solamente si $eR \cong fR$.

   d) Si e, f están en el centro de R, entonces $Re \cong Rf$ si y solamente si $e = f$.

9. Sea el anillo $R = End(V_{\Bbbk})$ donde $V_{\Bbbk}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\Bbbk$.

   a) Probar que un idempotente e es primitivo si y solamente si $dim_{\Bbbk}(Im(e)) = 1$.

   b) Probar que si e, f son idempotentes primitivos, entonces $Re \cong Rf$.

   c) Probar que si $dim_{\Bbbk}(V) = n$ entonces tenemos un conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ completo de idempotentes primitivos ortogonales.

10. Consideremos $M_n(\mathbb{k})$ donde $\mathbb{k}$ es un cuerpo y $n > 1$.

   a) Encontrar en $M_n(\mathbb{k})$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales.
   b) Encontrar dos conjuntos distintos completos de idempotentes primitivos ortogonales para el subanillo de $M_n(\mathbb{k})$ formado por las matrices triangulares superiores $n \times n$.

11. Sea $e_1, \ldots, e_n$ un conjunto de idempotentes ortogonales en un anillo R.

   a) Probar que $e = e_1 + \ldots + e_n$ también es idempotente.
   b) Probar que $e_1, \ldots, e_n, 1 - e$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales de R si $e \neq 1$.

12. Sean e y f idempotentes de un anillo R.

   a) Probar que si $ef = fe$ o si $fe = 0$, entonces $e+f-ef$ es un idempotente y $Re+Rf = R(e+f-ef)$.
   b) Mostrar que es posible $ef = 0$ sin que $\{e, f\}$ sea ortogonal.
   c) Probar que $Re + Rf = Re \oplus R(f - fe)$.
   d) Mostrar que no es cierto en general que $e + f - ef$ sea idempotente.