Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 5

1. Decimos que los ideales $I_1, \ldots, I_n$ de un anillo R son comaximales 2 a 2 si $I_i + I_j = R$ para $i \neq j$.

   a) Probar el *Teorema Chino del Resto*: Si $I_1, \ldots, I_n$ son comaximales 2 a 2, entonces el mapa natural $\phi : R \to R/I_1 \times R/I_2 \times \ldots \times R/I_n$ es un morfismo de anillos sobreyectivo con núcleo $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$.
   b) Deducir el Teorema Chino del Resto clásico de teoría de números elemental.

2. Sean R un anillo, I un ideal de R y $u \in R$ un idempotente módulo I ($u^2 - u \in I$). Decimos que u puede ser levantado a un idempotente en R en el caso de que exista un idempotente $e \in R$ con $e - u \in I$.

   a) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Probar que si n no es potencia de un primo entonces existe un idempotente módulo $n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que no puede ser levantado a un idempotente de $\mathbb{Z}$.
   b) Si R es el anillo de las matrices triangulares superiores sobre un cuerpo $\Bbbk$ y J es el ideal de las matrices con la diagonal nula, entonces todo idempotente módulo J puede ser levantado a un idempotente de R.
   c) Si R es como en la parte anterior probar que hay idempotentes centrales módulo J que no pueden ser levantados a idempotentes centrales de R.

3. Sean G un grupo de orden n y K un anillo conmutativo tal que $n \cdot 1$ es invertible. Sean $R = KG$ el anillo de grupo de G sobre K e I un ideal a izquierda de R.

   a) Supongamos que ${}_K I$ es un sumando directo de ${}_K R$ con proyección $p :_K R \to_K I$. Sea $e = n^{-1} \sum_G g^{-1} p(g)$. Probar que para $h \in G$ se tiene $he = n^{-1} \sum_G g^{-1} p(gh)$. Deducir que e es idempotente en R, $e \in I$ y que $xe = x$ para todo $x \in I$.
   b) Probar que ${}_K I$ es un sumando directo de ${}_K R$ si y solamente si ${}_R I$ es un sumando directo de ${}_R R$.

4. Probar que existen módulos U y M tales que:

   a) M es generado por U pero no todo submódulo de M es generado por U.
   b) M es cogenerado por U pero no todo cociente de M es cogenerado por U.

5. Probar que si U genera o cogenera M entonces $l_r(U) \subseteq l_r(M)$. Mostrar que el recíproco no es cierto.

6. Probar que para un módulo ${}_R M$ son equivalentes:

   - ${}_R M$ es fiel.
   - M cogenera a R.
   - M cogenera un generador.

7. Probar que ${}_R G$ es un generador si y solamente si para algún $n \in \mathbb{N}$ y un módulo ${}_R L$ hay un isomorfismo de módulos $G^n \cong R \oplus L$.

8. Sea M un R-módulo a izquierda con $S = End({}_R M)$. Sea $e \in S$ un idempotente. Probar que

   a) $Tr_M(Me) = (Me)S$.
   b) $Rej_M(Me) = l_M(Se)$

9. *a*) Sean M y U R-módulos a izquierda. Probar que:
   1) $Hom_R(M, Tr_U(M)) \cong Hom_R(M, U)$.

2) $Hom_R(M/Rej_M(U), U) \cong Hom_R(M, U)$.

b) Sea I un ideal a izquierda de R y M un R-módulo a izquierda. Probar que $Tr_M(R/I) = Rr_M(I)$.

10. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de los grupos abelianos simples. Probar que para un grupo abeliano M

a) $Tr_M(\mathcal{U}) = \{x \in M : x \text{ tiene orden libre de cuadrados } \}$

b) $Rej_M(\mathcal{U}) = \cap\{N \leq M : N \text{ es subgrupo maximal de } M\}$

11. Sea R el anillo de las matrices triangulares superiores $n \times n$ sobre un cuerpo $\Bbbk$ y $\mathcal{U}$ la clase de los R-módulos simples a izquierda.

a) $Tr_R(\mathcal{U}) = \{[a_{ij}] \in R : a_{ij} = 0 \text{ con } i \geq 2\}$

b) $Rej_R(\mathcal{U}) = \{[a_{ij}] \in R : a_{kk} = 0 \text{ con } k = 1, 2, \ldots, n\}$

12. Sea F_R un R-módulo a derecha libre con base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y sea $S = End(F_R)$. Para cada $a \in S$ y cada x_β hay un conjunto $\{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A}$ en R con casi todo $a_{\alpha\beta}$ nulo tales que:

$$a(x_\beta) = \sum_{\alpha \in A} a_{\alpha\beta} x_\alpha$$

Probar que el mapa $a \to [a_{\alpha\beta}]_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ define un isomorfismo de anillos desde S al anillo $\mathbb{CFM}_A(R)$.