Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 6

1. Sea M es un grupo abeliano.

   a) Probar que $SocM$ es el subgrupo generado por los elementos de orden primo.
   b) Probar que la $\mathbb{Z}_p$-componente homogénea de $SocM$ es $r_M(p)$.
   c) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\mathbb{Z}_n$ es homogénea si y solo si n es libre de cuadrados.

2. Sea M un grupo abeliano. Probar que:

   a) Si M es libre de torsión $SocM = 0$.
   b) Si M es un módulo de torsión entonces $SocM$ es un submódulo esencial de M.
   c) Si M es divisible $RadM = M$.

3. Calcular el zócalo y el radical de los siguientes grupos abelianos:

   - $\mathbb{Z}$;
   - $\mathbb{Z}_n$;
   - $\mathbb{R}$;
   - $\mathbb{Z}_p$;
   - $\mathbb{Z}_p^\infty$.

4. Sea R el anillo de las matrices 2×2 triangulares superiores sobre un cuerpo $\mathbb{k}$.

   a) Calcular el zócalo y el radical de ${}_RR$ y de R_R.
   b) Probar que R tiene dos submódulos simples no isomorfos, pero que $Soc({}_RR)$ tiene una única componente homogénea.

5. Sea M un R-módulo a izquierda. Probar que lo siguiente es equivalente:

   a) M es semisimple.
   b) Para cada submódulo $K \subseteq M$ y cada morfismo $f : K \to H$ hay una extensión $\overline{f} : M \to H$.
   c) Para cada submódulo $K \subseteq M$ y cada morfismo $g : H \to M/K$ hay un morfismo $\overline{g} : H \to M$ con $g = \pi_K \overline{g}$.

6. Sea $f : M \to N$ un epimorfismo de R-módulos. Mostrar que es posible que $RadN \subsetneq f(RadM)$. Probar que si $M/RadM$ es semisimple entonces $RadN = f(RadM)$.

7. Sea M un R-módulo a izquierda y K un submódulo de M. Probar que:

   a) $K = RadM$ si y solo si $K \subseteq RadM$ y $RadM/K = 0$.
   b) $K = SocM$ si y solo si $SocM \subseteq K$ y $SocK = K$.
   c) Si K es superfluo en M y $RadM/K = 0$ entonces $K = RadM$.
   d) Si K es esencial en M y $SocK = K$ entonces $K = SocM$.

8. Un módulo M es cosemisimple en el caso de que cada submódulo de M es la intersección de submódulos maximales.

   a) M es cosemisimple si y solo si $RadM/K = 0$ para cada submódulo K de M.
   b) Todo submódulo y todo cociente de un módulo cosemisimple son cosemisimples.
   c) Todo módulo semisimple es cosemisimple.

9. Probar que todo $\mathbb{Z}$-módulo que cogenera $M = \oplus_p \mathbb{Z}_p$ lo cogenera finitamente. Mostrar sin embargo que M no es finitamente cogenerado.

10. Probar que ${}_RM$ es finitamente cogenerado si y solo si para módulo U y todo conjunto A, si existe un monomorfismo $f : M \to U^A$, entonces existe un subconjunto $F \subseteq A$ tal que $\pi_F \circ f : M \to U^F$ es un monomorfismo.