Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 7

1. Probar que ${}_RM$ es finitamente generado si y solamente si para toda cadena $\mathcal{C}$ de submódulos propios de ${}_RM$ la unión $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ es un submódulo propio.

2. Probar que ${}_RM$ es finitamente cogenerado si y solamente si para toda cadena $\mathcal{C}$ de submódulos no nulos de ${}_RM$ la intersección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es un submódulo no nulo.

3. Sea $\phi : Q \to R$ un morfismo de anillos y M un R-módulo a izquierda. Entonces mediante ϕ también tiene estructura de Q-módulo a izquierda.

   a) Probar que si ${}_QM$ es artiniano (noetheriano) entonces ${}_RM$ es artiniano (noetheriano).

   b) Deducir que si R es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo Q mediante ϕ, entonces son equivalentes:

      1) ${}_RM$ es artiniano y noetheriano.
      2) ${}_RM$ es finitamente generado.
      3) ${}_QM$ es de dimensión finita.

4. Sean M_R un módulo semisimple no nulo homogéneo y $S = End(M_R)$. Probar que

   a) El conjunto $U = \{\gamma\colon Im\gamma$ es finitamente generado $\}$ es el único ideal minimal no nulo de S.

   b) $Soc({}_SS) = Soc(S_S) = U$ y $Rad({}_SS) = Rad(S_S) = 0$.

5. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo ${}_RM$ no nulo:

   a) El conjunto de sumandos directos de ${}_RM$ cumple la condición de cadena ascendente.

   b) El conjunto de sumandos directos de ${}_RM$ cumple la condición de cadena descendente.

   c) $End({}_RM)$ no tiene un conjunto infinito de idempotentes no nulos ortogonales.

6. Sobre un cuerpo $\Bbbk$ consideremos R el conjunto de las matrices cuadradas $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con columnas finitas $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ tales que $a_{nn} = a_{mm}$ para todo n, m y $a_{mn} = 0$ si $m \neq 1$ y $m \neq n$.

   a) Probar que R es una subálgebra de la $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{RFM}_{\mathbb{N}}(\Bbbk)$.

   b) Probar que R es un anillo conmutativo local.

   c) Probar que ${}_RR$ es finitamente generado pero no es noetheriano.

   d) Sea M el R-módulo a izquierda $Hom_{\Bbbk}(R_R, \Bbbk)$. Probar que M es finitamente cogenerado pero no es artiniano.

7. Sea R el anillo de todas las matrices 2×2 triangulares superiores

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{Q}$. Probar que R es artiniano y noetheriano a izquierda pero que no es ni noetheriano ni artiniano a derecha.

8. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $A \in M_n(k)$ sea $D(A)$ la matrix $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre el cuerpo $\Bbbk$ dada de la forma

$$D(A) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots \\ 0 & A & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Sea R el conjunto de todas las $D(A)$ para $A \in M_n(\Bbbk)$ y $n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que R es un subanillo simple de $\mathbb{CFM}_{\mathbb{N}}(\Bbbk)$.

b) Probar que ${}_R R$ no satisface ni la condición de cadena ascendente ni la condición de cadena descendente.

c) Deducir que R es una $\Bbbk$-álgebra simple que no es de dimensión finita ni anillo de división.