Teoría de Módulos
Primer semestre de 2013.

Práctico 8

1. Sea $n \in \mathbb{N}$.

   a) Determinar $l(\mathbb{Z}_n)$ para el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$.
   b) Encontrar los n tales que $\mathbb{Z}_n$ tiene una única serie de composición.

2. Dar ejemplos de módulos M que tienen $l(M) = 2$ tales que:

   a) M tiene una única serie de composición.
   b) M tiene exactamente dos series de composición.
   c) M tiene infinitas series de composición.

3. Dar un ejemplo de un módulo que no tiene series de composición pero que todo submódulo no nulo tiene un submódulo maximal y todo cociente no nulo tiene un submódulo minimal.

4. a) Sea M un módulo de longitud finita. Sea $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto de submódulos de M tales que $M = \sum_{\alpha \in A} M_\alpha$. Probar que $l(M) = \sum_{\alpha \in A} l(M_\alpha)$ si y solo si $M = \oplus_{\alpha \in A} M_\alpha$.
   b) Sea M semisimple. Probar que $l(M)$ es finita si y solamente si M es finitamente generado.

5. Probar el **Teorema de Refinamiento de Schreier**: Si M es un módulo de longitud finita y

$$M = N_0 > N_1 > \ldots > N_p = \{0\}$$

   es una cadena de submódulos de M, entonces existe una serie de composición de M que incluye a los submódulos $N_0, N_1, \ldots, N_p$.

6. Sean M noetheriano y $f : M \to M$ un morfismo de módulos. Supongamos que $Coker f$ tiene longitud finita. Probar que $Coker f^n$ y $Ker f^n$ tienen longitud finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Probar que si M tiene dos descomposiciones semisimples $M = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha = \oplus_{\beta \in B} S_\beta$ entonces hay una biyección $\sigma : A \to B$ tal que $T_\alpha = A_{\sigma(\alpha)}$.

8. Probar la siguiente versión del **Lema de Fitting**: Si M es un módulo de longitud finita y $f : M \to M$ es un endomorfismo, entonces existen submódulos I y K tales que $M = I \oplus K$, $(f|_I) : I \to I$ es un automorfismo y $(f|_K) : K \to K$ es nilpotente.

9. Probar la siguiente versión del **Lema de Fitting**: Si R es un anillo noetheriano, M un R- módulo y $f : M \to M$ un morfismo de R-módulos. Sea X un submódulo de M que es finitamente generado, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f|_{f(X)} : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo para todo $m \geq n$.