Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 0

1. Probar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$
2. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos, probar las leyes de De Morgan:
$$(\cup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \quad (\cap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$
3. Probar que la compuesta de dos biyecciones es una biyección.
4. Probar que si $f : X \to Y$ es inyectiva, existe un único $B \subset Y$ tal que la función $g : X \to B$ definida como $g(x) = f(x) \ \ \forall x \in X$ es biyectiva.
5. Dada $f : X \to Y$ sobreyectiva ¿Existe un único $A \subset X$ tal que $f|_A : A \to Y$ es biyectiva?
6. Probar que el principio de inducción es consecuencia del principio de buena ordenación.
7. Si X e Y son finitos, probar que $X \cup Y$ es finito y que $card(X \cup Y) = cardX + cardY - card(X \cap Y)$.
8. Si X e Y son finitos, probar que $X \times Y$ también lo es y que $card(X \times Y) = cardX cardY$.
9. Sea X finito, si $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de X probar que $card\mathcal{P}(X) = 2^{cardX}$.
10. Sea $\mathcal{F}(X, Y)$ el conjunto formado por las funciones $f : X \to Y$. Si $cardX = m$ y $cardY = n$, probar que $card\mathcal{F}(X, Y) = n^m$.
11. Si $f : X \to Y$, probar que
    (a) Si X es infinito y f es inyectiva entonces Y es infinito.
    (b) Si Y es infinito y f es sobreyectiva, entonces X es infinito.
12. Probar que existe $f : X \to Y$ inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ sobreyectiva.

13. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(1, n) = 2n - 1$ y $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Probar que f es biyectiva.

14. Si $P_n = \{X \subset \mathbb{N} : cardX = n\}$, probar que P_n es numerable y deducir que el conjunto formado por los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.

15. Probar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.