Facultad de Ciencias. Centro de Matemática. Cálculo I (2003)

Práctico 3 Series

1. Consideremos una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de la cual se sabe que

$$A_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ . + a_n \ = \ \frac{2n+1}{n+3} \qquad (n \geq 1).$$

(a) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcular su suma.

(b) Calcular a_1 y determinar a_n para cada $n \geq 2$.

2. En cada uno de los siguientes casos clasificar $\sum a_n$:

$$a_n = \cos(1/n) \qquad a_n = \frac{1}{2^n} + e^n \qquad a_n = \frac{2n+1}{n^2(3n+5)} \qquad a_n = \frac{n^3-1}{3n^3+2n^2-4n-9}$$

3. Clasificar las siguientes series y, en caso de convergencia, encontrar la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

4. Clasificar las siguientes series y, en caso de convergencia, encontrar la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^{n-1}}$$

5. En cada uno de los siguientes casos, dada una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, se pide:

(a) Encontrar una expresión para $A_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ . + a_n$

(b) Calcular $\lim A_n$ (en caso de que exista).

(c) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcular su suma.

$$a_n = n \qquad a_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

6. Sean (a_n), (b_n) y (c_n) sucesiones tales que: $0 < b_n < a_n < 1$, $\forall n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y $c_n = \frac{1-a_n}{1+b_n}$. Clasificar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-c_n)$$

7. Sabiendo que $a_n > 0$ y que $\sum a_n$ converge, clasificar las siguientes series o mostrar con ejemplos que no es posible afirmar nada acerca de su convergencia.

$$\sum \frac{1}{a_n} \qquad \sum a_n^2 \qquad \sum \sqrt{a_n} \qquad \sum \log(1+a_n)$$

8. En cada uno de los siguientes casos clasificar $\sum a_n$ ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad a_n = e^{1/n^2}-1 \qquad a_n = \frac{(\operatorname{sen} n)^2}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos(1/n)}{n^\alpha}.$$

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+8}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad a_n = n^q e^{-\gamma n} \quad (q\in\mathbb{R},\ \gamma>0)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^n} \qquad a_n = \frac{2^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{3^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{(2n)!}$$

9. Si $a_n \le b_n \le c_n\ \forall n$ $\sum a_n$ y $\sum c_n$ convergen, probar que $\sum b_n$ también converge y además

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$$

10. Probar que las siguientes series son absolutamente convergentes y encontrar cotas (inferiores y superiores) de sus sumas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2\operatorname{sen}(1/n)}{n^3}$$

11. Clasificar las series de término general:

$$\frac{(-1)^n}{n\log n} \qquad (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (-1)^n\ \ (1-n\operatorname{sen}(1/n))$$

12. (a) Sea (a_n) una sucesión monótona no decreciente con límite $+\infty$. Clasificar $\sum(-1)^n/a_n$.

(b) Sea $b_n = a_n + (-1)^n$. Estudiar el comportamiento de las sucesiones (b_n) y (a_n/b_n) cuando $n\to\infty$.

(c) Sea ahora $a_n = \log n$. Demostrar que $\sum(-1)^n/b_n$ no es convergente. Explicar por que no se puede aplicar el criterio del equivalente.

(d) Encontrar dos sucesiones (a_n) tales que, en el primer caso $\sum(-1)^n/a_n$ y $\sum(-1)^n/b_n$ sean ambas convergentes, y en el seguno, sea convergente una sola de las series.

13. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, probar que $\sum a_n^2$ es convergente. ¿Que ocurre si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente?

14. Si $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ son convergentes, probar que $\sum a_n b_n$ también es convergente.

15. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente y $\lim b_n = 0$ definimos $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Probar que $\lim c_n = 0$. ¿Que ocurre si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente?

16. Criterios de Abel y Dirichlet. Sean (a_k) y (b_k) sucesiones de reales y $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

1. Probar que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$. (Fórmula de Abel)

2. Probar el criterio de Dirichlet: si A_n es acotada y b_n decrece a 0, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

3. Probar el criterio de Abel: si $\sum a_n$ converge y b_n es monótona convergente, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

4. Clasificar las series $\sum \operatorname{sen}(na)/n$ y $\sum \cos(na)/n$ ($a \in \mathbb{R}$), asumiendo que las sumas $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(na)$ y $\sum_{k=1}^{n} \cos(na)$ son uniformememnte acotadas en n $\forall a \neq 0$. (Esto se puede demostrar utilizando números complejos: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ y relacionar $\operatorname{sen}(na)$ y $\cos(na)$ con e^{ina} y e^{-ina}).

17. Clasificar las series:

$$\sum \frac{(-1)^n \log n}{n^\alpha}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, \qquad \sum \frac{(-1)^n (n+\log n)}{n^2}.$$

18. Criterio de Raabe. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas. Sea

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1} a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Probar que si existe $r > 0$ tal que $c_n \geq r$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge. (*Sugerencia:* prueba que $\sum_{k=N}^{n} a_k \leq a_N b_N / r$.)

2. Probar que si $c_n \leq 0$ para $n \geq N$ y $\sum 1/b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

3. Aplicar (a) y (b) con $b_n = n - 1$ para deducir el criterio de Raabe:

   (a) Si existen $r > 0$ y $N \geq 1$ tal que

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}$$

   para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge.

   (b) Si $a_{n+1}/a_n \geq 1 - 1/n$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ diverge.

   (c) Encontrar una "versión" del criterio de Raabe con "paso al límite". Clasificar

   $$\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \sum \frac{e^n\, n!}{n^n}$$