Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 4   Límites de funciones, continuidad

1. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, demostrar:

(a) $f(x) \to +\infty \ (x \to +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)\colon x_n \to +\infty$ se tiene $f(x_n) \to +\infty$.

(b) $f(x) \to +\infty \ (x \to a) \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)\colon x_n \neq a \ \forall n, x_n \to a$ se tiene $f(x_n) \to +\infty$.

(c) $f(x) \to +\infty \ (x \to a+) \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)\colon x_n > a \ \forall n, x_n \to a$ se tiene $f(x_n) \to +\infty$.
¿Como se enuncia este resultado si $x \to a-$?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Probar que si existe una sucesión (x_n) con $x_n > a$ tal que $\lim x_n = a$ y $\lim f(x_n) = L$ entonces $\lim_{x \to a+} f(x) = L$. Enunciar y probar un resultado análogo para el límite cuando $x \to a-$.

3. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Considerando límites cuando $x \to a$, demostrar:

(a) Si $f(x) \to +\infty$ y $g(x) \to L$, entonces $f(x) + g(x) \to +\infty$. ¿Que ocurre si $g(x)$ es acotada en un entorno de a?

(b) Si $f(x) \to +\infty$ y $g(x) \to L > 0$, entonces $f(x)g(x) \to +\infty$. ¿Que ocurre si $g(x) \to L < 0$?

(c) Si $f(x) \to L \ (x \to a)$ y $g(x) \to +\infty \ (x \to a)$, entonces $f(x)/g(x) \to 0 \ (x \to a)$.

4. *Límites indeterminados (I).* Encontrar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) \to +\infty \ (x \to a)$ $g(x) \to +\infty \ (x \to a)$, y se verifique

(a) $f(x) - g(x) \to +\infty \ (x \to a)$

(b) $f(x) - g(x) \to -\infty \ (x \to a)$

(c) $f(x) - g(x) \to L \ (x \to a)$

(d) $f(x) - g(x)$ no tiene límite cuando $x \to a$.

5. *Límites indeterminados (II).* (a) Encontrar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(x) \to +\infty \ (x \to a)$ $g(x) \to 0 \ (x \to a)$, y se verifique

(i) $f(x)g(x) \to L \ (x \to a)$

(ii) $f(x)g(x) \to 0 \ (x \to a)$

(iii) $f(x)g(x) \to +\infty \ (x \to a)$

(b) Dado $L > 0$ encontrar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que se verifique $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, y además $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = L$.

6. *Límites "tipo" trigonométricos.* Calcular los siguientes límites, cuando $x \to 0$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

Sugerencia: Recordar, para el primer límite, que $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, si $0 < x < \pi/2$, y que $\operatorname{tg} x < x < \operatorname{sen} x$, si $-\pi/2 < x < 0$; para el segundo, $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

7. *Límites "tipo" exponenciales y logarítimicos.* Asumiendo sabido que $\lim(e^{a_n} - 1)/a_n = 1$ para toda sucesión (a_n) tal que $a_n \to 0$, calcular los siguientes límites, cuando $x \to 0$:

$$\lim \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim \frac{\log(1+x)}{x}.$$

8. (a) Demostrar que si f es continua en x_0 y g es discontinua en x_0 entonces $f + g$ es discontinua en x_0. ¿Qué sucede si ambas funciones son discontinuas en x_0?

(b) ¿Qué ocurre si se trata del producto $f \times g$ en lugar de la suma?

(c) Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x \leq 0. \\ |4 - x|, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad en 0 de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

(d) Encontrar dos funciones F y G tales que F sea discontinua en x_0, G discontinua en $F(x_0)$ y que $G \circ F$ sea continua en x_0.

9. *Un teorema sobre puntos fijos.* Sea f una función continua en $[0,1]$ tal que $f(x) \in [0,1]$, $\forall x \in [0,1]$. Demostrar que f tiene algún punto fijo en el intervalo $[0,1]$, es decir: existe al menos un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. Sugerencia: aplicar el teorema de Bolzano-Darboux a la función $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = x - f(x)$.

10. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ acotada. Para cada $t \geq a$ definimos $M_t = \sup_{x \in [t,+\infty)} f(x)$, $m_t = \inf_{x \in [t,+\infty)} f(x)$ y $w_t = M_t - m_t$ a quien le llamaremos la oscilación de f en $[t, +\infty)$.

(a) Probar que existen $\lim_{t \to +\infty} M_t$ y $\lim_{t \to +\infty} m_t$.

(b) Probar que existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ si y sólo si $\lim_{t \to +\infty} w_t = 0$.

11. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que existen y son finitos los dos límites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Probar que f es uniformemente continua.

(b) Investigar continuidad uniforme para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$.

(c) Idem para $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

12. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas (I es un intervalo).

(a) Probar que $\alpha f + \beta g$ son uniformemente continuas, cualesquiera sean las constantes α y β.

(b) Probar que si además f y g son acotadas, entonces $f \times g$ es uniformemente continua.

(c) Probar que las funciones $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ son uniformemente continuas.