Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 5 Derivabilidad

1. Estudiar la derivabilidad en $a = 0$ de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x \leq 0. \\ |4 - x|, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

2. En cada uno de los siguientes casos investigar la continuidad y la derivabilidad de la función f:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0, \\ -x^2 + x + 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x < 1, \\ -x^2 + ax + b, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3. (a) Encontrar los extremos absolutos de $f(x) = (x+2)^3(3-x)$ en $[-1, 2]$, y de $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en $[-1, 4]$.
   (b) Durante varias semanas se ha registrado el flujo de tráfico más allá de cierta salida del centro de Montevideo. Los datos señalan que entre la $1 : 00$ y las $6 : 00$ p.m., en un día normal de la semana, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $V(t) = t^3 - 10,5\ t^2 + 30t + 20$ kilómetros por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. ¿En qué momento entre la $1 : 00$ y las $6 : 00$ p.m. es más rápido el tráfico y en qué momento es más lento?
   (c) Una fábrica de cerveza desea construir latas de forma cilíndrica (cilindro circular recto) que contengan un volumen V del producto. ¿Qué relación debe haber entre la altura de la lata y el radio de su base para que se minimicen los costos debidos al material usado?

4. (a) Demostrar que $x\ (1 - x) \leq \frac{1}{4}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Demuestra que $x^\alpha \leq \alpha\, x + (1 - \alpha)\,, \ \forall x \geq 0$.
   (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. ¿Es cierto que $e^x > x^a, \ \ \forall x \geq 0$?

5. (a) Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos además que existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M, \ \forall x \in (a, b)$.
   Demostrar que $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M\ |x_2 - x_1|, \ \ \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.
   (b) Demostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

6. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\ , & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Demostrar que f presenta un mínimo relativo en 0.
   (b) Probar que $f'(0) = f''(0) = 0$.
   (c) ¿Es f creciente en algún intervalo de la forma $[0, \delta]$? ¿Es f decreciente en algún intervalo a la izquierda de 0?

7. **Propiedad de Darboux para la derivada y consecuencias**
En todo este ejercicio, f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I (no se supondrá que f' sea continua).

   (a) Sean a y b dos puntos de I con $a < b$. Demostrar que si $f'(a) < \mu < f'(b)$ entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \mu$. (Sugerencia: probar que la función $\varphi(x) = f(x) - \mu x$ tiene un mínimo en (a, b)). Este resultado está diciendo que la función derivada, aun no siendo continua, tiene la propiedad de Darboux.

   (b) Demostrar que si f' no tiene ceros entonces f es monótona.

   (c) Sea $x_0 \in I$. Demostrar que si existe $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ entonces $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$.

   (d) f' NO puede tener discontinuidades de primera especie en I. O sea, si x_0 es un punto de discontinuidad de f' entonces no pueden existir al mismo tiempo sus límites laterales en x_0. (Un ejemplo de una función derivable con derivada no continua lo encuentras en el ejercicio 4 de este mismo repartido. Observar que, en ese caso, la discontinuidad de f' es de “segunda especie”).

8. Sea $f : [-1, 2] \to R$ tal que $f(x) = 1 + x + \log|x + 2|$.

   (a) Hallar $f([-1, 2])$ justificando la respuesta.

   (b) Probar que $f : [-1, 2] \to f([-1, 2])$ es invertible.

   (c) Calcular $(f^{-1})'(1 + \log 2)$.

9. Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa deducir que la derivada de $\sqrt{x}$ es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

10. Demostrar la siguiente identidad:

$$\operatorname{Arctg}(x) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si, } x > 0. \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si, } x < 0. \end{cases}$$

11. Consideremos las funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Estas funciones se llaman *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica* respectivamente. En este ejercicio te pedimos que pruebes las siguientes relaciones y afirmaciones:

   (a) $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (b) Las funciones $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{ch} : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ $\quad \operatorname{th} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ tienen sendas funciones inversas que se simbolizan Argsh, Argch, y Argth respectivamente.

   (c) $\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\forall x > 1$, $\quad \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\forall x \in (-1, 1)$.

   (d) Graficar las funciones hiperbólicas y sus inversas.