Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 6: Integrales

1. (a) Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ derivables, definimos $\varphi : I \to \mathbb{R}$ como $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ para $x \in I$. Probar que φ es derivable y que $\varphi^{'}(x) = f(\beta(x)).\beta^{'}(x) - f(\alpha(x)).\alpha^{'}(x)$.
(b) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{3 + \operatorname{sen} t}\, dt, \qquad G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\, dt,$$

$$H(x) = \int_{2x+5}^{3} e^{1-t} \operatorname{sen} t\, dt \qquad J(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4}\, dt$$

2. Sean F y G dadas por:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{Arctg} x\right) \qquad G(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt$$

Demostrar que $F(x) = G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Demostrar que cualquiera que sea $x > 0$ vale:

$$\int_1^x \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

4. En las siguientes partes se sugiere usar convenientemente el teorema del valor medio para integrales.

(a) Sea f una función continua en un intervalo abierto I y sea x_0 un punto de I. Demostrar que $\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = 0$.

(b) Demostrar que para cada $p > 0$ se cumple que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_n^{n+p} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 0$.

(c) Demostrar que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt = 0$.

5. Consideremos la función f dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Hallar el máximo y el mínimo de f en $[0,1]$. Si se sabe que $\int_0^1 x^8\, dx = \frac{1}{9}$, deducir que:

$$\frac{1}{9\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^8}{\sqrt{1+x}}\, dx \leq \frac{1}{9}$$

6. Sean F y G dadas por:

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{Arctg}(t^2)\, dt \qquad G(x) = \int_0^x \operatorname{Arctg}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\, dt$$

Hallar F'' y G'' y encontrar la relación que existe entre $F(x)$ y $G(x)$.

7. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\pi/x), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $-\frac{1}{2} \ \leq \ \int_0^1 f \ \leq \ \frac{1}{2}$.

8. Demostrar el *segundo teorema del valor medio*, que puede enunciarse de la siguiente manera: Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ tal que g es no negativa en $[a,b]$ y $\int_a^b g \neq 0$. Entonces existe algún punto $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f.g \ = \ f(c) \ \int_a^b g$.

9. Se consideran las siguientes funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ como sigue:

$$F : F(x) = \operatorname{Arctg}(x) - \frac{x}{x^2+1} \qquad\qquad G : G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}} \, dt$$

(a) Calcular $F'(x)$, $G'(x)$, $F(1)$, $G(1)$ y deducir la relación entre F y G en $[0,+\infty)$. Calcular $G(0)$.

(b) Hallar la relación que existe entre F y G en $(-\infty, 0)$.

10. Calcular las siguientes integrales:

$$\int_1^2 \left(3x^2 - x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx \ , \quad \int_1^4 \frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} \, dx \ , \quad \int_0^1 \frac{dx}{x+1} dx \ , \quad \int_{-2}^1 e^{-|x|} \, dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x - 2\cos x\right) \, dx \ , \qquad \int_1^2 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \qquad \int_0^3 (|2x-1| + |2x-4|) \, dx$$

11. Aplicando el método de integración por partes para calcular:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx \qquad \int_1^2 x^2 \log x \, dx \qquad \int_0^1 x^2 \ e^{-x} \, dx \qquad \int_1^x t^2 \ (\log t)^3 \, dt, \ (x > 0)$$

$$\int_1^x \log t \, dt, \ (x > 0). \qquad \int_0^x e^{at} \operatorname{sen}(bt) \, dt \qquad \int_0^1 x \operatorname{sh} x dx \qquad \int_1^e \cos(\log t) dx$$

12. Encontrar una fórmula de recurrencia para la siguiente sucesión.

$$I_n(x) = \int_1^x (\log t)^n \ dt, \qquad x > 0, \ n \in N, \ n \geq 0.$$

13. Para cada $n \in N, \ n \geq 0$ consideremos:

$$I_n(x) = \int_1^x \frac{(\log t)^n}{t^2} \, dt \qquad (x > 1).$$

(a) Calcular $I_0(x)$.

(b) Hallar una fórmula de recurrencia para $I_n(x)$ para $n \geq 1$.

(c) Calcular $I_3(x)$.

14. Para cada $n \in N,\ n \geq 0$ consideremos:

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \ dx$$

(a) Calcular I_0.

(b) Utilizando partes probar que $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \forall n \geq 1$.

(c) Calcular I_4.

15. Sea f una función con derivada segunda continua en $[0, \pi]$ que cumple $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \cos x \ dx = 0$. Demostrar que $f'(\pi) = -f'(0)$.

16. Sabiendo que f es continua en $[0, 4]$ y que $\int_0^4 f \ = 10$, calcular $\int_0^2 f\left(x^2\right) \ 2x \ dx$.

17. (a) Sea $\Phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Haciendo la sustitución $u = \pi - x$ demostrar que

$$\int_0^\pi x \ \Phi(\operatorname{sen} x) \ dx \ = \ \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \Phi(\operatorname{sen} x) \ dx$$

(b) Calcular:

$$\int_0^\pi x \ \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} \ dx \qquad \qquad \int_0^\pi x \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x \ dx$$

18. (a) Probar que:

$$\int_0^1 x^p \ (1 - x)^q \ dx \ = \ \int_0^1 x^q \ (1 - x)^p \ dx \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t)^{2p+1} \ (\cos t)^{2q+1} \ dt$$

(b) Calcular:

$$\int_0^1 x^2 \ (1 - x)^{20} \ dx \qquad \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t)^5 \ (\cos t)^{41} \ dt$$

19. Calcular las siguientes integrales efectuando las sustituciones que se indican:

$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx, \quad x = t^2 + 1; \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x = \operatorname{sen}^2 t;$$

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \ dx, \quad x = 4 \operatorname{sen}^2 t - 2; \qquad \int_{-1}^0 x^2 \ \sqrt{4 + 3x} \ dx, \quad x = \frac{1}{3}(t^2 - 4).$$

20. Calcular:

$$\int_{-1}^0 \frac{3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \ dx, \quad \int_4^2 \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)(x+1)(x+2)}, \quad \int_2^3 \frac{3x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} \ dx.$$

21. Hallar todas las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{3x^3 - 10x^2 - x}{\left(x^2 - 1\right)^2} \qquad \qquad \frac{1 - 5x}{x^3 - x} \qquad \qquad \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}$$

22. Calcular:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)} \qquad \int \frac{xdx}{x^2-4x+8}$$

23. (a) Integrando por partes demostrar la siguiente *fórmula de recurrencia*:

$$\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m} = \frac{1}{(1-m)\Delta}\left(\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{m-1}} + (4m-6)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{m-1}}\right)$$

en donde $\Delta = b^2-4c$.

(b) Encontrar las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{1}{(x^2+x+3)^3} \qquad \frac{2x^4+3x^3+2x^2+3x-1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}$$