Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2003.

Práctico 7: Integrales impropias, fórmula de Taylor

1. Clasifica (sin calcular) las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t}\, dt \qquad \int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{2-t}}\, dt \qquad \int_0^{1} \frac{\log t}{t}\, dt$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{9}{x^2+x-2}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, dt$$

2. Clasifica las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2+4t-7}{t^4+1}\, dt \qquad \int_2^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+t-2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{2t^3-4t}{(t^2+1)^2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{4}{x^2-1}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{1+xe^{2x}}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} t^4\, e^{-t}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ e^{-2t}}{t^4+1}\, dt$$

3. Clasifica las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2}{x(x+1)}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} t^4\, e^{-t}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ e^{-2t}}{t^4+1}\, dt$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{(t-1)^{1/3}}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{(1+x)^2}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} e^{-2x}\ \cos^2 x\, dx$$

4. Sea f la función dada por:

$$f(t) = \frac{1}{t\ \left(1+\log^2 t\right)}$$

Clasifica $\int_0^{+\infty} f$ y, si corresponde, calcula su valor.

5. Sea $I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\log^n t}{t^{1+\alpha}}\, dt$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$. Comprueba que esta integral converge. Encuentra una relación de recurrencia entre $I_n(\alpha)$ e $I_{n-1}(\alpha)$. Prueba que $I_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

6. Demuestra que $\int_1^{+\infty} \frac{1-2\operatorname{sen} t}{t^3}\, dt$ es convergente y que $-1/2 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1-2\operatorname{sen} t}{t^3}\, dt \leq 3/2$.

7. (a) Prueba que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t\ (\log t)^2}\, dt$ converge.

(b) Prueba que: $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t}\, dt = \int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t\ (\log t)^2}\, dt$

(c) Deduce que: $\left|\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t}\, dt\right| \leq \frac{1}{\log \pi}$

8. Prueba las siguientes desigualdades:

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{(x+1)^2}\, dx\right| \leq 1. \qquad \left|\int_0^{+\infty} (-5+\operatorname{sen} x)\ e^{-3x}\, dx\right| \leq 2. \qquad \left|\int_{-\infty}^{0} \operatorname{sen} x\ e^x\, dx\right| \leq 1.$$

9. Sea

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos^n x\, dx.$$

(a) Probar que I_n converge para todo $n \geq 1$.

(b) Probar que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(c) Probar que para todo $n \geq 2$ se cumple

$$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\cos^{n-2} x\, dx.$$

10. Sea $f : R \longrightarrow R$ una función con derivada continua tal que:
(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f$ converge absolutamente. (iii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \mid f \mid = 7$

(a) Prueba que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)\ \operatorname{sen} t\ dt$ *C.A. y que* $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)\ \operatorname{sen} t\ dt\right| \leq 7$

(b) Prueba que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f'(t)\ \cos t\ dt = f(x)\ \cos x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\ \operatorname{sen} t\ dt \qquad \forall x \in R.$

(c) Deduce que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f'(t)\ \cos t\ dt$ *converge y que* $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f'(t)\ \cos t\ dt\right| \leq 7$

11. (a) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}$ converge. (integrar por partes).
(b) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$ no converge. $\left(\text{recuerda que } \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}\right)$.
(c) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$ *converge*
(d) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$ no converge. (Te sugerimos escribir $\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t} - \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$ y observar que $\sqrt{t} + \operatorname{sen} t \leq \sqrt{t} + 1$.)
(e) Muestra que $\lim_{t\to+\infty}\left((\sqrt{t}+\operatorname{sen} t)/\sqrt{t}\right) = 1$ y que, sin embargo

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t} \quad \text{no tienen el mismo comportamiento.}$$

¿Qué comentario te merece este resultado?

12. (a) Clasifica utilizando el criterio integral, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n\big(\log\log n\big)^\alpha}$$

(b) Encuentra una generalización del resultado anterior.

13. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \frac{x^3}{6}$

(a) Encuentra el polinomio de Mac Laurin de orden 4 de f.

(b) Analiza si f presenta un máximo o un mínimo relativo en 0.

(c) Calcula, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el siguiente límite: $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$

14. Aplicando desarrollos de Mac Laurin calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\longrightarrow0} \frac{x-\log(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\log(1+x)-\operatorname{sen} x}{x^2+4x^3} \qquad \lim_{x\longrightarrow0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x\ \cos x}{x^\alpha},$$

discutiendo según α real.

15. A partir de los desarrollos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en 0, clasificar las siguientes series

$$\sum\left(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \sum\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}\right)$$

16. Encuentra el polinomio de Mac Laurin de orden n de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{2-x} \qquad \frac{1}{a-x} \qquad \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad \log(1-x) \qquad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$e^x-\cos x \qquad \operatorname{sen} x\cos x \qquad \operatorname{sen}^2 x \qquad \frac{1+x^2}{1-x^2}\ (orden\ 4) \qquad \log(1+\operatorname{sen} x)\ \ (orden\ 4)$$

17. Aplicando desarrollos de Mac Laurin calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^2/2+\operatorname{sen} x-x}{1-\cos x-x^2/2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x-x^2/2}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$$

18. En cada uno de los siguientes casos determina los valores de los parámetros para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x\to 0$. Encuentra la parte principal.

$$a(e^x-1)-bx^2-x \qquad x+a\operatorname{sen} x+b\operatorname{tg} x \qquad e^x\ \operatorname{sen} x-(ax+bx^2+cx^3)$$

$$a(e^x-x-1)+b\operatorname{sen} x+c\log(1+x)-x \qquad \cos x-\frac{1+2ax^2}{1+3bx^2} \qquad \log(1+x)-\frac{ax+bx^2}{1+cx}$$

19. Usando el desarrollo de Mac Laurin de $\log(1+x)$, calcula $\log 1,5$ con error menor que $0,001$. Compara tu resultado con el valor para $\log 1,5$ que te da la calculadora. Vuelve a hacer el ejercicio con error menor que $0,0001$.

20. ¿Cuál es el comportamiento local de $f(x)=e^x-\operatorname{sen} x-1-x^2/2-x^3/3$ alrededor de 0?. Bosqueja f en algún entorno de 0.

21. (a) Encuentra la expresión de Lagrange para el resto de orden 4 de la función $\operatorname{sen} x$.
(b) Prueba que $|r_4(x)|\le\frac{1}{2^5\,5!}$ si $x\in[0,\frac{1}{2}]$.
(c) Calcula un valor aproximado de la integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\operatorname{sen} t^2\ dt$$

y encuentra una cota del error cometido.