Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e integral II (2002)

Práctico 1

1. (a) Investigar si las siguientes funciones de R^2 en R son normas:
   i)$f(x,y) = |x| + |y|$
   ii)$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   iii)$f(x,y) = |x + y|$
   iv)$f(x,y) = \max(|x|, |y|)$

   (b) Para aquellas que sean normas dibujar la bola de centro $(3,4)$ y radio 2 e indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella: $(3,4), (4,5), (0,1)$.

2. (a) Probar que si N_1 y N_2 son normas en R^n entonces $N = N_1 + N_2$ también lo es.

   (b) Deducir que $N(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + max(|x|, |y|)$ es una norma en R^n y verificar que $N(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1) = 1$.

   (c) Dibujar el conjunto $\{(x,y) \in R^2 : N(x,y) = 1\}$.

3. Se definen los siguientes conjuntos:

   $A_1 = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$
   $A_2 = \{(x,y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 2, y > 0\}$
   $A_3 = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$
   $A_4 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\}$
   $A_5 = \{(x,y) \in R^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in R^2 : x = y\}$
   $A_6 = \{(x,y) \in R^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$
   $A_7 = \{(x,0) \in R^2 : x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1,0)\} \cup \{A_1 \cap Q^2\}$
   $A_8 = \{(x,y,z) \in R^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   $A_9 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

   (a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.

   (b) Hallar el interior, el exterior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.

   (c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

   (d) Indicar si son abiertos o cerrados.

4. (a) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.

   (b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A - \{p\}$ es abierto.

5. Probar los siguientes resultados:

   (a) A es abierto sii $A = A^o$ sii A^C es cerrado sii $A \cap \delta A = \phi$.

   (b) $A^o = \bar{A} - \delta A =$ es un conjunto abierto, más aún, es el "mayor" conjunto abierto incluido en A.

   (c) A es cerrado sii A^C es abierto sii $A = \bar{A}$ sii $\delta A \subset A$ sii $A^{'} \subset A$.

   (d) $\bar{A} = A \cup \delta A = A \cup A'$ es un conjunto cerrado, más aún, es el "menor" cerrado que contiene a A.

   (e) A' es un conjunto cerrado.