Facultad de Ciencias. Centro de Matemática. Cálculo Diferencial e Integal II (2002)

Práctico 2

1. Probar que toda bola en R^n es un conjunto convexo.

2. Probar que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

3. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en R^2:

$$a_n = (e^{-n}, 3/n) \qquad b_n = (e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n) \qquad c_n = ((-1)^n, (-1)^n + 1/n)$$

4. Demostrar que si $x_k \to a$, $y_k \to b$ en R^n, y $\alpha_k \to \alpha$ en R, entonces se verifica:

(a) $x_k + y_k \to a + b$.

(b) $\langle x_k, y_k \rangle \to \langle a, b \rangle$.

(c) $\alpha_k x_k \to \alpha a$.

5. Demostrar la unicidad del límite de una sucesión en R^n.

6. Probar que si N es una norma en R^n (es decir, una función de R^n en R que verifica los tres axiomas de norma) se cumple:

(a) $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. Interpretar geometricaménte, si N es la norma euclideanda.

(b) Si $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ entonces $\lim_{k\to\infty} N(x_k) = N(x)$. ¿Es cierto el recíproco?

(c) Una sucesión $\{x_k\}$ no tiene subsucesiónes convergentes si y solo si $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$.

7. Dos normas N_1 y N_2, definidas en un espacio vectorial se dicen equivalentes, cuando existen dos constantes positivas h y k tales que $hN_2(x) \leq N_1(x) \leq kN_2(x)$ para todo vector x del espacio vectorial. Probar que si dos normas N_1 y N_2 son equivalentes entonces, dada una bola B_{N_1} (definida con la primer norma) existen dos bolas B_{N_2} y B'_{N_2} (definidas con la segunda norma) tal que $B_{N_2} \subset B_{N_1} \subset B'_{N_2}$.

8. Demostrar que si N es una norma en R^n, existe una constante k tal que $N(x) \leq k\|x\|$, donde la segunda norma es la euclideana.

Ejercicios complementarios

9. Demostrar que si N es una norma en R^n, existe una constante h tal que $h\|x\| \leq N(x)$, donde la primer norma es la euclideana. (Sugerencia: ver Lages Lima, pg. 18. Esto demuestra, junto con el ejercicio anterior, que en R^n todas las normas son equivalentes.) Probar que la definición de límite de una sucesión en R^n no depende de la norma elegida.

10. Sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[a, b]$ a valores reales con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de una función por un número. En $C([a, b])$ consideremos las siguientes normas:

$$\| f \|_\infty = \max\{| f(t) | \,/ t \in [a, b]\} \qquad \| f \|_2 = \left(\int_a^b | f(t) |^2 \; dt \right)^{1/2}$$

(a) Probar que $\| f \|_2 \leq (b - a)^{1/2} \| f \|_\infty, \quad \forall f \in C([a, b])$.

(b) Probar que si $f_k \longrightarrow f$ con la norma $\| \ \|_\infty$ entonces $f_k \longrightarrow f$ con la norma $\| \ \|_2$.

(c) Probar que no es cierto el recíproco de la parte (b).

(d) ¿Estas dos normas consideradas son equivalentes?

(e) ¿Es $C([a, b])$ un espacio vectorial de dimensión finita?