Práctico 3

1. Dada $f\colon A \subset R^n \to R^m$, tenemos $f(x_1,\dots,x_n) = \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big)$, y a cada función $f_k\colon A \subset R^n \to R$ $(k = 1,\dots,m)$ la llamamos *función coordenada.* Demostrar que la función f es continua en un punto a, si y solo si, son continuas las funciones coordenadas en a.

2. (a) Demostrar que la recta real R es un conjunto conexo. Demostrar, utilizando el teorema que afirma que el recorrido de un conjunto conexo a través de una función continua es un conjunto conexo, que son conexos los conjuntos $[0,1]$, $(0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$. ¿Es conexo un intervalo finito arbitrario? ¿Y un intervalo arbitrario?. (b) Demostrar que si un conjunto es conexo en R, entonces es un intervalo.

3. En cada caso hallar el dominio y estudiar la continuidad de f, donde f está definida por las siguientes fórmulas:

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
2. $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
3. $f(x,y) = \mathrm{Arcsen}\big(x/\sqrt{x^2+y^2}\big)$

4. Dibujar el dominio de f y los conjuntos de nivel (es decir $\{(x,y) \in R^2\colon f(x,y) = c\}$) de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad\qquad f(x,y) = \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

5. Dada $f\colon R^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 \geq 1, \end{cases}$$

investigar la continuidad de f en todo R^2.

6. Sea $f\colon R^n \to R$ una función continua. Probar que:

(a) Si $f(x) > 0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f\big(B(x,\varepsilon)\big) > 0$. (Conservación del signo.)

(b) $\{x \in R^n\colon f(x) > 0\} = f^{-1}(0,+\infty)$ es un conjunto abierto.

(c) $\{x \in R^n\colon f(x) < 0\} = f^{-1}(-\infty,0)$ es un conjunto abierto.

(d) $\{x \in R^n\colon f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ es un conjunto cerrado.

7. Una función $f\colon D \subset R^n \to R$ se dice *lipschitziana*, cuando existe $k > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x-y\| \quad \forall x,y \in D.$$

(a) Probar que una transformación lineal $T\colon R^n \to R$ son lipschitzianas, determinando una constante que verifique la definición.

(b) Probar que una norma $N(x)$ definida en R^n es una función lipschitziana, y determinar una constante que verifique la definición.

(c) Probar que toda función lipschitziana es uniformemente continua.

(d) Probar que $f\colon [0,+\infty) \to R$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no lipschitziana.