Facultad de Ciencias. Centro de Matemática. Cálculo Diferencial e Integal II (2002)

Práctico 4

1. Probar que en los siguientes casos no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & si\ x+y\neq 0 \\ 0, & si\ x+y=0 \end{cases}$$

2. (a) Sean $f,g:U(\subset R^n)\to R$, y $p\in U$. Probar que si $\lim_{x\to p} f(x)=0$ y g es una función acotada en alguna bola reducida de centro p entonces $\lim_{x\longrightarrow p} f(x)g(x)=0$.
   (b) Calcular los límites de la siguientes funciones para $(x,y)\longrightarrow(0,0)$:

$$x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

3. (a) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y existen los límites unidimensionales: $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$ entonces existen los límites iterados y:

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\lim_{y\longrightarrow b} f(x,y)\right)=\lim_{y\longrightarrow b}\left(\lim_{x\longrightarrow a} f(x,y)\right)=L$$

   (b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos. Comentar.
   (c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y dan iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Comentar.
   (d) Se considera $f:R^2\longrightarrow R$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{y}, & si\ y\neq 0 \\ 0, & si\ y=0 \end{cases}$$

   Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, pero un límite iterado no existe. ¿Esto contradice la parte (a)?

4. Calcular:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,2)}\frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x\,y\ Log\mid y\mid \qquad \lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)}\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{Log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

5. Se considera $f:R^2\to R$. Mediante el cambio de variable $x=r\cos(\theta)$, $y=r\ \mathrm{sen}(\theta)$, obtenemos $f(x,y)=g(r,\theta)$.
   (a) Supongamos que $g(r,\theta)=f_1(r)\ f_2(\theta)$. Probar que si f_2 está acotada $\forall\theta\in[0,2\pi)$ y $lim_{r\to 0}f_1(r)=0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.
   (b) ¿Qué sucede si f_2 no está acotada?
   (c) Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   (d) ¿Es verdadera la siguiente implicación?
   $\forall\theta\in[0,2\pi)\ \lim_{r\to 0} g(r,\theta)=0,\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$