Práctico 5

1. Para las siguientes funciones determinar el máximo dominio de definición posible, estudiar continuidad y hallar derivadas parciales en los dominios determinados:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2y - 3xy + 9x$.

(b) $f(x,y) = \operatorname{Artan}(y/x)$ (Calcular además todas las derivadas de segundo orden.)

(c) $f(x,y) = x^y$, $\qquad f(x,y,z) = (xy)^z$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (Calcular las derivadas de segundo orden en $(0,0)$.)

2. Estudiar continuidad y existencia de derivadas direccionales (en particular, de las derivadas parciales) en los puntos que se indican:

(a) En $(0,0)$, discutiendo según a real:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ a & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(b) En $(0,y_0)$: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) En los ejes: $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}(1/x)\cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

(d) En $(x_0,1)$: $f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1. \end{cases}$

3. (a) Calcular el diferencial en un punto a arbitrario del dominio de las siguientes funciones:

(i) Una transformación lineal $T\colon R^n \to R$.

(ii) Dada una matriz simétrica $A_{n\times n}$, la función es $Q\colon R^n \to R$ dada por $Q(x) = x^tAx$ para todo $x \in R^n$.

(b) Dada una transformación lineal $T\colon R^n \to R^n$ definimos $f\colon R^n \to R$ por $f(x) = \langle x, T(x)\rangle$. Dado $u \in R^n$, hallar la derivada direccional de f según u.

4. Se considera $f\colon R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}(1/x) + e^{xy} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Estudiar continuidad de f en los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

(b) Hallar las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(c) Estudiar diferenciabilidad de f en los puntos $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$.

5. 1. Demostrar que si u es una función de la forma $u(x,y) = f(x)g(y)$, donde f y g son funciones definidas en algun intervalo abierto de R, entonces, u satisface la ecuación diferencial

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Demostrar el recíproco de la proposición anterior.

6. Las ecuaciones $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \operatorname{sen} v$ definen u y v como funciones de x e y, sean estas: $u = U(x,y)$ y $v = V(x,y)$. Hallar fórmulas explícitas para $U(x,y)$ y $V(x,y)$ y probar que en todo punto distinto del origen los gradientes de ambas funciones son perpendiculares.

7. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ ($a \in R^+$) en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). Demostrar que el volumen del tetraedro limitado por ese plano y los planos coordenados es $9a^3/2$.

8. Si (x,y) verifica $x^2+y^2 = 1$, hallar (x,y) y la dirección v con $\|v\| = 1$ para que $(Df)_{(x,y)}(v)$ sea máxima, siendo $f(x,y) = 3x^2 + y^2$.

9. Se consideran $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to U \subset R^n$ y $f\colon U \to R$ funciones diferenciables. Calcular $(f \circ \lambda)''(t)$ en función de las derivadas parciales de f y λ.