Práctico 6

1. Hallar el máximo y el mínimo en todo R^2 de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = y^2 + x^4 + y^4$

(b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(c) $f(x,y) = \left(ax^2 + by^2\right)\ e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

(d) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$

(e) $f(x,y) = \left(1 + (x-1)^2 + y^2\right)\left(1 + x^2 + (y-1)^2\right)\left(1 + x^2 + y^2\right)$

2. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

(b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$.

(c) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$.

(d) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x+y)$ en $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

3. Sea $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$. Hallar todos sus puntos críticos y clasificarlos. ¿Tiene f extremos absolutos en todo R^2?

4. Determinar los extremos absolutos y relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2) \text{ en } \ [0,1] \times [0,1].$$

5. Dado n números reales diferentes $x_1, ..., x_n$ y otros n números (no necesariamente diferentes) $y_1, ..., y_n$, hallar una función lineal $f(x) = ax + b$ tal que minimice el "error cuadrático":

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2$$

6. Verificar que el campo escalar $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tiene un punto estacionario en $(1,1,1)$ y determinar la naturaleza de dicho punto.

7. Sea f una función diferenciable en un conjunto abierto U de R^n. Se dice que f es homogénea de grado p en U si $f(tx) = t^p f(x) \ \ \forall t > 0, x \in U, tx \in U$.

(a) Probar que para una función homogénea de grado p se cumple que $\langle x, \nabla f(x)\rangle = pf(x)$ (considerar $g(t) = f(tx)$).

(b) Probar que si f satisface $\langle x, \nabla f(x)\rangle = pf(x)$ para todo x en un abierto U entonces f es homogénea de grado p en U. (considerar $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$).

(c) Si f es de clase C^2 y homogénea de grado p en R^2 probar que f verifica:

$$x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) = p(p-1)f(x,y)$$