Práctico 7

1. Probar que la ecuación $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$ determina y en función de x alrededor del punto $(1, 2)$. Dar la ecuación de las rectas tangente y normal a $y = \varphi(x)$ en $x = 1$.

2. Probar que las siguientes ecuaciones determinan y en función de x alrededor del punto (x_0, y_0), que se indica en cada caso. Calcular $\varphi^{'}(x_0)$, y $\varphi^{''}(x_0)$.

(a) $x^2y + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(b) $x + \mathrm{sh}(x) - \mathrm{sen}(y) = 0$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Hallar $\varphi^{'''}(x_0)$.

(c) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, en (x_0, y_0) genérico con $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, $y_0 \neq 0$. ¿Que ocurre si $y_0 = 0$?

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \neq 0$, tal que $(x^2 + y^4)f(x, y) + \big(f(x, y)\big)^3 = 1$, $\forall (x, y) \in U$. Probar que $f \in C^\infty$ en U.

4. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = \varphi(x)$ definida para todo x real. (Se sugiere estudiar las funciones $F(y) = e^y + y$ y $G(x) = e^{-2x} - x$.) Hallar $\varphi^{'}(0)$, $\varphi^{''}(0)$ y $\varphi^{'''}(0)$.

5. Sean $u = (x, y, z)$ y $r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Mostrar que ∇r es un vector unitario y colineal con u.

(b) Mostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}u$ (n entero).

(c) Hallar f tal que $\nabla f = u$.

Aplicación: Se sabe que el campo eléctrico creado por una carga puntual Q ubicada en $(0, 0, 0)$, en el punto (x, y, z) es $E(x, y, z) = kQu/r^3$ y que el potencial eléctrico es una función V tal que $E = -\nabla V$. Deducir que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales. Hallar el potencial V.

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = axz + x\,\mathrm{Artan}(z) + z\,\mathrm{sen}(2x + y) - 1$ (a real).

(a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ determina a z en función de x e y alrededor de $(0, \pi/2, 1)$.

(b) Hallar a para que $(0, \pi/2)$ sea un punto crítico de φ, y clasificarlo (φ es la función definida implícitamente).

(c) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{\varphi(x,y)-1-3x^2/2-2x(y-\pi/2)}{x^2+(y-\pi/2)^2}$.

7. (a) Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ en $\mathbb{R}^2$. (b) Hallar los extremos relativos de f condicionados a $x^2 + y^2 + xy = 1$, y condicionados a $x^2 + y^2 + xy \leq 1$.

8. Hallar extremos absolutos de f en D:

(a) $f(x, y) = xy$ con $D = \{(x, y) \colon 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.

(b) $f(x, y) = e^{(x-1)^2+y^2}$ con $D = \{(x, y) \colon 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Hallar la máxima y mínima distancia desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. Hallar además los puntos en que hay tangentes horizontales y verticales.

10. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

11. Hallar la mínima distancia del origen de $\mathbb{R}^3$ al conjunto de puntos (x, y, z) que verifican la ecuación $x^2(y + z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$.