Práctico 8

1. Investigar en cuáles puntos es f el localmente C^1 invertible y hallar el diferencial de la inversa local.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$.
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (x\cos y, x \operatorname{sen} y)$.
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^3/3 - 2x^2/5 + 6x - 2$.

2. (Prueba parcial, 26/11/2001) Sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y,z) = x^3 + y^2 + xz$.
(a) Hallar los puntos $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tales que es posible aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $g(x,y,z) = 0$ para despejar z como función de (x,y) en un entorno de (a,b).
(b) Calcular el gradiente de φ en el punto $(1,1)$, donde $g\big(x,y,\varphi(x,y)\big) = 0$ para todo (x,y) en un entorno de $(1,1)$.

3. (Exámen 10/2/2000) Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(0,0,2)$ a la curva intersección del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con el cilindro de ecuación $3(z-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$.

4. Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(1,1,1)$ a la curva intersección del cono de ecuación $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

5. Hallar el máximo y el mínimo del volumen de un tetraedro inscrito en la esfera de centro en el origen y radio 1, con dos vértices fijos en $(1,0,0)$ y$(0,1,0)$.

6. (Exámen 4/3/2002) Se considera el subconjunto G de $\mathbb{R}^3$ de los puntos que verifican

$$\begin{cases} 3y^2 + 4x^2 - 4z = 0 \\ z^2 - y = 0 \end{cases}$$

(a) Probar que G es compacto.
(b) ¿Hay puntos singulares en G (es decir, puntos en los cuales el diferencial de $(3y^2 + 4x^2 - 4z, z^2 - y)$ no tiene rango máximo)?
(c) Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = 4xy + 4z - 1.$$

Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función f en la región G.

7. (Exámen 7/12/2001) Se considera $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = \big(x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1, x^2 - y^2 + z^2\big).$$

Sea $C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = (0,0)\big\}$.
(a) Probar que C es un conjunto compacto.
(b) Hallar la distancias máxima y míinima del punto $(1,1,1)$ al conjunto C.

8. (Exámen 10/2/2000) Se considera la ecuación

$$3x^3 + 6x`2y + 3xy^2 + 2y^3 - 16 = 0. \tag{1}$$

(a) Probar que existe la función implícita $y = f(x)$ en (1) y que f puede definirse en toda la recta real.
(b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f y estudiar su comportamiento cuando $x \to \pm\infty$, incluyendo la existencia de asíntotas. Como conclusión, representar gráficamente la función f.

9. (Exámen 10/12/1999) Hallar los extremos absolutos de la función:

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx,$$

en la región definida por:

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ x + y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

10. (Exámen 1o./8/2002) Se considera en $\mathbb{R}^3$ el conjunto de C los puntos (x, y, z) que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Admitiendo que C es cerrado y acotado, hallar las distancias máxima y mínima de C al plano de ecuación

$$y + 2z = 0.$$

(b) Probar que C es cerrado y acotado.