Práctico 1: Nociones topológicas elementales de $\mathbb{R}^n$ (primera parte)

1. (a) Verificar que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \times)$ es un espacio vectorial.

(b) Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Demostrar que $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ es un producto interno.

2. (a) Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas

(i) $N(x, y) = |x| + |y|$,

(ii) $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

(iii) $f(x, y) = \max\big\{|x|, |y|\big\}$,

(iv) $f(x, y) = |x + y|$.

(b) Para aquellas que sean normas dibujar la bola de centro en el origen y radio 1, e indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro $(3, 4)$ y radio 2: $(3, 4), (4, 5), (0, 1)$.

3. (a) Demostrar que $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ y $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ son normas en $\mathbb{R}^n$.

(b) Demostrar que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

4. (a) Probar que si N_1 y N_2 son normas en $\mathbb{R}^n$ entonces $N = N_1 + N_2$ también lo es.

(b) Deducir que $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \max(|x|, |y|)$ es una norma en $\mathbb{R}^2$ y verificar que $N(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1) = 1$.

(c) Dibujar el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon N(x, y) = 1\}$.

5. (a) Demostrar que la equivalencia entre normas verifica la propiedad transitiva: si N_1 y N_2 son normas equivalentes, y lo mismo ocurre con N_2 y N_3, entonces N_1 y N_3 son normas equivalentes.

(b) Probar que si dos normas N_1 y N_2 son equivalentes entonces, dada una bola B_{N_1} (definida con la primer norma) existen dos bolas B_{N_2} y B'_{N_2} (definidas con la segunda norma) tal que $B_{N_2} \subset B_{N_1} \subset B'_{N_2}$.

6. (a) Probar que si $X \subset B(a, r)$ entonces X es un conjunto acotado.

(b) Probar que la intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

7. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = \Big(e^{-n}, \frac{3}{n}\Big),\ b_n = \big(e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n\big)\,,\ c_n = \Big((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\Big).$$

8. (a) Demostrar que una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es convergente si y sólo si son convergentes sus sucesiones coordenadas.

(b) Demostrar que una sucesión en $\mathbb{R}^n$ está acotada si y sólo si están acotadas sus sucesiones coordenadas.

(c) Una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ no tiene subsucesiones convergentes si si y sólo si $\|x_k\| \to \infty$ $(k \to \infty)$.

(d) Probar que si una sucesión tiene límite, todas sus subsucesiones tienen el mismo límite.

(e) Probar que si una sucesión es tal que toda subsucesión tiene una subsucesión convergente a un mismo límite, la sucesión original tiene ese límite.

9. Probar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$ (es decir, una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que verifica los tres axiomas de norma) se cumple:

(a) $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. Interpretar geometricaménte, si N es la norma euclideanda.

(b) Si $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ entonces $\lim_{k\to\infty} N(x_k) = N(x)$. ¿Es cierto el recíproco?

10. Demostrar que el límite de una sucesión en $\mathbb{R}^n$, cuando existe, es único.

11*. Sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[a, b]$ a valores reales con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de una función por un número. En $C([a, b])$ consideremos las siguientes normas:

$$\| f \|_\infty = \max\{| f(t) | : t \in [a, b]\} \qquad \| f \|_2 = \left(\int_a^b | f(t) |^2 \; dt \right)^{1/2}$$

(a) Probar que $\| f \|_2 \leq (b - a)^{1/2} \| f \|_\infty, \quad \forall f \in C([a, b])$.

(b) Probar que si $f_k \longrightarrow f$ con la norma $\| \; \|_\infty$ entonces $f_k \longrightarrow f$ con la norma $\| \; \|_2$.

(c) Probar que no es cierto el recíproco de la parte (b).

(d) ¿Estas dos normas consideradas son equivalentes?

(e) ¿Es $C([a, b])$ un espacio vectorial de dimensión finita?

12. Se definen los siguientes conjuntos:

$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$

$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, y > 0\}$

$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$

$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$

$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$

$A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$

$A_7 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1, 0)\} \cup \{A_1 \cap Q^2\}$

$A_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$

$A_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$

(a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.

(b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.

(c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

(d) Indicar si son abiertos o cerrados.

13. Probar los siguientes resultados.

(a) Si A es un conjunto abierto y $x \in A$ entonces $A \setminus \{x\}$ es abierto.

(b) A^c es cerrado sii $A \cap \delta A = \phi$.

(c) $\overset{\circ}{A} = \bar{A} - \delta\, A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el "mayor"conjunto abierto incluido en A).

(d) A es cerrado sii $\delta\, A \subset A$ sii $A' \subset A$.

(e) $\bar{A} = A \cup \delta\, A = A \cup A'$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el "menor"cerrado que contiene a A).

(f) A' es un conjunto cerrado.

14. Hallar todos los puntos de acumulación del conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} :\ n \text{ y } m \text{ naturales} \right\}.$$

15. Demostrar que un punto a es de acumulación de un conjunto X sii existe una sucesión $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ que converge a a.