Práctico 4: Diferenciabilidad - Última parte.

1. Hallar el máximo y el mínimo absolutos en todo $\mathbb{R}^2$ de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = y^2 + x^4 + y^4$.

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

(c) $f(x, y) = \left(ax^2 + by^2\right)\ e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

(d) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$.

2. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

(b) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.

(c) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

(d) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

(e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) \operatorname{sen}(x + y)$ en $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

3. Estudiar extremos relativos y absolutos de la función $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

4. Sea $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$. Hallar todos sus puntos críticos y clasificarlos. ¿Tiene f extremos absolutos en todo $\mathbb{R}^2$?

5. Determinar los extremos absolutos y relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) \text{ en } [0, 1] \times [0, 1].$$

6. Verificar que el campo escalar $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tiene un punto estacionario en $(1, 1, 1)$ y determinar la naturaleza de dicho punto.

7.(Regresión lineal) Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, parejas de números reales, hallar una función $f(x) = ax + b$ que minimice el “error cuadrático” $E(a, b)$, dado por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 .$$

8. Sea f una función diferenciable en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es homogénea de grado p en U si $f(tx) = t^p f(x)\ \ \forall t > 0, x \in U, tx \in U$.

(a) Dar una condición para que un polinomio de grado p en n variables sea homogéneo de grado p.

(b) Probar que para una función homogénea de grado p se cumple que $\langle x, \nabla f(x)\rangle = pf(x)$. Sugerencia: considerar $g(t) = f(tx)$.

(c) Probar que si f satisface $\langle x, \nabla f(x)\rangle = pf(x)$ para todo x en un abierto U entonces f es homogénea de grado p en U. Sugerencia: considerar $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$.

(d) Si f es de clase C^2 y homogénea de grado p en $\mathbb{R}^2$ probar que f verifica:

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = p(p-1)f(x, y)$$

9. Determinar los conjuntos de nivel y los gradientes de las funciones $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas mediante $f(x, y) = ax + by$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.

10. Hacer un croquis del dominio de f y dibujar los conjuntos de nivel.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad f(x, y) = \log\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

11. Probar que la ecuación $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$ determina $y = f(x)$ alrededor del punto $(1, 2)$. Dar la ecuación de las rectas tangente y normal a $f(x)$ en $x = 1$.

12. (Ejercicio de examen 10/2/2000) Se considera la ecuación

$$3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 2y^3 - 16 = 0.$$

(a) Probar que existe la función implícita $y = f(x)$ definida por la ecuación anterior, y que f puede definirse en toda la recta real.
(b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f y estudiar su comportamiento cuando $x \to \pm\infty$, incluyendo la existencia de asíntotas. Como conclusión, representar gráficamente la función f.

13. Probar que las siguientes ecuaciones determinan $y = f(x)$ alrededor del punto (x_0, y_0), que se indica en cada caso. Calcular $f'(x_0)$, y $f''(x_0)$.

(a) $x^2y + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(b) $x + \mathrm{sh}(x) - \mathrm{sen}(y) = 0$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Hallar $f'''(x_0)$.

(c) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, en (x_0, y_0) genérico con $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, $y_0 \neq 0$. ¿Que ocurre si $y_0 = 0$?

14. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f(x, y) \neq 0$, tal que $(x^2 + y^4)f(x, y) + \big(f(x, y)\big)^3 = 1$, $\forall (x, y) \in U$. Probar que $f \in C^\infty$ en U.

15. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = f(x)$ definida para todo x real. (Se sugiere estudiar las funciones $F(y) = e^y + y$, $G(x) = e^{-2x} - x$.) Hallar $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

16. Sean $u = (x, y, z)$ y $r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Mostrar que ∇r es un vector unitario y colineal con u.

(b) Mostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}u$ (n entero).

(c) Hallar f tal que $\nabla f = u$.

Aplicación: Se sabe que el campo eléctrico creado por una carga puntual Q ubicada en $(0, 0, 0)$, en el punto (x, y, z) es $E(x, y, z) = kQu/r^3$ y que el potencial eléctrico es una función V tal que $E = -\nabla V$. Deducir que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales. Hallar el potencial V.

17. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = axz + x\,\mathrm{Arctg}(z) + z\,\mathrm{sen}(2x + y) - 1$ (a real).

(a) Probar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina a $z = f(x, y)$ alrededor de $(0, \pi/2, 1)$.

(b) Hallar a para que $(0, \pi/2)$ sea un punto crítico de f, y clasificarlo.

(c) Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{f(x,y)-1-3x^2/2-2x(y-\pi/2)}{x^2+(y-\pi/2)^2}$.

18. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + yz$.

(a) Hallar los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tales que es posible aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $F(x, y, z) = 0$ para despejar $z = f(x, y)$ en un entorno de (a, b).

(b) Calcular el gradiente de f en el punto $(1, 1)$.

19. Se define la distancia $d(A, B)$ entre dos conjuntos A y B de $\mathbb{R}^2$, mediante

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\|\colon a \in A, b \in B\},$$

donde $\|x\|$ denota la norma euclideana.

(a) i) Demostrar que si A es compacto, B es cerrado, y son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), entonces $d(A, B) > 0$.

ii) Sea $A \subset U$, A compacto, U abierto. Demostrar que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ se verifica $B(x, r) \subset U$.

(b) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, 0 un valor regular de f, y $S = f^{-1}(0)$ la superficie de nivel 0 de f. Si $p \notin S$ y existe un $q \in S$ tal que $d(\{p\}, S) = \|p - q\| > 0$, demostrar que $p - q \perp T_qS$.

(c) Sea además $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, 0 valor regular de g, y $V = g^{-1}(0)$. Supongamos que existen dos puntos $p \in S$ y $q \in V$ tales que $d(S, V) = \|p - q\| > 0$. Demostrar que $T_pS = T_qV$.

20. (a) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = ax + by$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) condicionados a $x^2 + y^2 = 1$

(b) Determinar los extremos absolutos de la función $g(x, y, z) = ax+by+cz$ ($a^2+b^2+c^2 \neq 0$) condicionados a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

21. Se considera $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x + 2y)e^{x+y}$. Hallar los extremos de f condicionados a $x^2 + y^2 = 1$.

22. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = \langle x, y\rangle$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$). Hallar los extremos de f condicionados a $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$ y deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

23. (a) Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ en $\mathbb{R}^2$. (b) Hallar los extremos relativos de f condicionados a $x^2+y^2+xy = 1$, y condicionados a $x^2+y^2+xy \leq 1$.

24. Hallar extremos absolutos de f en D:

(a) $f(x, y) = xy$ con $D = \{(x, y)\colon 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$.

(b) $f(x, y) = e^{(x-1)^2+y^2}$ con $D = \{(x, y)\colon 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

25. Hallar la máxima y mínima distancia desde el origen a la curva $5x^2+6xy+5y^2 = 8$. Hallar además los puntos en los que esta curva tiene tangentes horizontales y verticales.

26. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

27. Hallar la mínima distancia del origen de $\mathbb{R}^3$ al conjunto de puntos (x, y, z) que verifican la ecuación $x^2(y + z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$.