Integrales múltiples

Cálculo II (2003) *

El objetivo de este capítulo es definir y aprender a calcular integrales de funciones reales de varias variables, que llamamos *integrales múltiples*. Las motivación más directa de éstas integrales es el cálculo de volúmenes, encontrando además aplicaciones en la geometría y la física.

1 Definición de la integral de Riemann en intervalos de $\mathbb{R}^n$

Comenzamos estudiando la integral de una función

$$f\colon I \to \mathbb{R}, \text{ acotada },$$

donde I es un *intervalo en* $\mathbb{R}^n$, es decir, un conjunto de la forma

$$I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n\},$$

donde $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ son n pares de números reales. Alternativamente el intervalo I se puede ver como el producto cartesiano de los intervalos reales $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$, es decir

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Estamos interesados en particular en los casos $n = 2$ y $n = 3$. Si $n = 2$ el intervalo I es un rectángulo, y escribimos $I = [a, b] \times [c, d]$. En el caso $n = 3$ obtenemos un paralelepípedo, con $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Cuando es necesario, decimos que I es un *intervalo cerrado* en $\mathbb{R}^n$, y definimos

*Notas para el curso de la Licenciatura en Matemática, Facultad de Ciencias, preparadas por Ernesto Mordecki (no incluyen los teoremas de la integral iterada y del cambio de variable vistos en clase).

análogamente los *intervalos abiertos* en $\mathbb{R}^n$, como producto cartesiano de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Definimos el *volumen* de un intervalo en $\mathbb{R}^n$, abierto o cerrado, que designamos $\operatorname{vol}(I)$, mediante la fórmula

$$\operatorname{vol}(I) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

En el caso $n = 2$, decimos *área* en lugar de volumen y escribimos $\operatorname{area}(I)$, resultando $\operatorname{area}(I) = (b - a) \times (d - c)$.

Consideremos un intervalo $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ en $\mathbb{R}^n$, en cada uno de los cuales tenemos una partición $P_1, \dots, P_n$. Definimos *partición* del intervalo I, que designamos mediante P, al producto cartesiano de las particiones de los intervalos reales, es decir,

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n.$$

Observemos que una partición P de un intervalo I genera una descomposición del intervalo en subintervalos, que llamamos *bloques*, que se obtienen, cada uno, como el producto cartesiano de los intervalos que determinan las particiones de los intervalos reales. En otros términos, para formar un bloque $B \subset I$, elejimos intervalos $I_i \subset [a_i, b_i]$ $(i = 1, \dots, n)$, donde cada I_i es un intervalo cuyos extremos son puntos consecutivos de la partición P_i, y tenemos $B = I_1 \times \cdots \times I_n$. Observemos por último que

$$\sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(I), \tag{1}$$

donde la suma se efectúa en todos los bloques B contenidos en el intervalo I.

En el caso $n = 2$, tenemos particiones $P_1 = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, y $P_2 = \{c = y_0 < \cdots < y_m = d\}$, los bloques son rectángulos de la forma $B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, y la fórmula (1) se lee

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{area}(B_{ij}) = \operatorname{area}(I).$$

Consideremos ahora una función $f \colon I \to \mathbb{R}$, acotada, donde I es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y una partición P. Para cada bloque B de la partición designamos mediante e_B y E_B los extremos inferior y superior (el ínfimo y el supremo) de la función f en el bloque B, es decir

$$e_B = \inf\{f(x) \colon x \in B\}, \qquad E_B = \sup\{f(x) \colon x \in B\}.$$

Cuando queremos destacar la función f escribimos e_B^f, E_B^f.

Designamos mediante $s(f,P)$ y $S(f,P)$ a las *sumas inferiores y superiores* de la función f con respecto de la partición P, que definimos mediante

$$s(f,P) = \sum_{B\subset I} e_B \operatorname{vol}(B), \qquad S(f,P) = \sum_{B\subset I} E_B \operatorname{vol}(B).$$

En el caso $n=2$ escribimos $e_{ij} = e_{B_{ij}}$, $E_{ij} = E_{B_{ij}}$, y las sumas inferiores y superiores resultan ser

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),\\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Dadas dos particiones $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ y $Q = Q_1 \times \cdots Q_n$ de un mismo intervalo I en $\mathbb{R}^n$, decimos que Q es *posterior* a P, o también que Q es *más fina* que P cuando $P_1 \subset Q_1, \dots, P_n \subset Q_n$. Definimos además la *suma* de las particiones P y Q, que designamos mediante $P+Q$, según la fórmula

$$P + Q = (P_1 \cup Q_1) \times \cdots \times (P_n \cup Q_n).$$

Es claro que $P+Q$ es posterior a P y es posterior a Q. Obsérvese que $P\cup Q$ no necesariamente es una partición.

Teorema 1. *Consideremos $f\colon I \to \mathbb{R}$ acotada, I intervalo en $\mathbb{R}^n$.*
(a) *Si Q es posterior a P, tenemos*

$$s(f,P) \le s(f,Q) \le S(f,Q) \le S(f,P).$$

(b) *Si P y Q son particiones arbitrarias, tenemos*

$$s(f,P) \le S(f,Q).$$

Demostración. Comencemos por (a), con Q posterior a P. Consideremos un bloque B fijo determinado por P, y todos los bloques C determinados por Q y contenidos en B. Como $C \subset B$ tenemos $e_C \ge e_B$, de donde

$$\sum_{C\subset B} e_C \operatorname{vol}(C) \ge \sum_{C\subset B} e_B \operatorname{vol}(C) = e_B \sum_{C\subset B} \operatorname{vol}(C) = e_B \operatorname{vol}(B).$$

Calculamos ahora la suma inferior con respecto de Q sumando en dos etapas: para cada bloque de B de P sumamos en todos los bloques $C \subset B$ de Q, y luego en los bloques de P, es decir

$$s(f,Q) = \sum_{B \subset I} \Big(\sum_{C \subset B} e_C \operatorname{vol}(C) \Big) \geq \sum_{B \subset I} e_B \operatorname{vol}(B) = s(f,P),$$

completando la demostración de la primera desigualdad. La segunda es inmediata, porque $e_B \leq E_B$, y la tercera es análoga a la primera.

Para ver entonces (b), como $P+Q$ es más fina que P y que Q, aplicando (a), tenemos

$$s(f,P) \leq s(f,P+Q) \leq S(f,P+Q) \leq S(f,Q).$$

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Definición 1 (Integral de Riemann). *Consideremos $f\colon I \to \mathbb{R}$, acotada, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}^n$.*
(a) *Definimos la* integral inferior *y la* integral superior, *que designamos* $\underline{\int}_I f$, $\overline{\int}_I f$ *respectivamente, mediante*

$$\underline{\int}_I f = \sup\{s(f,P) \colon P \textit{ partición de } I\},$$
$$\overline{\int}_I f = \inf\{S(f,P) \colon P \textit{ partición de } I\}.$$

(b) *Cuando las integrales inferior y superior coinciden, decimos que f es* integrable (según Riemann) *en I, y definimos la* integral (de Riemann) *de f en I, que designamos $\int_I f$, mediante*

$$\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

Observación. Siempre se verifica $\underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f$. De lo contrario, si $\delta = \underline{\int}_I f -$

$\overline{\int}_I f \geq 0$, existirían particiones P y Q, tales que

$$S(f,Q) < \overline{\int}_I f + \frac{\delta}{2} = \underline{\int}_I f - \frac{\delta}{2} < s(f,P),$$

contradiciendo (b) en el teorema 1.

Si $n = 2$ decimos *integral doble*; si $n = 3$, *integral triple*. En estos casos escribimos, respectivamente

$$\iint_I f = \iint_I f(x,y)dxdy, \quad \iiint_I f = \iiint_I f(x,y,z)dxdydz.$$

Teorema 2 (Condición necesaria y suficiente de integrabilidad). *Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ acotada, con I intervalo en $\mathbb{R}^n$ es integrable si y sólo si*

$$\textit{para cada } \varepsilon > 0 \textit{ existe una partición } P \textit{ tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon. \quad (2)$$

Demostración. Supongamos que f es integrable y consideremos $\varepsilon > 0$. Existen particiones Q y R tales que

$$\underline{\int}_I f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,Q) \leq \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f \leq S(f,R) < \overline{\int}_I f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vista del teorema 1, la partición $P = Q + R$ verifica

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,R) - s(f,Q) < \varepsilon,$$

concluyendo que se verifica (2).

Supongamos ahora, por absurdo, que f no es integrable. Según nuestra definición de integral superior e inferior, tenemos, para cualquier partición P, que

$$S(f,P) - s(f,P) \geq \overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f = \delta > 0,$$

y no se verifica (2) con $\varepsilon < \delta$. Concluímos que, de verificarse (2), la función f resulta integrable. Esto termina la demostración. $\square$

Veamos ahora que las funciones continuas son integrables.

Teorema 3. *Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}^n$. Entonces, f es integrable.*

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ para aplicar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (teorema 2). Como I es un conjunto compacto, f resulta uniformemente continua, y existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}(I)}.$$

Consideremos ahora una partición $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, de forma que dos puntos arbitrarios en un mismo bloque B de la partición no disten más que d. Esto se logra si dos puntos consecutivos de cada partición $P_1, \dots, P_n$ no disten mas que $\delta/\sqrt{n}$. Como f es continua, para cada bloque B existen dos puntos $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ e $y_B = (y_1, \dots, y_n)$ tales que $E_B = f(x_B)$, $e_B = f(y_B)$. Además, como los puntos x e y están en el mismo bloque, sus i-ésimas coordenadas no difieren más que las de los puntos de la partición P_i, por lo que tenemos

$$\|x_B - y_B\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2}{n} = \delta^2,$$

por lo que, para la partición elegida, tenemos

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &\leq \sum_{B \subset I} \big(E_B - e_B\big) \operatorname{vol}(B) = \sum_{B \subset I} \big(f(x_B) - f(y_B)\big) \operatorname{vol}(B) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}(I)} \sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que f es integrable, y concluye la demostración. $\square$

2 Integración en dominios generales

Estudiemos ahora como definir la integral de una función $f\colon X \to \mathbb{R}$, acotada, donde X es un subconjunto acotado arbitrario de $\mathbb{R}^n$. La estrategia para la definición consiste en considerar un intervalo I que contenga a X, es decir $X \subset I$, y definir una función auxiliar $\bar{f}\colon I \to \mathbb{R}$ mediante

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \in I \setminus X. \end{cases}$$

estudiando condiciones para que $\bar{f}$ sea integrable en I, para definir, cuando $\bar{f}$ es integrable

$$\int_X f = \int_I \bar{f}.$$

Observemos que, aunque f sea continua, en general, $\bar{f}$ no conserva esta propiedad, por lo que es necesario obtener condiciones mas generales que la continuidad para obtener la integrabilidad de funciones. Es por eso que introducimos la siguiente noción.

Definición 2. *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ tiene* medida (de Jordan) nula*, cuando, para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubrimiento numerable $I_1, I_2, \dots$ de intervalos en $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_i) < \varepsilon.$$

Observación. Cabe observar que, si bien en la definición se consideran intervalos cerrados en $\mathbb{R}^n$, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula cuando verifica la misma defnción con intervalos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Dada $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, el gráfico de g, es decir, el conjunto

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b], y = g(x)\},$$

tiene medida de Jordan nula en $\mathbb{R}^2$. Para verificarlo, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como g es continua, y el intervalo $[a,b]$ es compacto, resulta que g es uniformemente continua, por lo que dado $\varepsilon_0 < \varepsilon/\big(2(b-a)\big)$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$. Consideremos entonces una partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, que verifica $\max\{x_i - x_{i-1} \colon i = 1, \dots, n\} < \delta$, y los rectángulos

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \times [f(x_{i-1}) - \varepsilon_0, f(x_{i-1}) + \varepsilon_0], \qquad i = 1, \dots, n.$$

La continuidad uniforme nos asegura que $G \subset \cup_{i=1}^n I_i$. Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{area}(I_i) = 2\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2\varepsilon_0(b-a) < \varepsilon,$$

probando que G tiene medida nula.

Ejemplo 2. Dada $h\colon X \to \mathbb{R}$ continua, con X compacto en $\mathbb{R}^2$, el gráfico de h, es decir, el conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in X, z = h(x, y)\},$$

tiene medida de Jordan nula en $\mathbb{R}^3$. Para verificarlo, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como X es compacto en $\mathbb{R}^2$ existe un rectángulo I tal que $X \subset I$. Como h es continua, y X es compacto, resulta que h es uniformemente continua, por lo que dado $\varepsilon_0 < \varepsilon/\big(2\,\mathrm{area}(I)\big)$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$. Consideremos entonces una partición P de I de forma tal que si dos puntos x, y están en el mismo bloque B determinado por I, tenemos $\|x - y\| < \delta$. Consideremos ahora un punto x_B de cada bloque $B \subset I$, y un intervalo (paralelepípedo) en $\mathbb{R}^3$, dado por

$$J_B = B \times [f(x_B) - \varepsilon_0, f(x_B) + \varepsilon_0],$$

La continuidad uniforme nos asegura que $G \subset \cup_{B \subset I} J_B$. Por otra parte

$$\sum_{B \subset I}^{n} \mathrm{vol}(J_B) = 2\varepsilon_0 \sum_{B \subset I}^{n} \mathrm{area}(B) = 2\varepsilon_0\,\mathrm{area}(I) < \varepsilon,$$

probando que G tiene medida nula.

Teorema 4 (Lebesgue).
Consideremos $f\colon I \to \mathbb{R}$ acotada, con I intervalo en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que D, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f, tiene medida de Jordan nula. Entonces, f es integrable en I.

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ para aplicar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (teorema 2), y designemos

$$K = \sup\{f(x) \colon x \in I\} - \inf\{f(x) \colon x \in I\}.$$

La idea es construir una partición cuyos bloques se dividan en dos grupos, el primero donde la función pueda ser discontinua, y el segundo donde la función sea continua.

Como D tiene medida nula existe una sucesión de intervalos $I_1, I_2, \dots$, que podemos tomar abiertos, tales que

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_i) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Por otra parte, para cada $x \in I \setminus D$ la función es continua, por lo que existe un intervalo, llamémosle J_x, que también elegimos abierto, tal que $E_{J_x} - e_{J_x} < \varepsilon / \big(2 \operatorname{vol}(I)\big)$.

Si aplicamos el teorema de los cubrimientos finitos, podemos extraer un conjunto finito $I_1, \ldots, I_p, J_{x_1}, \ldots, J_{x_q}$ de la familia de todos los intervalos $\{I_i\} \cup \{J_x\}$ recién considerados, tales que se verifica

$$I \subset \Big[\bigcup_{i=1}^{p} I_i\Big] \cup \Big[\bigcup_{j=1}^{q} J_{x_j}\Big]. \tag{3}$$

Consideremos ahora la partición P formada por todos los puntos que son vértices de alguno de los intervalos que aparecen a la derecha en (3), junto con todos los necesarios para que el conjunto resultante sea una partición, y clasifiquemos los bloques que determina esta partición en dos conjuntos: el primero contiene aquellos bloques B que esten contenidos en algún I_i ($i = 1, \ldots, p$), y el segundo, con bloques que designamos C, que contiene todos los bloques restantes. Tenemos

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{B \subset I} (E_B - e_B) \operatorname{vol}(B) + \sum_{C \subset I} (E_C - e_C) \operatorname{vol}(C) \\ &\leq K \sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{vol}(I)} \sum_{C \subset I} \operatorname{vol}(C) \\ &\leq K \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_i) + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{vol}(I)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del teorema. □