Nociones topológicas elementales de $\mathbb{R}^n$ *

1 Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-uplas de números reales, donde n es un número natural arbitrario fijo. Los elementos de $\mathbb{R}^n$, que llamamos indistintamente *puntos* o *vectores* son entonces todos los conjuntos ordenados $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $x_1, \dots, x_n$ son números reales arbitrarios. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, dos vectores en $\mathbb{R}^n$, decimos que son iguales y escribimos $x = y$, cuando $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Definimos la suma de x e y, y el producto de x por un número real α (que en este contexto llamamos *escalar*), mediante

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Es inmediato verificar las siguientes propiedades.

Teorema 1 (Propiedades de la suma y el producto).
Sean x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$ y α, β escalares, todos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:

(1) *Conmutativa:* $x + y = y + x$.

(2) *Asociativa:* $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(3) *Existencia de neutro: el vector* $0 = (0, \dots, 0)$ *verifica* $x + 0 = x$.

(4) *Existencia de opuesto: existe* $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ *tal que se verifica* $x + (-x) = 0$.

(5) *Asociativa del producto:* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(6) *Distributivas:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta x) = \alpha x + \beta x$.

*Notas para el curso de Cálculo II (2003) de la Licenciatura en Matemática, Facultad de Ciencias, preparadas por Ernesto Mordecki

(7) *Existencia de neutro del producto:* $1x = x$.

Este teorema muestra que la cuaterna $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \times)$, con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de los vectores, $\mathbb{R}$ el de los números reales, y $+$, $\times$ la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, antes definidos, conforman un *espacio vectorial*.

El conjunto de n vectores dado por

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots,\ e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^n$, y, dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, permite escribir

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

2 Producto interno y norma en $\mathbb{R}^n$

Dados dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos su *producto interno*, también llamado *producto escalar*, al número real que designamos $\langle x, y\rangle$, mediante

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Este producto interno verifica las siguientes propiedades.

Teorema 2. *Sean x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un escalar, todos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:*

(P1) *Conmutativa:* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(P2) *Distributiva:* $\langle x + y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(P3) *Homogeneidad:* $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

(P4) *Positividad:* $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

El producto interno recién introducido nos permite considerar la *norma euclideana* de un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, que designamos $\|x\|$, definimos mediante

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \tag{2}$$

y verifica las siguientes propiedades.

Teorema 3. *Sean x un vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un escalar, ambos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:*

(N1) *Positividad:* $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(N2) *Homogenenidad* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(N3) *Desigualdad triangular* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Las propiedades (N1) y (N2) son inmediatas. Más adelante veremos la demostración de la *desigualdad triangular* (N3). De esta desigualdad obtenemos

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Teorema 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).
Dados dos vectores x e y de $\mathbb{R}^n$, se verifica

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\|. \tag{3}$$

Además, se verifica la igualdad en (3) *si, y sólo si los vectores x, y son linealmente dependientes, es decir, existen escalares α, β, no simúltaneamente nulos, tales que $\alpha x + \beta y = 0$.*

Demostración. Supongamos que x e y son no nulos (si alguno es nulo, se verifica la igualdad en (3)). Para un escalar α, aplicando (N1), tenemos

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = \alpha^2\langle x, x\rangle + 2\alpha\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Luego, el discriminante del polinomio de segundo grado en α debe ser no positivo, es decir

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0, \tag{4}$$

lo que equivale a (3). Además, existe α tal que $\alpha x + y = 0$, es decir $\langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = 0$, si y solo si el discriminante Δ en (4) se anula, es decir, si y solo si se verifica la igualdad en (3). Esto completa la demostración. □

Veamos ahora la demostración de la propiedad triangular (N3). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3), tenemos

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq \langle x, x\rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \|x + y\|^2,\end{aligned}$$

lo que equivale a (N3).

Definición 1 (Norma). *Una* norma *en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que verifica las propiedades* (N1)*,* (N2) *y* (N3) *del teorema 3.*

La norma euclideana definida en (2) es la *norma usual*, y escribimos también $\|x\| = \|x\|_2$, (el 2 recuerda los cuadrados en (2)). Cuando escribimos *norma* nos referimos a la norma usual.

Dado un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$, otros ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$ son la *norma del máximo*, o *norma infinito*, que es el real $\|x\|_\infty$ definido como

$$\|x\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\},$$

y la *norma de la suma*, o *norma-uno*, que es el real $\|x\|_1$, definido como

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

La existencia de diversas normas en $\mathbb{R}^n$ motiva la introducción de la siguiente noción.

Definición 2 (Normas equivalentes). *Sean* N_1 *y* N_2 *normas definidas en* $\mathbb{R}^n$*. Decimos que* N_1 *es* equivalente *a* N_2*, cuando existen dos reales positivos* α *y* β*, tales que*

$$\alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x) \quad \textit{para todo vector } x \textit{ en } \mathbb{R}^n.$$

Es posible verificar la relación

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty, \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

utilizando la desigualdad triangular para verificar la segunda desigualdad. Esto permite concluir que las tres normas introducidas son equivalentes. Veremos más adelante que *todas* las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (es decir, dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes).

Es útil considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. La *bola abierta* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| < r\big\};$$

la *bola cerrada* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B[a, r] = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\| \le r\big\};$$

y la *bola reducida* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B^*(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < \|x - a\| < r\big\}.$$

Cuando decimos *bola* nos referimos a la bola abierta.

Con estas definiciones introducimos la siguiente noción. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto acotado*, cuando existe $r > 0$ tal que X está contenido en alguna bola de centro en el origen $0 = (0, \dots, 0)$ y radio r, es decir $X \subset B(0, r)$, o, en forma equivalente, $\|x\| < r$ para todo $x \in X$.

Decimos que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo*, cuando todos los segmentos de recta con extremos en puntos del conjunto estan contenidos en el conjunto, es decir, cuando dados $x \in X$, $y \in X$ arbitrarios, se verifica $(1-t)x + ty \in X$ para todo $t \in [0, 1]$. La desigualdad triangular nos permite ver que las bolas abiertas y cerradas son convexas. En efecto, si $\|x - a\| < r$, $\|y - a\| < r$, tenemos

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - a\| &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < r, \end{aligned}$$

siendo análoga la demostración para una bola cerrada. Por su parte, las bolas reducidas no son convexas, porque no contienen el origen.

3 Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Llamamos *sucesión en* $\mathbb{R}^n$ a una función $\mathbf{x}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, es decir, a una función con dominio en los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y recorrido en $\mathbb{R}^n$. Escribimos

$$\mathbf{x} = (x_k) = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots),$$

donde $x_k = \mathbf{x}(k)$ es el valor de la sucesión en el k-ésimo natural, y escribimos $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ cuando indicamos las coordenadas de x_k.

Dada una sucesión $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos n sucesiones en $\mathbb{R}$, que llamamos *sucesiones coordenadas*, que son $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$, obtenidas al tomar las coordenadas del vector x_k. Recíprocamente, dadas n sucesiones de números reales podemos construir una sucesión en $\mathbb{R}^n$, tomando como k-ésimo elemento de la sucesión el vector cuyas coordenadas son los k-ésimos elementos de las sucesiones reales.

Una *subsucesión* de una sucesión $\mathbf{x}$ es la restricción de $\mathbf{x}$ a un dominio de la forma $\{k_1 < k_2 < \dots\}$, escribiendo (x_{k_j}) para designarla.

Definición 3 (Límite de una sucesión). *Decimos que la sucesión* (x_k) *tiene límite* a*, o que* (x_k) *tiende* a a*, y escribimos*

$$\lim_k x_k = a, \qquad x_k \xrightarrow[k]{} a,$$

cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe K natural, tal que para todo $k \geq K$ se verifica $\|x - a\| < \varepsilon$. En otros términos, (x_k) tiene límite a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \colon \forall k \geq K \quad \|x_k - a\| < \varepsilon.$$

Si una sucesión tiene límite, decimos que es convergente*.*

Observemos primero que esta definición generaliza la correspondiente definición de convergencia de sucesiones reales. Es inmediato ver las siguientes equivalencias:

(a) $x_k \underset{k}{\longrightarrow} a$,

(b) $\|x_k - a\| \underset{k}{\longrightarrow} 0$,

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \colon \forall k \geq K \quad x_k \in B(a, \varepsilon)$.

(d) Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ tenemos

$$x_{ki} \underset{k}{\longrightarrow} a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 5 (Operaciones con límites de sucesiones).
Consideremos las sucesiones (x_k) con límite a, (y_k) con límite b, ambas en $\mathbb{R}^n$, y la sucesión real (α_n) con límite α. Entonces

(1) $x_k + y_k \underset{k}{\longrightarrow} a + b$,

(2) $\alpha_k x_k \underset{k}{\longrightarrow} \alpha x$,

(3) $\langle x_k, y_k \rangle \underset{k}{\longrightarrow} \langle a, b \rangle$,

(4) $\|x_k\| \underset{k}{\longrightarrow} \|a\|$.

Veamos ahora que toda sucesión convergente es acotada. En efecto, dado $\varepsilon = 1$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$ tenemos $x_k \in B(a, 1)$. Entonces

$$\|x_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq K} \|x_k\| + \|a\| + 1 \qquad \text{para todo } k \text{ natural.}$$

El recíproco de esta proposición no es cierto, como muestra la sucesión de números reales $x_k = (-1)^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$. Sin embargo, vale el siguiente resultado.

Teorema 6 (Bolzano-Weierstrass).
Toda sucesión (x_k) acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Veamos primero la demostración en el caso $n = 1$. Existen a_1, b_1 tales que $a_1 \leq x_k \leq b_1$ para todo k natural. Para construir la subsucesión consideremos $k_1 = 1$ y el punto medio $m = (a_1 + b_1)/2$. Si existen infinitos valores de k tales que $x_k \in [a_1, m]$ ponemos $a_2 = a_1$, $b_2 = m$. De lo contrario, existen infinitos valores de k tales que $x_k \in [m, b_1]$ y ponemos $a_2 = m$, $b_2 = b_1$. En ambos casos elegimos un índice $k_2 > k_1$ tal que $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Repitiendo este procedimiento construimos una sucesión de intervalos $[a_j, b_j]$ de largo $(b_1 - a_1)/2^{j-1}$, cada uno de los cuales está contenido en el anterior, y una subsucesión $x_{k_j} \in [a_j, b_j]$. Es claro entonces que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Existe entonces $\alpha = \lim_j a_j = \lim_j b_j$ (basta tomar $\alpha = \sup_j\{a_j\}$) y, por el teorema de la sucesión comprendida, se verifica $\lim_j x_{k_j} = \alpha$.

Consideremos ahora $n > 1$, y una sucesión $\big(x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})\big)$. Como la sucesión original está acotada, también lo esta su primer sucesión coordenada (x_{k1}), que según vimos, tiene una subsucesión convergente, definida por $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$. La subsucesión $(x_{k_j 2})$ está también acotada y tiene una subsucesión convergente. Procediendo así con cada una de las coordenadas restantes, obtenemos una subsucesión, definida por $\{k_1' < k_2' < \cdots\}$ tal que todas las subsucesiones coordenadas convergen, y por lo tanto converge la subsucesión obtenida en $\mathbb{R}^n$. □

Por último en esta sección nos planteamos la siguiente pregunta. Hemos visto que la definición de límite de una sucesión (así como la de conjunto acotado) se basa en la norma usual de $\mathbb{R}^n$. No es difícil ver, basados en (5), que son equivalentes

(a) $\|x_k - a\|_2 \xrightarrow[k]{} 0$,

(b) $\|x_k - a\|_\infty \xrightarrow[k]{} 0$,

(c) $\|x_k - a\|_1 \xrightarrow[k]{} 0$,

lo que nos dice que la convergencia de una sucesión no depende de la norma que tomemos en la definición de límite, si nos restringimos a alguna de las tres normas consideradas. El siguiente resultado muestra que *cualquier* norma que se utilize en la definición de convergencia (o en la de conjunto acotado) produce el mismo resultado.

Teorema 7. *Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

Demostración. Estamos afirmando que dos funciones arbitrarias que verifican las tres propiedades (N1), (N2) y (N3) son normas equivalentes. Como la equivalencia entre normas verifica la propiedad transitiva (si N_i $(i = 1, 2, 3)$ son normas, y N_1 es equivalente a N_2, N_2 es equivalente a N_3, entonces N_1 es equivalente a N_3), es suficiente verificar que, dada una norma $N(x)$ en $\mathbb{R}^n$, existen α, β reales positivos tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq N(x) \leq \beta\|x\|_1 \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Dado $x = (x_1, \dots, x_n)$, aplicando (1) obtenemos la segunda desigualdad, porque

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \leq N(x_1e_1) + \cdots + N(x_ne_n) \\ &= |x_1|N(e_1) + \cdots + |x_n|N(e_n) \\ &\leq \max\big\{N(e_1), \dots, N(e_n)\big\}\big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big) \\ &= \beta\|x\|_1, \end{aligned}$$

donde $\beta = \max\big\{N(e_1), \dots, N(e_n)\big\}$ y utilizamos las propiedades (N3) y (N2).

Supongamos ahora que la primer desigualdad en (6) es falsa, lo que implica que para cada $\alpha = 1/k$ (k natural) existe un vector x_k tal que

$$N(x_k) < \frac{1}{k}\|x_k\|_1.$$

Consideremos la sucesión $y_k = x_k/\|x_k\|_1 \quad (k \in \mathbb{N})$, que verifica $\|y_k\|_1 = 1$. Como (y_k) es una sucesión acotada, contiene una subsucesión convergente, pongamos $y_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Tenemos $\|a\|_1 = \lim_j \|y_{k_j}\|_1 = 1$, y $a \neq 0$. Por otra parte, aplicando la propiedad triangular, obtenemos

$$N(a) \leq N(a - y_{k_j}) + N(y_{k_j}) \leq \beta\|a - y_{k_j}\|_1 + \frac{1}{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} 0,$$

y aplicando (N1) resulta $a = 0$, obteniendo una contradicción, y concluyendo la demostración. □

4 Sucesiones de Cauchy y completitud

Definición 4. *Una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ verifica la* condición de Cauchy*, o es una* sucesión de Cauchy*, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un K natural, tal* *que para todo par de índices $k' \geq K$, $k'' \geq K$ se verifica $\|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon$. En otros términos, (x_k) es de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}\colon \quad \forall k' \geq K \forall k'' \geq K \quad \|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon.$$

Es fácil ver que una sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, si $x_k \to a$, dado $\varepsilon > 0$ existe K natural tal que $\|x_k - a\| < \varepsilon/2$ si $k \geq K$. Entonces, si $k' \geq K$, $k'' \geq K$, tenemos

$$\|x_{k'} - x_{k''}\| \leq \|x_{k'} - a\| + \|x_{k''} - a\| < \varepsilon.$$

El recíproco de esta proposición es más interesante, y completa el siguiente resultado.

Teorema 8. *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy si y sólo si es convergente.*

Demostración. Resta ver que una sucesión de Cauchy es convergente. Sea entonces (x_k) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Veamos primero que es acotada. Dado $\varepsilon = 1$ existe K tal que, si $k \geq K$ tenemos $\|x_k - x_K\| < 1$ (tomamos $k' = k$, $k'' = K$ en la definición 4). Entonces

$$\|x_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq K} \|x_k\| + \|x_K\| + 1, \text{ para todo } k \text{ natural.}$$

En consecuencia, por el teorema 6 de Bolzano-Weierstrass existe $a \in \mathbb{R}^n$ y una subsucesión definida en $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$ tal que $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Veamos que la sucesión original converge a a. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe K_1 tal que $\|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon/2$ si $k' \geq K_1$, $k'' \geq K_1$. Existe además K_2 tal que $\|x_{k_j} - a\| < \varepsilon/2$ si $k_j \geq K_2$. Entonces, si $k \geq K = \max\{K_1, K_2\}$, se verifica

$$\|x_k - a\| \leq \|x_k - x_{k_j}\| + \|x_{k_j} - a\| < \varepsilon,$$

concluyendo la demostración. □

La definición de sucesión de Cauchy es útil, porque caracteriza las sucesiones convergentes sin hacer referencia al límite. Cuando en un espacio vectorial con una norma el conjunto de las sucesiones de Cauchy coincide con las sucesiones convergentes, decimos que es un espacio vectorial normado *completo*, o que verifica la propiedad de *completitud*. En los reales, esta propiedad es equivalente al axioma de completitud (de hecho este axioma se utiliza en la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass). No es dificil ver que el espacio vectorial de los números racionales $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \times)$ no es completo.

5 Conjuntos abiertos y cerrados

Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto abierto*, cuando para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Decimos que $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ es un *punto interior* de A cuando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Llamamos *interior* de A, y lo designamos $\overset{\circ}{A}$, al conjunto de los puntos interiores de A. Resulta que A es abierto si y solo si $\overset{\circ}{A} = A$.

Decimos que un subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto cerrado* cuando el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B$, su complemento, que designamos también B^c, es un conjunto abierto.

Un punto $b \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existen puntos distintos de b, pertenecientes a B, que distan menos que ε de b. En otros términos, b es de acumulación de B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B^*(b, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset.$$

Designamos mediante B' al conjunto de los puntos de acumulación de B, que llamamos *conjunto derivado* de B. Veremos que un conjunto es cerrado si y sólo si contiene sus puntos de acumulación.

Definimos la *clausura* $\bar{B}$ de un conjunto B, mediante $\bar{B} = B \cup B'$. También es cierto que un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

Un punto a es *punto frontera* de un conjunto A cuando toda bola reducida centrada en a contiene puntos de A y de A^c. Es decir, a es frontera de A si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, B^*(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Llamamos *conjunto frontera* del conjunto A, y lo designamos mediante δA, al conjunto de sus puntos frontera.

Ejemplo 1. Veamos que la bola abierta de centro a y radio $r > 0$ es un conjunto abierto. Si $x \in B(a, r)$ sea $\varepsilon = (r - \|x - a\|)/2$. Si $\|y - x\| < \varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} \|y - a\| &\leq \|y - x\| + \|x - a\| < \frac{r - \|x - a\|}{2} + \|x - a\| \\ &= \frac{\|x - a\|}{2} + \frac{r}{2} < r, \end{aligned}$$

es decir, si $y \in B(x, \varepsilon)$ entonces $y \in B(a, r)$, de donde $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ probando que $B(a, r)$ es un conjunto abierto. En particular, si $n = 1$ los intervalos abiertos son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Veamos que la bola cerrada de centro a y radio $r > 0$ es un conjunto cerrado. Si $x \notin B[a,r]$ sea $\varepsilon = (\|x-a\| - r)/2$. Si $\|y-x\| < \varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned}\|y-a\| \geq \|x-a\| - \|y-x\| &\geq \|x-a\| - \frac{\|x-a\|}{2} + \frac{r}{2} \\ &= \frac{\|x-a\|}{2} + \frac{r}{2} > r,\end{aligned}$$

de donde $y \notin B[a,r]$. Es decir $B(x,\varepsilon) \subset \big(B[a,r]\big)^c$, de donde $B[a,r]$ es un conjunto cerrado. En particular, si $n = 1$ obtenemos que los intervalos cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$.

Teorema 9 (Caracterización de los conjuntos cerrados).
Sea $B \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes

(a) *B es cerrado (es decir, B^c es abierto).*

(b) *B coincide con su clausura, es decir $\bar{B} = B$.*

(c) *Si $(y_k) \subset B$, y $y_k \xrightarrow[k]{} b$ entonces $b \in B$.*

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Sea b de acumulación de B. Veamos que $b \in B$. Si, por absurdo, $b \in B^c$, por ser B^c abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^*(b,\varepsilon) \cap B = \emptyset$, y b no es de acumulación de B. Luego $b \in B$.

Veamos (b)⇒(c). Sea $(y_k) \subset B$, $y_k \to b$. Si $y_k = b$ para algún k, tenemos $b \in B$. Si $y_k \neq b$ para todo k, dado $\varepsilon > 0$ existe K tal que $y_k \in B^*(b,\varepsilon)$ para todo $k \geq K$. Luego b es de acumulación de B y pertenece a B por (b).

Veamos por último (c)⇒(a). Si B no es cerrado, existe un punto $b \in B^c$ que no es interior a B^c. Esto implica que para todo k existe un punto $y_k \in B \cap B(b, 1/k)$. Luego $y_k \to b$ de donde, por (c), $b \in B$ contra nuestro supuesto. Esto concluye la demostración de la última parte, y del teorema.
□

Teorema 10. (a) *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(b) *La intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(c) *La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

(d) *La unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración. (a) Si un punto x pertenece a alguno de los conjuntos abiertos de una cierta clase de conjuntos abiertos, existe una bola $B(x,\varepsilon)$ contenida en ese conjunto, y por lo tanto, contenida en la unión de los conjuntos abiertos de la clase.
(b) Sean $A_1,\dots,A_n$ abiertos. Si x pertenece a la intersección de estos conjuntos, para cada $i=1,\dots,n$ existe ε_i tal que $B(x,\varepsilon_i)\subset A_i$ $(i=1,\dots,n)$, y por lo tanto, con $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}>0$, tenemos que la bola $B(x,\varepsilon)$ esta contenida en la intersección de los conjuntos $A_1,\dots,A_n$.

Las propiedades (c) y (d) se obtienen tomando complemento, y utilizando la igualdad

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

□

Dado $X\subset\mathbb{R}^n$ decimos que una familia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de conjuntos es un *cubrimiento* de X cuando $X\subset\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$. Un *subcubrimiento* es una subfamilia que también es un cubrimiento.

Teorema 11 (Teorema de Lindelöf). *Sea $X\subset\mathbb{R}^n$ y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de infinitos conjuntos abiertos, tales que $X\subset\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$. Entonces existe una subfamilia $\{A_{\alpha_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ numerable, tal que $X\subset\cup_{j\in\mathbb{N}}A_{\alpha_j}$. En otras palabras, todo cubrimiento infinito posee un subcubrimiento numerable.*

Demostración. Sea $\{B(x_j,r_j)\}$ la familia (numerable) de todas las bolas abiertas de centro en un punto de coordenadas racionales, con radio racional, y tales que $B(x_j,r_j)\subset A_\alpha$ para algún $\alpha\in I$. Elegimos para cada j un α_j tal que $B(x_j,r_j)\subset A_{\alpha_j}$. Si $x\in X$, existe $\alpha\in I$ tal que $x\in A_\alpha$, y por ser A_α abierto, existe $r>0$, que podemos tomar racional, tal que $B(x,2r)\subset A_\alpha$. Por la densidad de los racionales, existe x_j, centro de alguna bola de la primer familia, tal que $x_j\in B(x,r)$, por lo que $x\in B(x_j,r)\subset A_{\alpha_j}$. Hemos mostrado asi, que

$$X\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B(x_j,r_j)\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_{\alpha_j},$$

concluyendo la demostración. □

6 Límites y continuidad de funciones

En esta sección, X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos una función $f\colon X\to\mathbb{R}^m$. La igualdad vectorial $y=f(x)$ en $\mathbb{R}^m$ equivale a m igualdades escalares en $\mathbb{R}$, y escribimos

$$(y_1, \ldots, y_m) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Cada una de las funciones $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ se llama *función coordenada.*

Definición 5 (Límite de una función).
Sean $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ y a un punto de acumulación de X. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es b, y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad ó \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que cumpla $0 < \|x - a\| < \delta$ se verifica $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. En otros términos, $f(x) \to b$ $(x \to a)$ cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon,$$

o cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon f\big(X \cap B^*(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon).$$

Teorema 12 (Teorema de pasaje).
Sean $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ y a un punto de acumulación de X. Son equivalentes

(a) *$f(x) \to b$ cuando $x \to a$.*

(b) *Para toda sucesión $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ que cumple $x_k \xrightarrow[k]{} a$ se verifica $f(x_k) \xrightarrow[k]{} b$.*

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Consideremos $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ tal que $x_k \to a$. Veamos que $f(x_k) \to b$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f\big(X \cap B^*(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon)$. Existe además K tal que si $k \geq K$ se verifica $x_k \in X \cap B^*(a, \delta)$. Luego $f(x_k) \in B(b, \varepsilon)$ es decir $f(x_k) \to b$.

Veamos ahora (b)⇒(a). Supongamos por absurdo que $f(x) \nrightarrow b$ cuando $x \to a$. Existe entonces ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existe $x_k \in B^*(a, 1/k) \cap X$ tal que

$$\|f(x_k) - b\| \geq \varepsilon_0. \tag{7}$$

Pero la sucesión $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ verifica $x_k \to a$. Luego, según (b) se verifica $f(x_k) \to b$ contradiciendo (7), y completando la demostración del teorema. □

Mediante los teoremas 5 (de operaciones con límites de sucesiones) y 12 (de pasaje) es inmediato obtener los siguientes resultados.

Teorema 13 (Operaciones con límites de funciones).
Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$, y a un punto de acumulación de X. Sea $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ una función escalar. Supongamos que

$$f(x) \to b, \quad g(x) \to c, \quad \alpha(x) \to \alpha, \quad \textit{cuando } x \to a.$$

Entonces

(1) $f(x) + g(x) \to b + c \quad (x \to a)$,

(2) $\alpha(x)f(x) \to \alpha b \quad (x \to a)$,

(3) $\langle f(x), g(x)\rangle \to \langle b, c\rangle \quad (x \to a)$,

(4) $\|f(x)\| \to \|b\| \quad (x \to a)$.

Definición 6 (Continuidad).
Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $a \in X$. Decimos que $f(x)$ es continua en a si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que cumpla $\|x - a\| < \delta$ se verifica $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. En otros términos, $f(x)$ es continua en a cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall x \in X \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon f\big(X \cap B(a, \delta)\big) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

o, en términos de límites, cuando

$$f(x) \to f(a) \quad \textit{si} \quad x \to a.$$

Por último, en términos de sucesiones, tenemos que son equivalentes (a) y (b):

(a) $f(x)$ es continua en a.

(b) Para toda sucesión $(x_k) \subset X$, $x_k \xrightarrow[k]{} a$ se verifica $f(x_k) \xrightarrow[k]{} f(a)$.

La demostración es análoga a la del teorema de pasaje 12.

Se verifica además, que si $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ son continuas en $a \in X$, también son continuas en a las funciones

$$f + g, \quad \alpha f, \quad \langle f, g\rangle, \quad \|f\|.$$

Si $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ es continua para todo $a \in X$, decimos que f es *continua en X*.

Teorema 14 (Continuidad de la función compuesta).
Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$*, continua en* $a \in X$*, y* $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$*, donde* $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$*,* g *continua en* $b = f(a)$*. Entonces la función compuesta* $h = g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^p$ *definida mediante* $h(x) = g\big(f(x)\big)$ *es continua en* a*.*

Demostración. Sea $(x_k) \subset X$ tal que $x_k \to a$. Por ser f continua en a se cumple $y_k = f(x_k) \to f(a) = b$. Por ser g continua en b, se cumple $g(y_k) \to g(b)$. Es decir $h(x_k) = g\big(f(x_k)\big) \to g\big(f(a)\big) = h(a)$, y h resulta continua en a. □

Definición 7 (Continuidad uniforme).
Una función $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ *es* uniformemente continua *en* X *cuando dado* $\varepsilon > 0$ *existe* δ *tal que para todo par* $x \in X$*,* $y \in X$ *que cumpla* $\|x - y\| < \delta$ *se verifica* $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$*. En otros términos,* $f(x)$ *es uniformemente continua en* X *cuando*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in X, \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observemos que si f es uniformemente continua en X, es continua en todo $a \in X$ (como resulta de tomar $a = y$ en la definición de continuidad uniforme).

Para estudiar si el recíproco de esta proposición es cierto, nos basamos en el siguiente resultado.

Teorema 15 (Continuidad uniforme y sucesiones).
Sea $f\colon X \to \mathbb{R}^m$*. Son equivalentes*

(a) $f(x)$ *es uniformemente continua en* X*.*

(b) *Para todo par de sucesiónes* $(x_k) \subset X$*,* $(y_k) \subset X$ *que cumple* $\|y_k - x_k\| \xrightarrow[k]{} 0$ *se verifica* $\|f(y_k) - f(x_k)\| \to 0$*.*

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Consideremos entonces un par de sucesiónes $(x_k) \subset X$, $(y_k) \subset X$ tales que $\|y_k - x_k\| \to 0$. Veamos que

$$\|f(y_k) - f(x_k)\| \xrightarrow[k]{} 0. \tag{8}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y - x\| < \delta$ implica $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. Existe además K tal que $k \geq K$ implica $\|y_k - x_k\| < \delta$. Luego, si $k \geq K$ vale $\|f(y_k) - f(x_k)\| < \varepsilon$, demostrando (8).

Veamos (b)⇒(a) por absurdo. Es decir, supongamos que existe ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existen x_k, y_k puntos de X tales que

$\|y_k - x_k\| < 1/k$ pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0$. Entonces $\|y_k - x_k\| \to 0$, pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| \nrightarrow 0$, contradiciendo (b), y completando la demostración del teorema. $\square$

Ejemplo 3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = x^2$. Considerando $x_k = k$ e $y_k = k + 1/k$. Vemos que $\|y_k - x_k\| = 1/k \to 0$ pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| = 2 + 1/k^2 \nrightarrow 0$. Deducimos entonces que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

7 Compacidad

Decimos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *compacto* cuando es cerrado y acotado.

Teorema 16 (Caracterización de compactos por sucesiones). *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes*

(a) *C es compacto.*

(b) *Toda sucesión de puntos de C contiene una subsucesión convergente a un punto de C.*

Demostración. Veamos (a)$\Rightarrow$(b). Si $(x_k) \subset C$, por ser C acotado existe una subsucesión convergente, pongamos $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} c$. Como C es cerrado, $c \in C$.

Veamos (b)$\Rightarrow$(a) por absurdo. Si C no es acotado, para cada k natural existe $x_k \in C$, tal que $\|x_k\| \geq k$. Entonces, $(x_k) \subset C$, pero (x_k) no tiene subsucesiones convergentes, porque de serlo, serían acotadas, y $\|x_{k_j}\| \geq k_j \underset{j}{\longrightarrow} \infty$, para cualquier subsucesion. Luego C es acotado. Si C no es cerrado, su complemento no es abierto, y tiene un punto $b \in C^c$ que no es interior, es decir, para todo k natural existe $x_k \in B(b, 1/k) \cap C$. Luego $x_k \to b$, y por lo tanto, toda subsucesion converge a b. Según (b) obtenemos que $b \in C$, contra lo que supusimos. Queda entonces demostrado que C es compacto. $\square$

Teorema 17 (Cantor). *Sea $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos. Entonces $\cap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$, es decir, su intersección es no vacía.*

Demostración. Como los conjuntos C_k no son vacíos, para cada k existe $x_k \in C_k$. Luego, como $(x_k) \subset C_1$ existe una subsucesión convergente, pongamos $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Para cada k tenemos $x_{k_j} \in C_k$ si $k_j \geq k$, lo que implica que

$a \in C_k$, por ser C_k compacto. Entonces $a \in \cap_{k=1}^{\infty} C_k$, que no es vacía, concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 18 (De cubrimientos finitos de Borel-Lebesgue).
Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces, dada una familia arbitraria de conjuntos abiertos $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, tal que $X \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$, existe una subfamilia finita de abiertos $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_K}$ tal que $X \subset \cup_{k=1}^{K} A_{\alpha_k}$

Demostración. Por el teorema 11 de Lindelöf, existe una subfamilia numerable de abiertos, digamos $(A_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$C_k = X \setminus \big(A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_k}\big).$$

La sucesión (C_k) está en las hipótesis del teorema 17 de Cantor. Si todos los C_k son no vacíos, existe $a \in C_k$ para todo k, de donde $a \notin A_{\alpha_k}$ para todo k, y la familia numerable no es un cubrimiento. Luego existe K tal que C_K es vacío, de donde $X \subset A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_K}$, concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 19 (Compacidad y funciones continuas).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces $f(X)$ es un conjunto compacto.

Demostración. Utilizamos la caracterización de conjuntos compactos por sucesiones del teorema 16. Dada $(y_k) \subset f(X)$ existe $(x_k) \subset X$ tal que $y_k = f(x_k)$ para cada k. Como X es compacto, (x_k) tiene una subsucesión convergente a un punto de X, pongamos $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a \in X$. Por continuidad $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \underset{j}{\longrightarrow} f(a)$, probando la compacidad de $f(X)$. $\square$

Corolario 1 (Teorema de Weierstrass).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f presenta máximo y mínimo absolutos en X, es decir, existen x_m y x_M en X tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(X_M) \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Como $f(X)$ es acotado es finito $E = \sup\{f(x) \colon x \in X\}$, el extremo superior de $f(X)$. Como existe una sucesión $(y_k) \subset f(X)$ tal que $y_k \to E$ y $f(X)$ es cerrado, resulta que $E \in f(X)$, es decir, existe x_M tal que $f(x_M) = E$, y se trata del máximo absoluto. La existencia de x_m tal que $f(x_m) = \inf\{f(x) \colon x \in X\}$ es análoga, concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 20 (Compacidad y continuidad uniforme).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos, por absurdo, que f no es uniformemente continua. Es decir, existe ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existen pares de puntos x_k, y_k en X tales que $\|y_k - x_k\| < 1/k$ pero

$$\|f(y_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0. \tag{9}$$

Como X es compacto, la sucesión (x_k) tiene una subsucesión (x_{k_j}) convergente a un punto a de X. Además,

$$\|y_{k_j} - a\| \leq \|y_{k_j} - x_{k_j}\| + \|x_{k_j} - a\| \underset{j}{\longrightarrow} 0,$$

es decir, $y_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Entonces, como f es continua en a, tenemos

$$\lim_j \|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\| = \|f(a) - f(a)\| = 0,$$

contradiciendo (9), y concluyendo la demostración. □

8 Conexión

Definición 8. *Un subconjunto A de $X \in \mathbb{R}^n$ es* abierto relativo *en X si para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap X \subset A$.*

Observemos que si $X = \mathbb{R}^n$ un abierto relativo es sencillamente un conjunto abierto.

Definición 9. *Decimos que un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es un* conjunto conexo *cuando no puede descomponerse en una unión disjunta de dos abiertos relativos, es decir, cuando no existen A, B abiertos relativos en X, disjuntos, no vacíos, tales que $A \cup B = X$.*

Veamos que si $n = 1$ el conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Si A y B son disjuntos y no vacíos, y $A \cup B = \mathbb{R}$, existen $a \in A$, $b \in B$. Supongamos $a < b$ y consideremos $c = \inf\{x \colon [x, b] \subset B\}$. Es claro que c existe, porque $[b, b] \subset B$ y $[a, b] \not\subset B$. Además, si $c \in A$ entonces A no es abierto, porque c no es interior (de serlo no sería el ínfimo), y, análogamente, si $c \in B$ entonces B no es abierto. Esto prueba que $\mathbb{R}$ no puede descomponerse en una unión disjunta de abiertos, es decir, que $\mathbb{R}$ es conexo.

Veamos también que si $X \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces no es conexo. En efecto, existe $y \notin X$, tal que $a < y < b$, con $a \in X$ y $b \in X$. Luego los conjuntos $A = (-\infty, y) \cap X$ y $B = (y, \infty) \cap X$ son no vacíos, disjuntos, abiertos relativos, y verifican $A \cup B = X$.

Teorema 21 (Conexión y funciones continuas).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces $f(X)$ es un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos por absurdo que $f(X)$ no es conexo, es decir existen dos conjuntos C, D abiertos relativos en $f(X)$, disjuntos, no vacíos, y tales que $C \cup D = f(X)$. Sean $A = f^{-1}(C)$ y $B = f^{-1}(D)$. Es claro que A y B son no vacíos, por ser no vacíos C y D. Si existe $x \in A \cap B$, entonces $f(x) \in C \cap D$, pero C, D son disjuntos, luego $A \cap B = \emptyset$. Además, se verifica $A \cup B = X$, de no ser así existe $x \in X$, tal que $x \notin A \cup B$, y de allí $f(x) \notin C \cup D$. Resta investigar si A, B son abiertos relativos. Sea entonces $a \in A$, por lo que $f(a) \in C$. Por ser C abierto relativo en $f(X)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B\big(f(a), \varepsilon\big) \cap f(X) \subset C$. Como f es contina en a, existe $\delta > 0$ tal que $f\big(B(a, \delta)\big) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Entonces

$$f\big(B(a, \delta) \cap X\big) \subset B(f(a), \varepsilon) \cap f(X) \subset C,$$

lo que implica que $B(a, \delta) \cap X \subset A$, probando que A es abierto relativo en X. La situación es análoga para B, y resulta que X no es conexo, contradiciendo la hipótesis. Esto concluye la demostración. $\square$

Este teorema nos permite caracterizar a los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$.

Teorema 22. *Un conjunto es conexo en $\mathbb{R}$ si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Resta ver que los intervalos son conexos. Si I es un intervalo, existe $f\colon \mathbb{R} \to I$ continua, demostrando que I es conexo. $\square$

Corolario 2 (Propiedad de Bolzano-Darboux). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo y $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(X)$ es un intervalo.*

Demostración. Es inmediata, porque $f(X) \subset \mathbb{R}$ es conexo. $\square$

Observemos, que en el caso $n = 1$ obtenemos la propiedad de Darboux de las funciones continuas: dada $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, para todo $y \in \big[f(a), f(b)\big]$ (o $\big[f(b), f(a)\big]$ si es el caso) existe x tal que $f(x) = y$, porque $f([a, b])$ es un intervalo por ser $[a, b]$ un conjunto conexo.