Práctico 2: Nociones topológicas elementales de $\mathbb{R}^n$ (última parte)

1. Probar que en los siguientes casos no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & si\ x+y\neq 0 \\ 0, & si\ x+y=0 \end{cases}$$

2. (a) Sean $f,g : U(\subset \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, y $a\in U$. Probar que si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y g es una función acotada en alguna bola reducida de centro a, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.
(b) Calcular los límites de la siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

3. Dada $f\colon X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, tenemos

$$f(x_1,\dots,x_n)=\big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big),$$

y a cada función $f_k\colon X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(k=1,\dots,m)$ la llamamos *función coordenada*. Sea a punto de acumulación de X. Demostrar que f tiene límite cuando $x\to a$ si y sólo si sus funciones coordenadas tienen límite cuando $x\to a$.

4. (a) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y existen los límites unidimensionales: $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$ entonces existen los límites iterados y:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L$$

(b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos. Comentar.
(c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y son iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Comentar.
(d) Se considera $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{sen}(1/y), & \text{si } y\neq 0 \\ 0, & \text{si } y=0. \end{cases}$$

Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, pero un límite iterado no existe. ¿Esto contradice la parte (a)?

5. Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ y\ \log|\ y\ | \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

6. Se considera $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Mediante el cambio de variable $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, con $\theta\in[0,2\pi)$ obtenemos $f(x,y)=g(r,\theta)$.

(a) Supongamos que $g(r,\theta) = f_1(r)f_2(\theta)$. Probar que si f_2 está acotada en $[0,2\pi)$ y $\lim_{r\to 0} f_1(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(b) ¿Qué sucede si f_2 no está acotada?

(c) Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(d) Demostrar o dar un contraejemplo:

$$\forall\theta\in[0,2\pi)\ \lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0, \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

7. Sean $f\colon X\to\mathbb{R}^m$, a de acumulación de $X\subset\mathbb{R}^n$, $g\colon Y\to\mathbb{R}^p$, b de acumulación de Y, $f(X)\subset Y\subset\mathbb{R}^m$. Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Demostrar o dar un contrajemplo:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c.$$

8. Demostrar la equivalencia entre (a) $f(x)$ es continua en a y (b) Para toda sucesión $(x_k)\subset X$, $x_k \underset{k}{\longrightarrow} a$ se verifica $f(x_k)\underset{k}{\longrightarrow} f(a)$.

9. Demostrar que la función f es continua en un punto a, si y sólo si, son continuas sus funciones coordenadas en a.

10. En cada caso hallar el dominio y estudiar la continuidad de f, donde f está definida por las siguientes fórmulas:

$$f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2 \quad f(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad f(x,y) = \operatorname{Arcsen}\big(x/\sqrt{x^2+y^2}\big)$$

11. Investigar la continuidad de $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{si } x^2+y^2<1,\\ 0, & \text{si } x^2+y^2\geq 1.\end{cases}$$

12. Sea $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función continua. Probar que:

(a) Si $f(x)>0$ entonces existe $\delta>0$ tal que $f\big(B(x,\delta)\big)>0$. (Conservación del signo.)

(b) $\{x\in\mathbb{R}^n\colon f(x)>a\} = f^{-1}(a,+\infty)$ es un conjunto abierto.

(c) $\{x\in\mathbb{R}^n\colon f(x)<a\} = f^{-1}(-\infty,a)$ es un conjunto abierto.

13. Sea $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que:

(a) Si A es abierto $f^{-1}(A)$ es abierto.

(b) $f^{-1}(a) = \{x\in\mathbb{R}^n\colon f(x)=a\}$ es un conjunto cerrado.

Utilizando (b) demostrar que el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

es un conjunto cerrado.

14. (a) Demostrar que la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

(b) Estudiar la continuidad uniforme de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(0, 1)$.

(c) Estudiar la continuidad uniforme de $f(x) = \cos\left(x^2\right)$ en los intervalos $[0, 2\pi]$ y $\mathbb{R}$.

15. Una función $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *lipschitziana*, cuando existe $k > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

(a) Probar que una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lipschitziana, determinando una constante que verifique la definición.

(b) Probar que una norma $N(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ es una función lipschitziana, y determinar una constante que verifique la definición.

(c) Probar que toda función lipschitziana es uniformemente continua.

(d) Probar que $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no lipschitziana.

16. Demostrar que (a) la unión de una familia finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto; (b) la intersección de una familia arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto; (c) El producto cartesiano de un conjunto finito de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

17. Demostrar que si toda cobertura por conjuntos abiertos para un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite una subcobertura finita, entonces el conjunto X es cerrado y acotado, es decir, X es compacto. (Se trata del recíproco del teorema 18 de las notas.)

18. (a) Asumiendo que $\mathbb{R}$ es conexo demostrar que son conexos los conjuntos $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$. (b) Demostrar que los intervalos finitos son conexos. (c) Demostrar que un intervalo arbitrario es conexo. (d) Demostrar que un conjunto conexo en la recta es un intervalo.

19. Demostrar que un conjunto *convexo* es *conexo*. ¿Es cierto el recíproco?