Práctico 3: Diferenciabilidad I

1. (a) Demostrar que, dada $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, son equivalentes: (i) existe $A \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = \langle A, x\rangle$; (ii) $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) Demostrar que $T(x) = \langle A, x\rangle$ es continua y diferenciable, calcular la derivada direccional con respecto de un vector arbitrario $v \in \mathbb{R}^n$, y las derivadas parciales.

2. Llamamos *polinomio de grado p en n variables* a una función $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{p} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

donde $a_{i_1,\dots,i_n}$ son constantes para cada n-úpla $i_1, \dots, i_n$, desde $(0, \dots, 0)$ hasta $(p, \dots, p)$.

(a) Desarrollar la sumatoria que define P en el caso $p = n = 2$.

(b) Demostrar que P es una función diferenciable.

(c) Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y consideremos $Q(x) = \langle x, T(x)\rangle$. Demostrar que Q es diferenciable, y calcular sus derivadas direccionales y parciales. Estudiar el caso en que T tiene matriz simétrica en la base canónica, es decir, $Q(x)$ es una forma cuadrática.

3. ¿Es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ la función $f(x) = \|x\|$?¿Qué ocurre si $n = 1$?

4. (a) Demostrar que si $N(x)$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, una función $f\colon U \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in U$, abierto de $\mathbb{R}^n$, si y solo si existe un vector $A = (A_1, \dots, A_n)$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{N(v)} \big(f(a + v) - f(a) - \langle A, v\rangle \big) = 0.$$

(b) Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable en $a \in I$, I intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Demostrar que

$$\lambda'(a) = \big(\lambda_1'(a), \dots, \lambda_n'(a)\big).$$

5. Estudiar continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+y}\right), \text{ si } x+y \neq 0, \\ 0, \text{ si } x+y = 0. \end{cases}$$

6. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad en el origen, de las siguientes funciones, todas ellas definidas como 0 en el origen $(0,0)$, y si $(x,y) \neq (0,0)$ definidas mediante

$$\text{(a)}\quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \qquad \text{(b)}\quad g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, \qquad \text{(c)}\quad h(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}.$$

7. Para las siguientes funciones determinar el máximo dominio de definición posible, estudiar continuidad y hallar derivadas parciales en los dominios determinados:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2 y - 3xy + 9x$.

(b) $f(x,y) = \operatorname{Arctg}(y/x)$ (Calcular además todas las derivadas de segundo orden.)

(c) $f(x,y) = x^y, \qquad f(x,y,z) = (xy)^z.$

8. Estudiar continuidad y existencia de derivadas direccionales (en particular, de las derivadas parciales) en los puntos que se indican:

(a) En $(0, y_0)$: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ y, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c) En los ejes: $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}(1/x)\cos(1/y) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

(d) En $(x_0, 1)$: $f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1. \end{cases}$

9. (a) Demostrar que si f es diferenciable en un punto a de su dominio, entonces $(\partial f/\partial v)(a)$ es una función lineal de $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Se sabe que $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = -1$, y que f es diferenciable en el origen. Calcular $(\partial f/\partial v)(0,0)$ para $v = (h,k)$ no nulo.

(c) Se sabe que $f(x,x) = x$, que $f(0,y) = 0$, y que f es diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0,0)$.

(d) Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(0,0) = 0$, y

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)$$

tiene derivadas direccionales en el origen para todo $v \neq 0$, y calcularlas. ¿Es lineal la función $(\partial f/\partial v)(0,0)$? ¿Es diferenciable f en el origen?

10. Consideremos una función real de varias variables $f\colon U \to \mathbb{R}$, con U abierto en $\mathbb{R}^n$, y $a \in U$. Entre las 6 proposiciones que se indican, existen 30 posibles teoremas, que tienen a las proposiciones dadas como hipótesis o tesis. Reconocer los verdaderos (a partir de lo estudiado en teórico), y dar contraejemplos de los falsos.

1. f es continua en a;
2. f es diferenciable en a;
3. Existe $(\partial f/\partial v)(a)$ para todo $v \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$;
4. Existen todas las derivadas parciales de f en $B(a,\varepsilon)$ y son continuas en a;
5. $\nabla f(a) = 0$;
6. $f(x) = \|x - a\|$.

11. (a) Hallar la ecuación del plano tangente, en un punto genérico, al gráfico de la función $f(x,y) = h(y/x)$, en donde $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

(b) Si (a,b,c) es un punto de la superficie $z = xy$, las dos rectas $z = bx$, $y = b$, y $z = ay$, $x = a$ se cortan en (a,b,c) y están contenidas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a la superficie en el punto (a,b,c) contiene a estas dos rectas.

12. (a) Se considera $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ (todas sus derivadas parciales de cualquier orden son funciones continuas). Considerar $g(t) = f(a + tv)$, y calcular las derivadas $g'(0)$, $g''(0)$, hasta $g^{(p)}(0)$.

(b) Se consideran $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to U \subset \mathbb{R}^n$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ funciones suficientemente regulares. Calcular $(f \circ \lambda)''$ en función de las derivadas parciales de f y de λ.

13. Supongamos que $F\colon U \to \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y $f\colon I \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto son de clase C^2 (tienen derivadas primeras y segundas continuas), y tales que $\big(x, f(x)\big) \in U$, y que se verifica $F\big(x, f(x)\big) = 0$ para todo $x \in I$. Calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ a partir de las derivadas parciales de F.

14. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en U, y c una constante real. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(i) $\|df_a(v)\| \leq c\|v\|$ para todo $a \in U$ y todo $v \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para todos $x, y \in U$

(iii) f es uniformemente continua en U.

(a) Probar que (i) implica (ii). (b) Probar que (ii) implica (i). (d) Probar que (ii) implica (iii). (d) Mostrar con un contraejemplo que (iii) no implica (ii).

15. (a) Demostrar que si u es una función de la forma $u(x, y) = f(x)g(y)$, donde f y g son funciones definidas en algun intervalo abierto de $\mathbb{R}$, entonces, u satisface la ecuación diferencial
$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

16. Si las funciones $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el punto $a \in U$ abierto en $\mathbb{R}^n$, también son diferenciables las funciones fg y f/g, esta última cuando $g(a) \neq 0$, y sus diferenciales verifican

(a) $d\big(fg\big)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a$,

(b) $d\big(f/g\big)_a = \frac{1}{g(a)}df_a - \frac{f(a)}{g(a)^2}dg_a$.

17. Dada $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciable en $a \in U$, abierto en $\mathbb{R}^n$, consideramos el gradiente de f en a, dado por
$$\nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big).$$
Las ecuaciones $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$ definen u y v como funciones de x e y, sean estas: $u = U(x, y)$ y $v = V(x, y)$. Hallar fórmulas explícitas para $U(x, y)$ y $V(x, y)$ y probar que en todo punto distinto del origen los gradientes de ambas funciones son perpendiculares.

18. Consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(0, 0) = 0$, y
$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en el origen.

(b) ¿Es f diferenciable en el origen?

(c) Estudiar la existencia de las derivadas segundas de f en todo $\mathbb{R}^2$. ¿Se verifica la igualdad de derivadas cruzadas?

19. Aplicar la regla de Leibnitz para demostrar el siguiente teorema de inversión en el orden de las integrales iteradas: Para toda función continua $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ se tiene

$$\int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)dy\Big]dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)dx\Big]dy.$$