Práctico 5: Aplicaciones diferenciables

1. (a) Designemos mediante $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que la función $|||\quad ||| : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$|||T||| = \sup\{\|T(x)\| \colon \|x\| = 1\},$$

es una norma.
(b) Consideremos dos transformaciones lineales $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $U \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Demostrar que

$$|||T \circ U||| \leq |||T|||\, |||U||| \,.$$

2. (a) Demostrar que la composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.
(b) Demostrar que la composición de dos difeomorfismos es un difeomorfismo.
(c) Consideremos $f \colon U \to V$ con U, V abiertos en $\mathbb{R}^n$. Demostrar f difeomorfismo implica f homeomorfismo; y que f homeomorfismo implica f biyectiva.
(d) Encontrar una biyección continua que no sea un homeomorfismo, y un homeomorfismo diferenciable que no sea un difeomorfismo.

3. Hallar una aplicación diferenciable f, y dos puntos a y $b = a + v$ de su dominio tales que no existe $\theta \in (0, 1)$ tal que se verifique

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

4. Investigar en cuáles puntos f es localmente invertible y hallar el diferencial de la inversa local en el punto $f(x, y)$.

1. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$.
2. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
3. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$.
4. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3/3 - 2x^2/5 + 6x - 2$.

5. (Examen 10/2/2000) Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(0, 0, 2)$ a la curva intersección del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con el cilindro de ecuación $3(z - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0$.

6. Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(1, 1, 1)$ a la curva intersección del cono de ecuación $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

7. Hallar el máximo y el mínimo del volumen de un tetraedro inscrito en la esfera de centro en el origen y radio 1, con dos vértices fijos en $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

8. (Examen 4/3/2002) Se considera el subconjunto G de $\mathbb{R}^3$ de los puntos que verifican

$$\begin{cases} 4x + 3y^2 - 4z = 0, \\ z^2 - y = 0. \end{cases}$$

(a) Probar que G es compacto.
(b) ¿Hay puntos singulares en G (es decir, puntos en los cuales el diferencial de $(3y^2 + 4x^2 - 4z, z^2 - y)$ no tiene rango máximo)?
(c) Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = 4xy + 4z - 1.$$

Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función f en la región G.

9. (Examen 7/12/2001) Se considera $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = \big(x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1, x^2 - y^2 + z^2\big).$$

Sea $C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = (0,0)\big\}$.
(a) Probar que C es un conjunto compacto.
(b) Hallar la distancias máxima y míinima del punto $(1,1,1)$ al conjunto C.

10. (Examen 10/12/1999) Hallar los extremos absolutos de la función:

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx,$$

en la región definida por:

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(Demostrar que el dominio de f es un conjunto compacto.)

11. (Examen 1o./8/2002) Se considera en $\mathbb{R}^3$ el conjunto de C los puntos (x,y,z) que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Admitiendo que C es cerrado y acotado, hallar las distancias máxima y mínima de C al plano de ecuación

$$y + 2z = 0.$$

(b) Probar que C es cerrado y acotado.

12. (Examen 21/5/2003) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x + y + 2z$, y el conjunto S de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifican las condiciones

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

(a) Determinar los puntos críticos de f condicionados a S.

(b) Demostrar que S es un conjunto compacto.

(c) Estudiar extremos absolutos de f en S.