Práctico 6: Integrales múltiples

1. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f sobre ciertos dominios. Croquizar esos dominios y expresarlas como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx \qquad \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy \qquad \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$$

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \qquad \int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x,y)dy$$

2. Calcular $\iint_D f(x,y)dxdy$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = 2x - y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le 4, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$.

(c) $f(x,y) = xy^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1, y \le x \le y+1\}$.

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \operatorname{sen}(x)\}$.

(e) $f(x,y) = xy$ y $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$; $D = D_1 \cap \{y \ge 0\}$.

(f) $f(x,y) = (xy)^2$ y D es la región acotada del primer cuadrante comprendida entre las hipérbolas: $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

3. Calcular $\int\int_D f(x,y)dxdy$ en cada uno de los siguientes casos, haciendo cambios de variable convenientes:

(a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le r^2\}$.

(b) $f(x,y) = x + y$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x,\ 0 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y,\ x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$.

(d) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y D es el triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 1$ (se sugiere pasar a polares).

(e) $f(x,y) = (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ y D es el cuadrado de vértices $(0,\pi)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$.

(f) $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2 - x^2\}$. Se sugiere hacer el cambio de variable $x = \sqrt{v-u}$, $y = v + u$.

4. Calcular la integral $\iint_D xdxdy$ siendo D el paralelogramo de vértices $(-2/3,-1/3)$, $(2/3,1/3)$, $(4/3,-1/3)$ y $(0,-1)$ de las siguientes formas:

(a) En coordenadas cartesianas.

(b) Haciendo un cambio de variables lineal que transforme D en el cuadrado de vértices: $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

5. Sea $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon u > 0\}$ y $h \colon U \to h(U)$ dada por $h(u,v) = (u+v, v-u^2)$.

(a) Probar que h es un cambio de coordenadas (se hallará explícitamente h^{-1}).

(b) Hallar J_h y $det(J_h)$ en un punto genérico. Hallar $det(J_{h^{-1}})$ en $(2,0)$, observando que $h(1,1) = (2,0)$.

(c) Sea T el triángulo de lados $u = 0$, $v = 0$, $u+v = 2$. Calcular el área de $S = h(T)$.

6. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(xy)\ dxdy = \log(2) \int_1^2 f(u)\ du,$$

siendo D la región del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

7. Calcular la integral

$$\iiint_D \sqrt{1 + (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz,$$

donde $D = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.

8.(Examen 12/12/2003) (a) Calcular

$$\iiint_A (x^2+y+z^2)^3 dxdydz,$$

donde

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

(b) Calcular

$$\iiint_B (x^2+y^2)dxdydz,$$

donde

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ x \ge 0\}.$$

9. Calcular $\iiint_D f\ dxdydz$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y,z) = (x+y+z+1)^{-2}$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\}$.

(b) $f(x,y,z) = xyz$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le y,\ 0 \le x,\ 0 \le z,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

(c) $f(x,y,z) = x^2+y^2$ y D es el dominio acotado comprendido entre: $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 2$.

(d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ y D comprendido entre: $z = 0$, $z = 1$, $z^2 = x^2+y^2$.

(e) $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \le a \le x^2+y^2+z^2 \le b\ \}$.

10. Calcular el volumen de D:

(a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2/a^2 + y^2/b^2 \le z \le 1\}$.

(b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\ \}$.

(c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ x^2+y^2-rx \geq 0,\ x^2+y^2+rx \geq 0\ \}$.

(d) D comprendido entre $z = x^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.

11. (Examen Marzo 2000) Hallar el volumen de la intersección de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con el interior del cilindro $2x^2+y^2-2x = 0$.

12.(Examen 7/8/2000) Designemos mediante (ρ, φ) las coordenadas polares en el plano xOy.

(a) Hacer un esquema del conjunto de puntos (x,y) tales que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 0 \leq \rho \leq 2R\varphi/\pi. \end{cases}$$

Sea S_R ese conjunto.

(b) Calcular el volumen del sólido intersección de la bola

$$B_R = \{(x,y,z) \colon x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

y el cilindro de generatrices paralelas a Oz que se proyecta en S_R sobre el plano xOy.

13.(Examen 10/2/2000) (a) Probar que si $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ es una función radial, es decir, existe una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = f\big(\|x\|\big)$, el laplaciano de u es

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \frac{1}{r^{n-1}} \big(r^{n-1} u_r\big)_r,$$

donde $r = \|x\| = \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{1/2}$.

(b) Hallar las soluciones radiales de la Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

en $\mathbb{R}^n - \{(0,0)\}$.

(c) Sea F una solución hallada en la parte anterior para $n = 2$. Calcular

$$\iint_{B_\varepsilon} F(x,y)\,dxdy,$$

siendo $B_\varepsilon = \{(x,y) \colon \varepsilon^2 < x^2+y^2 < 1\}$, y

$$\iint_{B\big((0,0),1\big)-\{(0,0)\}} F(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{B_\varepsilon} F(x,y)\,dxdy.$$

14.(Examen 1o./8/2002) Se consideral las superficies S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ dadas respectivamente por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2az = x^2+y^2 & (S_1), \\ x^2+y^2-z^2 = a^2 & (S_2), \end{cases}$$

donde $a > 0$. Hallar el volumen del sólido acotado que limitan S_1 y S_2.

15.(Examen 02/08/2004) Se considera un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ acotado, y la función $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

llamada *indicatriz* del conjunto A.

(a) Demostrar que si f_A es integrable, y se verifica $\iint f_A(x,y)dxdy = 0$, entonces A es un conjunto con medida de Jordan nula.

(b) Determinar el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f_A.

(c) Decimos que un conjunto acotado B es *medible* según Jordan cuando f_B es una función integrable, y decimos que el conjunto B tiene medida de Jordan $m(B)$, dada por

$$m(B) = \iint f_B(x,y)dxdy.$$

Demostrar que si la frontera de B tiene medida de Jordan nula, entonces B es medible según Jordan.