Integrales múltiples

Cálculo II (2004) *

El objetivo de este capítulo es definir y aprender a calcular integrales de funciones reales de varias variables, que llamamos *integrales múltiples*. Las motivación más directa de éstas integrales es el cálculo de volúmenes, encontrando además aplicaciones en la geometría y la física.

1. Definición de la integral de Riemann en intervalos de $\mathbb{R}^n$

Consideremos un subconjunto I de $\mathbb{R}^n$, que llamamos *rectángulo* o también *intervalo*, de la forma

$$I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\},$$

donde $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ son n pares de números reales. Alternativamente el intervalo I se puede ver como el producto cartesiano de los intervalos reales $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$, es decir $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Comenzamos estudiando la integral de una función

$$f \colon I \to \mathbb{R}, \text{ acotada .}$$

Estamos interesados en particular en los casos $n = 2$ y $n = 3$. Si $n = 2$ el intervalo I es un rectángulo, y escribimos $I = [a, b] \times [c, d]$. En el caso $n = 3$ obtenemos un paralelepípedo, con $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Cuando es necesario, decimos que I es un *intervalo cerrado* en $\mathbb{R}^n$, y definimos análogamente los *intervalos abiertos* en $\mathbb{R}^n$, como producto cartesiano de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

*Notas para el curso de la Licenciatura en Matemática, Facultad de Ciencias, preparadas por Ernesto Mordecki en base a notas manuscritas de Fernando Peláez

Definimos el *volumen* de un intervalo en $\mathbb{R}^n$, abierto o cerrado, que designamos $\operatorname{vol}(I)$, mediante la fórmula

$$\operatorname{vol}(I) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

En el caso $n = 2$, decimos *área* en lugar de volumen y escribimos $\text{área}(I)$, resultando $\text{área}(I) = (b - a) \times (d - c)$.

Consideremos un intervalo $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ en $\mathbb{R}^n$, en cada uno de los cuales tenemos una partición $P_1, \dots, P_n$. Definimos *partición* del intervalo I, que designamos mediante P, al producto cartesiano de las particiones de los intervalos reales, es decir,

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n.$$

Observemos que una partición P de un intervalo I genera una descomposición del intervalo en subintervalos, que llamamos *bloques*, que se obtienen, cada uno, como el producto cartesiano de los intervalos que determinan las particiones de los intervalos reales. En otros términos, para formar un bloque $B \subset I$, elejimos intervalos $I_i \subset [a_i, b_i]$ $(i = 1, \dots, n)$, donde cada I_i es un intervalo cuyos extremos son puntos consecutivos de la partición P_i, y tenemos $B = I_1 \times \cdots \times I_n$. Observemos por último que

$$\sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(I), \tag{1}$$

donde la suma se efectúa en todos los bloques B contenidos en el intervalo I.

En el caso $n = 2$, tenemos particiones $P_1 = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, y $P_2 = \{c = y_0 < \cdots < y_m = d\}$, los bloques son rectángulos de la forma $B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, y la fórmula (1) se lee

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \text{área}(B_{ij}) = \text{área}(I).$$

Consideremos ahora una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, acotada, donde I es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y una partición P. Para cada bloque B de la partición designamos mediante e_B y E_B los extremos inferior y superior (el ínfimo y el supremo) de la función f en el bloque B, es decir

$$e_B = \inf\{f(x)\colon x \in B\}, \qquad E_B = \sup\{f(x)\colon x \in B\}.$$

Cuando queremos destacar la función f escribimos e_B^f, E_B^f.

Designamos mediante $s(f,P)$ y $S(f,P)$ a las *sumas inferiores y superiores* de la función f con respecto de la partición P, que definimos mediante

$$s(f,P)=\sum_{B\subset I} e_B \operatorname{vol}(B), \qquad S(f,P)=\sum_{B\subset I} E_B \operatorname{vol}(B).$$

En el caso $n=2$ escribimos $e_{ij}=e_{B_{ij}}$, $E_{ij}=E_{B_{ij}}$, y las sumas inferiores y superiores resultan ser

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}),\\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}). \end{aligned}$$

Dadas dos particiones $P=P_1\times\cdots\times P_n$ y $Q=Q_1\times\cdots Q_n$ de un mismo intervalo I en $\mathbb{R}^n$, decimos que Q es *posterior* a P, o también que Q es *más fina* que P cuando $P_1\subset Q_1,\dots,P_n\subset Q_n$. Definimos además la *suma* de las particiones P y Q, que designamos mediante $P+Q$, según la fórmula

$$P+Q=(P_1\cup Q_1)\times\cdots\times(P_n\cup Q_n).$$

Es claro que $P+Q$ es posterior a P y es posterior a Q. Obsérvese que $P\cup Q$ no necesariamente es una partición.

Teorema 1. *Consideremos $f\colon I\to\mathbb{R}$ acotada, I intervalo en $\mathbb{R}^n$.*
(a) *Si Q es posterior a P, tenemos*

$$s(f,P)\le s(f,Q)\le S(f,Q)\le S(f,P).$$

(b) *Si P y Q son particiones arbitrarias, tenemos*

$$s(f,P)\le S(f,Q).$$

Demostración. Comencemos por (a), con Q posterior a P. Consideremos un bloque B fijo determinado por P, y todos los bloques C determinados por Q y contenidos en B. Como $C\subset B$ tenemos $e_C\ge e_B$, de donde

$$\sum_{C\subset B} e_C\operatorname{vol}(C)\ge\sum_{C\subset B} e_B\operatorname{vol}(C)=e_B\sum_{C\subset B}\operatorname{vol}(C)=e_B\operatorname{vol}(B).$$

Calculamos ahora la suma inferior con respecto de Q sumando en dos etapas: para cada bloque de B de P sumamos en todos los bloques $C \subset B$ de Q, y luego en los bloques de P, es decir

$$s(f, Q) = \sum_{B \subset I} \Big(\sum_{C \subset B} e_C \operatorname{vol}(C) \Big) \geq \sum_{B \subset I} e_B \operatorname{vol}(B) = s(f, P),$$

completando la demostración de la primera desigualdad. La segunda es inmediata, porque $e_B \leq E_B$, y la tercera es análoga a la primera.

Para ver entonces (b), como $P + Q$ es más fina que P y que Q, aplicando (a), tenemos

$$s(f, P) \leq s(f, P + Q) \leq S(f, P + Q) \leq S(f, Q).$$

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Definición 1 (Integral de Riemann). *Consideremos $f \colon I \to \mathbb{R}$, acotada, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}^n$.*
(a) *Definimos la* integral inferior *y la* integral superior*, que designamos $\underline{\int}_I f$, $\overline{\int}_I f$ respectivamente, mediante*

$$\underline{\int}_I f = \sup\{s(f, P) \colon P \text{ partición de } I\},$$
$$\overline{\int}_I f = \inf\{S(f, P) \colon P \text{ partición de } I\}.$$

(b) *Cuando las integrales inferior y superior coinciden, decimos que f es* integrable (según Riemann) *en I, y definimos la* integral (de Riemann) *de f en I, que designamos $\int_I f$, mediante*

$$\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f.$$

Observación. Siempre se verifica $\underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f$. De lo contrario, si $\delta = \underline{\int}_I f -$

$\overline{\int}_I f \geq 0$, existirían particiones P y Q, tales que

$$S(f,Q) < \overline{\int}_I f + \frac{\delta}{2} = \underline{\int}_I f - \frac{\delta}{2} < s(f,P),$$

contradiciendo (b) en el teorema 1.

Si $n = 2$ decimos *integral doble*; si $n = 3$, *integral triple*. En estos casos escribimos, respectivamente

$$\iint_I f = \iint_I f(x,y)dxdy, \quad \iiint_I f = \iiint_I f(x,y,z)dxdydz.$$

Teorema 2 (Criterio ε-P de integrabilidad).
Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ acotada, con I intervalo en $\mathbb{R}^n$ es integrable si y sólo si

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe una partición } P \text{ tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon. \quad (2)$$

Demostración. Supongamos que f es integrable y consideremos $\varepsilon > 0$. Existen particiones Q y R tales que

$$\underline{\int}_I f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,Q) \leq \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f \leq S(f,R) < \overline{\int}_I f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vista del teorema 1, la partición $P = Q + R$ verifica

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,R) - s(f,Q) < \varepsilon,$$

concluyendo que se verifica (2).

Supongamos ahora, por absurdo, que f no es integrable. Según nuestra definición de integral superior e inferior, tenemos, para cualquier partición P, que

$$S(f,P) - s(f,P) \geq \overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f = \delta > 0,$$

y no se verifica (2) con $\varepsilon < \delta$. Concluímos que, de verificarse (2), la función f resulta integrable. Esto termina la demostración. $\square$

Veamos ahora que las funciones continuas son integrables.

Teorema 3. *Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}^n$. Entonces, f es integrable.*

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ para aplicar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (teorema 2). Como I es un conjunto compacto, f resulta uniformemente continua, y existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}(I)}.$$

Consideremos ahora una partición $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, de forma que dos puntos arbitrarios en un mismo bloque B de la partición no disten más que δ. Esto se logra si dos puntos consecutivos de cada partición $P_1, \dots, P_n$ no disten mas que $\delta/\sqrt{n}$. Como f es continua, para cada bloque B existen dos puntos $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ e $y_B = (y_1, \dots, y_n)$ tales que $E_B = f(x_B)$, $e_B = f(y_B)$. Además, como los puntos x e y están en el mismo bloque, sus i-ésimas coordenadas no difieren más que las de los puntos de la partición P_i, por lo que tenemos

$$\|x_B - y_B\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2}{n} = \delta^2,$$

por lo que, para la partición elegida, tenemos

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &\le \sum_{B \subset I} \big(E_B - e_B\big) \operatorname{vol}(B) = \sum_{B \subset I} \big(f(x_B) - f(y_B)\big) \operatorname{vol}(B) \\ &\le \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}(I)} \sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que f es integrable, y concluye la demostración. □

2. Integración en dominios generales

Estudiemos ahora como definir la integral de una función $f\colon X \to \mathbb{R}$, acotada, donde X es un subconjunto acotado arbitrario de $\mathbb{R}^n$. La estrategia para la definición consiste en considerar un intervalo I que contenga a X, es decir $X \subset I$, y definir una función auxiliar $\bar{f}\colon I \to \mathbb{R}$ mediante

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \in I \setminus X. \end{cases}$$

estudiando condiciones para que $\bar{f}$ sea integrable en I, para definir, cuando $\bar{f}$ es integrable

$$\int_X f = \int_I \bar{f}.$$

Observemos que, aunque f sea continua, en general, $\bar{f}$ no conserva esta propiedad, por lo que es necesario obtener condiciones mas generales que la continuidad para obtener la integrabilidad de funciones. Es por eso que introducimos la siguiente noción.

Definición 2. *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ tiene* medida (de Jordan) nula*, cuando, para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubrimiento numerable $I_1, I_2, \dots$ de intervalos en $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_i) < \varepsilon.$$

Observación. Cabe observar que, si bien en la definición se consideran intervalos cerrados en $\mathbb{R}^n$, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene medida nula cuando verifica la misma defínción con intervalos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Dada $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, el gráfico de g, es decir, el conjunto

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b], y = g(x)\},$$

tiene medida de Jordan nula en $\mathbb{R}^2$. Para verificarlo, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como g es continua, y el intervalo $[a,b]$ es compacto, resulta que g es uniformemente continua, por lo que dado $\varepsilon_0 < \varepsilon / \big(2(b-a)\big)$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_0$. Consideremos entonces una partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, que verifica $\max\{x_i - x_{i-1} \colon i = 1, \dots, n\} < \delta$, y los rectángulos

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \times [f(x_{i-1}) - \varepsilon_0, f(x_{i-1}) + \varepsilon_0], \qquad i = 1, \dots, n.$$

La continuidad uniforme nos asegura que $G \subset \cup_{i=1}^n I_i$. Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} \text{área}(I_i) = 2\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2\varepsilon_0 (b-a) < \varepsilon,$$

probando que G tiene medida nula.

Ejemplo 2. Dada $h\colon X \to \mathbb{R}$ continua, con X compacto en $\mathbb{R}^2$, el gráfico de h, es decir, el conjunto

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in X, z = h(x,y)\},$$

tiene medida de Jordan nula en $\mathbb{R}^3$. Para verificarlo, consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como X es compacto en $\mathbb{R}^2$ existe un rectángulo I tal que $X \subset I$. Como h es continua, y X es compacto, resulta que h es uniformemente continua, por lo que dado $\varepsilon_0 < \varepsilon/\big(2\,\text{área}(I)\big)$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-y\| < \delta$ se verifica $|f(x)-f(y)| < \varepsilon_0$. Consideremos entonces una partición P de I de forma tal que si dos puntos x, y están en el mismo bloque B determinado por I, tenemos $\|x-y\| < \delta$. Consideremos ahora un punto x_B de cada bloque $B \subset I$, y un intervalo (paralelepípedo) en $\mathbb{R}^3$, dado por

$$J_B = B \times [f(x_B) - \varepsilon_0, f(x_B) + \varepsilon_0],$$

La continuidad uniforme nos asegura que $G \subset \cup_{B\subset I} J_B$. Por otra parte

$$\sum_{B\subset I}^{n} \text{vol}(J_B) = 2\varepsilon_0 \sum_{B\subset I}^{n} \text{área}(B) = 2\varepsilon_0\,\text{área}(I) < \varepsilon,$$

probando que G tiene medida nula.

Teorema 4 (Lebesgue).
Consideremos $f\colon I \to \mathbb{R}$ acotada, con I intervalo en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que D, el conjunto de los puntos de discontinuidad de f, tiene medida de Jordan nula. Entonces, f es integrable en I.

Demostración. Consideremos $\varepsilon > 0$ para aplicar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad (teorema 2), y designemos

$$K = \sup\{f(x) \colon x \in I\} - \inf\{f(x) \colon x \in I\}.$$

La idea es construir una partición cuyos bloques se dividan en dos grupos, el primero donde la función pueda ser discontinua, y el segundo donde la función sea continua.

Como D tiene medida nula existe una sucesión de intervalos $I_1, I_2, \dots,$ que podemos tomar abiertos, tales que

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Por otra parte, para cada $x \in I \setminus D$ la función es continua, por lo que existe un intervalo, llamémosle J_x, que también elegimos abierto, tal que $E_{J_x} - e_{J_x} < \varepsilon / \big(2 \operatorname{vol}(I)\big)$.

Si aplicamos el teorema de los cubrimientos finitos, podemos extraer un conjunto finito $I_1, \dots, I_p, J_{x_1}, \dots, J_{x_q}$ de la familia de todos los intervalos $\{I_i\} \cup \{J_x\}$ recién considerados, tales que se verifica

$$I \subset \Big[\bigcup_{i=1}^{p} I_i\Big] \cup \Big[\bigcup_{j=1}^{q} J_{x_j}\Big]. \tag{3}$$

Consideremos ahora la partición P formada por todos los puntos que son vértices de alguno de los intervalos que aparecen a la derecha en (3), junto con todos los necesarios para que el conjunto resultante sea una partición, y clasifiquemos los bloques que determina esta partición en dos conjuntos: el primero contiene aquellos bloques B que esten contenidos en algún I_i ($i = 1, \dots, p$), y el segundo, con bloques que designamos C, que contiene todos los bloques restantes. Tenemos

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{B \subset I} (E_B - e_B) \operatorname{vol}(B) + \sum_{C \subset I} (E_C - e_C) \operatorname{vol}(C) \\ &\leq K \sum_{B \subset I} \operatorname{vol}(B) + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{vol}(I)} \sum_{C \subset I} \operatorname{vol}(C) \\ &\leq K \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_i) + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{vol}(I)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del teorema. □

Observación. El teorema anterior admite también un recíproco: toda función integrable en un intervalo es continua salvo, a lo sumo, un conjunto de puntos de medida nula.

3. Cálculo de integrales múltiples: Integrales iteradas

Teorema 5 (Integral iterada). *Sea $I = [a,b] \times [c,d]$ y $f \colon I \to \mathbb{R}$ integrable. Si para cada $x \in [a,b]$ existe $\int_c^d f(x,y)dy$, entonces*

$$\iint_I f = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)dy\Big] dx.$$

Demostración. Observemos que, para cada $x \in [a,b]$, la función de una variable $f^x(y) = f(x,y)$ es integrable en $[c,d]$.

Si definimos $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$$

tenemos que demostrar que φ es integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \iint_I f.$$

Sean $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ y $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$ particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente, y $P = P_1 \times P_2$ la partición de I correspondiente. Designamos $B_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ los bloques que determina P en I.

Tenemos

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \Big[\sum_{j=1}^m e_{ij}(y_j - y_{j-1}) \Big] (x_i - x_{i-1}).$$

Para cada i fijo y para cada $x \in [x_{i-1}, x_i]$ fijo también tenemos

$$e_{ij} = \inf\{f(x,y)\colon (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \le \inf\{f(x,y)\colon y \in [y_{j-1}, y_j]\},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m e_{ij}(y_j - y_{j-1}) &\le \sum_{j=1}^m \inf\{f(x,y)\colon y \in [y_{j-1}, y_j]\}(y_j - y_{j-1}) = s(f^x, P_2) \\ &\le \int_c^d f^x(y)dy = \varphi(x). \end{aligned}$$

Entonces, como $x \in [x_{i-1}, x_i]$, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^m e_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \inf\{\varphi(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

por lo que

$$s(f,P) \le \sum_{i=1}^n \inf\{\varphi(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}(x_i - x_{i-1}) = s(\varphi, P_1).$$

Un argumento análogo para las sumas superiores nos permite concluir que

$$s(f,P) \leq s(\varphi,P_1) \leq S(\varphi,P_1) \leq S(f,P). \tag{4}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Según el criterio ε-P de integrabilidad (teorema 2) aplicado a f existe $P = P_1 \times P_2$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, por lo que para P_1, en vista de (4) tenemos $S(\varphi,P_1) - s(\varphi,P_1) < \varepsilon$, y φ es integrable en $[a,b]$. Además, de (4) obtenemos también que

$$s(f,P) \leq \int_a^b \varphi(x)dx \leq S(f,P),$$

lo que vale para toda partición P, dando como resultado $\int_a^b \varphi(x)dx = \iint_I f$, concluyendo la demostración. $\square$

Observación. Es claro que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua se verfican las hipótesis del teorema.

Observación. Un teorema análogo vale también cuando $f\colon I \to \mathbb{R}$ es integrable, y para cada $y \in [c,d]$ existe la integral $\int_a^b f(x,y)dx$. En ese caso el resultado es

$$\iint_I f = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)dx\Big]dy.$$

Una situación frecuente de aplicación del teorema 5 es la situación siguiente.

Ejemplo 3. Consideremos dos funciones continuas $g_1, g_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que $c \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq d$ para todo $x \in [a,b]$. Sea X un dominio en el plano de la forma

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

y $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Tenemos $X \subset I = [a,b] \times [c,d]$, y la función auxiliar $\bar{f}\colon I \to \mathbb{R}$ definida como $\bar{f} = f$ en X, y $\bar{f} = 0$ en $I \setminus X$ es integrable, dado que sus puntos de discontinuidad estan contenidos en la unión de los gráficos de g_1 y g_2. Ademas, para cada x la función $\bar{f}^x(y) = \bar{f}(x,y)$ tiene a lo sumo dos puntos de discontinuidad, por lo que también es integrable. Calculemos entonces, aplicando el teorema 5:

$$\iint_X f = \iint_I \bar{f} = \int_a^b \Big[\int_c^d \bar{f}(x,y)dy\Big]dx = \int_a^b \Big[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\Big]dx,$$

dado que si $x \in [a,b]$ tenemos $\bar{f}(x,y) = f(x,y)$ cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, y $\bar{f}(x,y) = 0$ en los intervalos $[c, g_1(x)]$ y $[g_2(x), d]$.

En dimension mayores existen resultados análogos, cuyas pruebas son similares a la presentada, que perimiten, por ejemplo, calcular una integral triple como la integral doble de una integral simple.

Teorema 6 (Integrales iteradas triples). *Consideremos* $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}$ *y una función integrable* $f \colon I \to \mathbb{R}$*. Si para cada* $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *existe* $\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz$*, entonces*

$$\iiint_I f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \Big[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz \Big] dxdy. \tag{5}$$

Observación. En realidad[1] vale un resultado mas general, para una función $f \colon I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ integrable. Si las integrales que aparecen estan bien definidas, y escribimos, $f(x, y)$ con $x \in I_1$, $y \in I_2$, tenemos

$$\int_{I_1 \times I_2} f = \int_{I_1} \Big[\int_{I_2} f(x, y)dy \Big] dx.$$

Si en la fórmula (5) aplicamos para el cálculo de la integral doble el teorema 5 (suponiendo que se verifican las hipótesis) obtenemos

$$\iiint_I f = \int_{a_1}^{b_1} \Big\{ \int_{a_2}^{b_2} \Big[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz \Big] dy \Big\} dx.$$

que es la fórmula que permite el cálculo efectivo de integrales triples. Es frecuente también, para escribir la iteración de integrales anterior, la notación

$$\iiint_I f = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} dz f(x, y, z).$$

Observemos aquí que el orden de integración que elegimos en la presentación del resultado anterior (primero z, luego y, finalmente x) es arbitrario. En realidad, cuando las integrales existen, cualquiera de los $3! = 6$ órdenes posibles de integración dan como resultado la misma integral triple.

Ejemplo 4. Consideremos dos funciones continuas $g_1, g_2 \colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$. Supongamos que $a_2 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq b_2$ para todo $x \in [a_1, b_1]$. Sea X un dominio en el plano de la forma

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 \leq x \leq b_1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

[1]Ver "Análise Real" Vol 2. Elon Lages Lima, (2004) IMPA, Brazil

Consideremos además otras dos funciones $h_1, h_2 \colon X \to \mathbb{R}$, continuas también, tales que $a_3 \leq h_1(x,y) \leq h_2(x,y) \leq b_3$ para todo $(x,y) \in X$.

Estas dos funciones definen un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$D = \{(x,y,z) \colon a_1 \leq x \leq b_1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}.$$

Consideremos entonces $f \colon D \to \mathbb{R}$ continua. Tenemos $D \subset I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$, y la función auxiliar $\bar{f} \colon I \to \mathbb{R}$ definida como $\bar{f} = f$ en D, y $\bar{f} = 0$ en $I \setminus D$ que (no es difícil verificar) es integrable.

Aplicando los resultados anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
\iiint_D f &= \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \Big[\int_{a_3}^{b_3} \bar{f}(x,y,z)dz \Big] dxdy \\
&= \int_X \Big[\int_{a_3}^{b_3} \bar{f}(x,y,z)dz \Big] dxdy \\
&= \int_X \Big[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big] \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \Big\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big] dy \Big\} dx.
\end{aligned}$$

4. Cálculo de integrales múltiples: cambio de variables

Al igual que en integrales simples, el método de sustitución o cambio de variables en integrales es una potente herramienta de cálculo. La demostración puede verse en el libro Análise Real" Vol 2. Elon Lages Lima, (2004) IMPA, Brazil.

Teorema 7. *Consideremos un C^2-difeomorfismo $g \colon U \to V$, donde U, V son abiertos, acotados, en $\mathbb{R}^n$ y una función $f \colon V \to \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces*

$$\int_V f(x)dx = \int_U f\big(g(x)\big) \big| \det \big(Jg(x)\big) \big| dx. \tag{6}$$

Ejemplo 5. Calculemos el volumen de un elipsoide, es decir, del conjunto

$$E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Big\}$$

Utilizamos un cambio de variable, que llamamos *coordenadas esféricas afines*, que corresponde a las fórmulas:

$$x = a\rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad y = b\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = c\rho \cos\varphi,$$

Es sencillo de ver que el dominio $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ corresponde a E. Por último para aplicar la fórmula, del cálculo del jacobiano obtenemos

$$\det(J) = -abc\rho^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

Tenemos entonces

$$V = \iiint_E 1 dxdydz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} abc\rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a = b = c = r$ obtenemos una esfera, y la conocida fórmula para su volumen: $V = 4\pi r^3/3$.