Nociones topológicas elementales de $\mathbb{R}^n$

Cálculo II (2004) *

1. Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-uplas de números reales, donde n es un número natural arbitrario fijo. Los elementos de $\mathbb{R}^n$, que llamamos indistintamente *puntos* o *vectores* son entonces todos los conjuntos ordenados $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde $x_1, \dots, x_n$ son números reales arbitrarios. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, dos vectores en $\mathbb{R}^n$, decimos que son iguales, y escribimos $x = y$, cuando $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Definimos la suma de x e y, y el producto de un número real α (que en este contexto llamamos *escalar*) por un vector x, mediante

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Es inmediato verificar las siguientes propiedades.

Teorema 1 (Propiedades de la suma y el producto).
Sean x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$ y α, β escalares, todos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:

(1) *Conmutativa:* $x + y = y + x$.

(2) *Asociativa:* $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(3) *Existencia de neutro: el vector* $0 = (0, \dots, 0)$ *verifica* $x + 0 = x$.

(4) *Existencia de opuesto: existe* $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ *tal que se verifica* $x + (-x) = 0$.

*Notas para el curso de la Licenciatura en Matemática, Facultad de Ciencias, preparadas por Ernesto Mordecki.

(5) *Asociativa del producto:* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(6) *Distributivas:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(7) *Existencia de neutro del producto:* $1x = x$.

Este teorema muestra que la cuaterna $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \times)$, con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de los vectores, $\mathbb{R}$ el de los números reales, y $+$, $\times$ la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector antes definidos, conforman un *espacio vectorial.*

El conjunto de n vectores dado por

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots,\ e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^n$, y, dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, permite escribir

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

2. Producto interno y norma en $\mathbb{R}^n$

Dados dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos su *producto interno*, también llamado *producto escalar*, al número real que designamos $\langle x, y\rangle$, mediante

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Este producto interno verifica las siguientes propiedades.

Teorema 2. *Sean x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un escalar, todos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:*

(P1) *Conmutativa:* $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(P2) *Distributiva:* $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(P3) *Homogeneidad:* $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$.

(P4) *Positividad:* $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

El producto interno recién introducido nos permite considerar la *norma euclideana* de un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, que designamos $\|x\|$, y definimos mediante

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{2}$$

Teorema 3 (Propiedades de la norma). *Sean x, y vectores de $\mathbb{R}^n$, α un escalar, todos arbitrarios. Se verifican las siguentes propiedades:*

(N1) *Positividad: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.*

(N2) *Homogenenidad: $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$.*

(N3) *Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Las propiedades (N1) y (N2) son inmediatas. Más adelante veremos la demostración de la *desigualdad triangular* (N3). De esta desigualdad obtenemos

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| \,.$$

Teorema 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).
Dados dos vectores x, y de $\mathbb{R}^n$, se verifica

$$\big|\, \langle x, y\rangle \,\big| \leq \|x\|\, \|y\| \,. \tag{3}$$

Además, se verifica la igualdad en (3) si, y sólo si los vectores x, y son linealmente dependientes, es decir, existen escalares α, β, no simúltaneamente nulos, tales que $\alpha x + \beta y = 0$.

Demostración. Supongamos que x e y son no nulos (si alguno es nulo, se verifica la igualdad en (3)). Para un escalar α, aplicando (N1), tenemos

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = \alpha^2 \langle x, x\rangle + 2\alpha \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \,.$$

Luego, el discriminante del polinomio de segundo grado en α debe ser no positivo, es decir

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4 \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \leq 0, \tag{4}$$

lo que equivale a (3). Además, existe α tal que $\langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = 0$, es decir $\alpha x + y = 0$, si y sólo si el discriminante Δ en (4) se anula, es decir, si y sólo si se verifica la igualdad en (3). Esto completa la demostración. $\square$

Veamos ahora la demostración de la propiedad triangular (N3). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3), tenemos

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq \langle x,x\rangle + 2\|x\|\,\|y\| + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\,\|x\| + \|y\|\,\big)^2,\end{aligned}$$

lo que equivale a (N3).

Definición 1 (Norma). *Una* norma *en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que verifica, para todo escalar* α, *y todo par de vectores* x, y, *las propiedades*

(N1) *Positividad:* $N(x) \geq 0$, $N(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(N2) *Homogenenidad:* $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$.

(N3) *Desigualdad triangular:* $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

La norma euclideana definida en (2) es la *norma usual*, y escribimos también $\|x\| = \|x\|_2$, (el 2 recuerda los cuadrados). Cuando escribimos *norma* nos referimos a la norma usual.

Dado un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, otros ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$ son la *norma del máximo*, o *norma infinito*, que es el real $\|x\|_\infty$ definido como

$$\|x\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \dots, |x_n|\big\},$$

y la *norma de la suma*, o *norma uno*, que es el real $\|x\|_1$, definido como

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

La existencia de diversas normas en $\mathbb{R}^n$ motiva la introducción de la siguiente noción.

Definición 2 (Normas equivalentes). *Sean* N_1 *y* N_2 *normas definidas en* $\mathbb{R}^n$. *Decimos que* N_1 *es* equivalente *a* N_2, *cuando existen dos reales positivos* α, β, *tales que*

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \quad \textit{para todo vector } x \textit{ en } \mathbb{R}^n.$$

Es posible verificar la relación

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

utilizando la desigualdad triangular para verificar la segunda desigualdad. Esto permite concluir que las tres normas introducidas son equivalentes. Veremos más adelante que *todas* las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes (es decir, dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes).

Es útil considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. La *bola abierta* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \|x - a\| < r\big\};$$

la *bola cerrada* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B[a, r] = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \ \|x - a\| \leq r\big\};$$

y la *bola reducida* de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B^*(a, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 < \|x - a\| < r\big\}.$$

Cuando decimos *bola* nos referimos a la bola abierta.

Con estas definiciones introducimos la siguiente noción. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto acotado*, cuando existe $r > 0$ tal que X está contenido en alguna bola de centro en el origen $0 = (0, \dots, 0)$ y radio r, es decir $X \subset B(0, r)$, o, en forma equivalente, $\|x\| < r$ para todo $x \in X$.

Dados dos puntos a, b de $\mathbb{R}^n$, llamamos *intervalo* en $\mathbb{R}^n$ con extremos a, b, al conjundo que designamos $[a, b]$, y definimos mediante

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = (1 - t)a + tb, t \in [0, 1]\}.$$

Decimos que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo*, cuando todos los intervalos cuyos extremos son puntos del conjunto están contenidos en el conjunto, es decir, cuando dados $x \in X$, $y \in X$ arbitrarios, se verifica $(1 - t)x + ty \in X$ para todo $t \in [0, 1]$. La desigualdad triangular nos permite ver que las bolas abiertas y cerradas son convexas. En efecto, si $\|x - a\| < r$, $\|y - a\| < r$, para $t \in [0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned}\|(1 - t)x + ty - a\| &= \|(1 - t)(x - a) + t(y - a)\| \\ &\leq (1 - t)\,\|x - a\| + t\,\|y - a\| < r,\end{aligned}$$

siendo análoga la demostración para una bola cerrada. Por su parte, las bolas reducidas no son convexas, porque no contienen su centro.

3. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Llamamos *sucesión en* $\mathbb{R}^n$ a una función $\mathbf{x}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, es decir, a una función con dominio en los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ y recorrido en $\mathbb{R}^n$. Escribimos

$$\mathbf{x} = (x_k) = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots),$$

donde $x_k = \mathbf{x}(k)$ es el valor de la sucesión en el k-ésimo natural, y escribimos $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ cuando indicamos las coordenadas de x_k.

Dada una sucesión $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos n sucesiones en $\mathbb{R}$, que llamamos *sucesiones coordenadas*, que son $(x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$, obtenidas al tomar las coordenadas del vector x_k. Recíprocamente, dadas n sucesiones de números reales podemos construir una sucesión en $\mathbb{R}^n$, tomando como k-ésimo elemento de la sucesión el vector cuyas coordenadas son los k-ésimos elementos de las sucesiones reales.

Una *subsucesión* de una sucesión $\mathbf{x}$ es la restricción de $\mathbf{x}$ a un dominio (infinito) de la forma $\{k_1 < k_2 < \dots\}$, escribiendo (x_{k_j}) para designarla.

Definición 3 (Límite de una sucesión). *Decimos que la sucesión* (x_k) tiene límite a*, o que* (x_k) tiende a a*, y escribimos*

$$\lim_k x_k = a, \qquad x_k \xrightarrow[k]{} a,$$

cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe K natural, tal que para todo $k \geq K$ se verifica $\|x - a\| < \varepsilon$. En otros términos, (x_k) tiene límite a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq K \quad \|x_k - a\| < \varepsilon.$$

Si una sucesión tiene límite, decimos que es convergente.

Observamos primero que esta definición generaliza la correspondiente definición de convergencia de sucesiones reales. Luego, es inmediato ver las siguientes equivalencias:

(a) $x_k \xrightarrow[k]{} a$,

(b) $\|x_k - a\| \xrightarrow[k]{} 0$,

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq K \quad x_k \in B(a, \varepsilon)$.

(d) Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ tenemos

$$x_{ki} \xrightarrow[k]{} a_i \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Teorema 5 (Operaciones con límites de sucesiones).
Consideremos las sucesiones (x_k) con límite a, (y_k) con límite b, ambas en $\mathbb{R}^n$, y la sucesión real (α_n) con límite α. Entonces

(1) $x_k + y_k \xrightarrow[k]{} a + b$,

(2) $\alpha_k x_k \xrightarrow[k]{} \alpha a$,

(3) $\langle x_k, y_k \rangle \xrightarrow[k]{} \langle a, b \rangle$,

(4) $\|x_k\| \xrightarrow[k]{} \|a\|$.

Veamos ahora que toda sucesión convergente es acotada. En efecto, dado $\varepsilon = 1$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K$ tenemos $x_k \in B(a, 1)$. Entonces

$$\|x_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq K} \|x_k\| + \|a\| + 1 \qquad \text{para todo } k \text{ natural.}$$

El recíproco de esta proposición no es cierto, como muestra la sucesión de números reales $x_k = (-1)^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$. Sin embargo, vale el siguiente resultado.

Teorema 6 (Bolzano-Weierstrass).
Toda sucesión (x_k) acotada tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Veamos primero la demostración en el caso $n = 1$. Existen a_1, b_1 tales que $a_1 \leq x_k \leq b_1$ para todo k natural. Para construir la subsucesión consideremos $k_1 = 1$ y el punto medio $m = (a_1 + b_1)/2$. Si existen infinitos valores de k tales que $x_k \in [a_1, m]$ ponemos $a_2 = a_1$, $b_2 = m$. De lo contrario, existen infinitos valores de k tales que $x_k \in [m, b_1]$ y ponemos $a_2 = m$, $b_2 = b_1$. En ambos casos elegimos un índice $k_2 > k_1$ tal que $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Repitiendo este procedimiento construimos una sucesión de intervalos $[a_j, b_j]$ de largo $(b_1 - a_1)/2^{j-1}$, cada uno de los cuales está contenido en el anterior, y una subsucesión $x_{k_j} \in [a_j, b_j]$. Es claro entonces, que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Por esto existe $\alpha = \lim_j a_j = \lim_j b_j$ (basta tomar $\alpha = \sup_j\{a_j\}$) y, por el teorema de la sucesión comprendida, se verifica $\lim_j x_{k_j} = \alpha$.

Consideremos ahora $n > 1$, y una sucesión $\big(x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})\big)$. Como la sucesión original está acotada, también lo esta su primer sucesión coordenada (x_{k1}), que según vimos, tiene una subsucesión convergente, definida por $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$. La subsucesión (x_{k_j2}) está también acotada y tiene una subsucesión convergente. Procediendo así con cada una de las coordenadas restantes, obtenemos una subsucesión, definida por $\{k'_1 < k'_2 < \cdots\}$ tal que todas las subsucesiones coordenadas convergen, y por lo tanto converge la subsucesión obtenida en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Por último en esta sección estudiamos en que medida la convergencia de sucesiones depende de la norma considerada. Hemos visto que la definición de límite de una sucesión (así como la de conjunto acotado) se basa en la norma usual de $\mathbb{R}^n$. No es difícil ver, basándose en (5), que son equivalentes

(a) $\|x_k - a\|_2 \underset{k}{\longrightarrow} 0$,

(b) $\|x_k - a\|_\infty \underset{k}{\longrightarrow} 0$,

(c) $\|x_k - a\|_1 \underset{k}{\longrightarrow} 0$,

lo que nos dice que la convergencia de una sucesión no depende de la norma que tomemos en la definición de límite, si nos restringimos a alguna de las tres normas consideradas. El siguiente resultado muestra que *cualquier* norma que se utilize en la definición de convergencia (o en la de conjunto acotado) produce el mismo resultado.

Teorema 7. *Todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

Demostración. Estamos afirmando que dos funciones arbitrarias que verifican las tres propiedades (N1), (N2) y (N3) son normas equivalentes. Como la equivalencia entre normas verifica la propiedad transitiva (si N_i $(i = 1, 2, 3)$ son normas, y N_1 es equivalente a N_2, N_2 es equivalente a N_3, entonces N_1 es equivalente a N_3), es suficiente verificar que, dada una norma N en $\mathbb{R}^n$, existen α, β reales positivos tales que

$$\alpha\|x\|_1 \le N(x) \le \beta\|x\|_1 \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Dado $x = (x_1, \dots, x_n)$, aplicando (1) obtenemos la segunda desigualdad en (6), porque

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \le N(x_1e_1) + \cdots + N(x_ne_n) \\ &= |x_1|N(e_1) + \cdots + |x_n|N(e_n) \\ &\le \text{máx}\big\{N(e_1), \dots, N(e_n)\big\}\big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big) \\ &= \beta\|x\|_1, \end{aligned}$$

donde $\beta = \text{máx}\big\{N(e_1), \dots, N(e_n)\big\}$ y utilizamos las propiedades (N3) y (N2).

Supongamos ahora que la primer desigualdad en (6) es falsa, lo que implica que para cada $\alpha = 1/k$ (k natural) existe un vector x_k tal que

$$N(x_k) < \frac{1}{k}\|x_k\|_1.$$

Consideremos la sucesión $y_k = x_k/\|x_k\|_1 \quad (k \in \mathbb{N})$, que verifica $\|y_k\|_1 = 1$. Como (y_k) es una sucesión acotada, contiene una subsucesión convergente, pongamos $y_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Tenemos $\|a\|_1 = \text{lím}_j \|y_{k_j}\|_1 = 1$, y $a \neq 0$. Por otra parte, aplicando la propiedad triangular, obtenemos

$$N(a) \le N(a - y_{k_j}) + N(y_{k_j}) \le \beta\|a - y_{k_j}\|_1 + \frac{1}{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} 0,$$

y aplicando (N1) resulta $a = 0$, obteniendo una contradicción, y concluyendo la demostración. □

4. Sucesiones de Cauchy y completitud

Definición 4. *Una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ verifica la* condición de Cauchy, *o es una* sucesión de Cauchy, *cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un K natural, tal que para todo par de índices $k' \ge K$, $k'' \ge K$ se verifica $\|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon$. En otros términos, (x_k) es de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}\colon \quad \forall k' \ge K \quad \forall k'' \ge K \quad \|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon.$$

Es fácil ver que una sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, si $x_k \to a$, dado $\varepsilon > 0$ existe K natural tal que $\|x_k - a\| < \varepsilon/2$ si $k \ge K$. Entonces, si $k' \ge K$, $k'' \ge K$, tenemos

$$\|x_{k'} - x_{k''}\| \le \|x_{k'} - a\| + \|x_{k''} - a\| < \varepsilon.$$

El recíproco de esta proposición es más interesante, y completa el siguiente resultado.

Teorema 8. *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy si y sólo si es convergente.*

Demostración. Resta ver que una sucesión de Cauchy es convergente. Sea entonces (x_k) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Veamos primero que es acotada. Dado $\varepsilon = 1$ existe K tal que, si $k \geq K$ tenemos $\|x_k - x_K\| < 1$ (tomamos $k' = k$, $k'' = K$ en la definición 4). Entonces

$$\|x_k\| \leq \max_{1 \leq k \leq K} \|x_k\| + \|x_K\| + 1, \text{ para todo } k \text{ natural.}$$

En consecuencia, por el teorema 6 de Bolzano-Weierstrass existe $a \in \mathbb{R}^n$ y una subsucesión definida en $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$ tal que $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Veamos que la sucesión original converge a a. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe K_1 tal que $\|x_{k'} - x_{k''}\| < \varepsilon/2$ si $k' \geq K_1$, $k'' \geq K_1$. Existe además K_2 tal que $\left\|x_{k_j} - a\right\| < \varepsilon/2$ si $k_j \geq K_2$. Entonces, si $k \geq K = \max\{K_1, K_2\}$, se verifica

$$\|x_k - a\| \leq \left\|x_k - x_{k_j}\right\| + \left\|x_{k_j} - a\right\| < \varepsilon,$$

concluyendo la demostración. □

La definición de sucesión de Cauchy es útil, porque caracteriza las sucesiones convergentes sin hacer referencia al límite. Cuando en un espacio vectorial con una norma el conjunto de las sucesiones de Cauchy coincide con las sucesiones convergentes, decimos que es un espacio vectorial normado *completo*, o que verifica la propiedad de *completitud*. En los reales, esta propiedad es equivalente al axioma de completitud (de hecho este axioma se utiliza en la demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass). No es difícil ver que el espacio vectorial de los números racionales $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, +, \times)$ no es completo.

5. Conjuntos abiertos y cerrados

Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto abierto*, cuando para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Decimos que $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ es un *punto interior* de A cuando existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Llamamos *interior* de A, y lo designamos $\overset{\circ}{A}$, al conjunto de los puntos interiores de A. Resulta que A es abierto si y sólo si $\overset{\circ}{A} = A$.

Decimos que un subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto cerrado* cuando el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B$, su complemento, que designamos también B^c, es un conjunto abierto.

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existen puntos distintos de x, pertenecientes a B, que distan menos que ε de x. En otros términos, x es de acumulación de B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B^*(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset.$$

Designamos mediante B' al conjunto de los puntos de acumulación de B, que llamamos *conjunto derivado* de B. Veremos que un conjunto es cerrado si y sólo si contiene sus puntos de acumulación.

Definimos la *clausura* $\bar{B}$ de un conjunto B mediante $\bar{B} = B \cup B'$. También es cierto que un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

Un punto a es *punto frontera* de un conjunto A cuando toda bola centrada en a contiene puntos de A y de A^c. Es decir, a es punto frontera de A cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \ B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Llamamos *conjunto frontera* del conjunto A, y lo designamos mediante $\delta\, A$, al conjunto de sus puntos frontera.

Ejemplo 1. Veamos que la bola abierta de centro a y radio $r > 0$ es un conjunto abierto. Si $x \in B(a, r)$ sea $\varepsilon = r - \|x - a\| > 0$. Si $\|y - x\| < \varepsilon$ tenemos

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \varepsilon + \|x - a\| = r,$$

es decir, si $y \in B(x, \varepsilon)$ entonces $y \in B(a, r)$, de donde $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ probando que $B(a, r)$ es un conjunto abierto. En particular, si $n = 1$, los intervalos abiertos son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Veamos que la bola cerrada de centro a y radio $r > 0$ es un conjunto cerrado. Si $x \notin B[a, r]$ sea $\varepsilon = \|x - a\| - r > 0$. Si $\|y - x\| < \varepsilon$ tenemos

$$\|y - a\| \geq \|x - a\| - \|y - x\| > \|x - a\| - \varepsilon = r,$$

de donde $y \notin B[a, r]$. Es decir $B(x, \varepsilon) \subset \big(B[a, r]\big)^c$, de donde $B[a, r]$ es un conjunto cerrado. En particular, si $n = 1$, obtenemos que los intervalos cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$.

Teorema 9 (Caracterización de los conjuntos cerrados).
Sea $B \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes

(a) *B es cerrado (es decir, B^c es abierto).*

(b) *B coincide con su clausura, es decir $\bar{B} = B$.*

(c) *Si $(y_k) \subset B$, y $y_k \xrightarrow[k]{} b$ entonces $b \in B$.*

Demostración. Veamos (a)$\Rightarrow$(b). Sea b de acumulación de B. Veamos que $b \in B$. Si, por absurdo, $b \in B^c$, por ser B^c abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^*(b, \varepsilon) \cap B = \emptyset$, y b no es de acumulación de B. Luego $b \in B$.

Veamos (b)$\Rightarrow$(c). Sea $(y_k) \subset B$, $y_k \to b$. Si $y_k = b$ para algún k, tenemos $b \in B$. Si $y_k \neq b$ para todo k, dado $\varepsilon > 0$ existe K tal que $y_k \in B^*(b, \varepsilon)$ para todo $k \geq K$. Luego b es de acumulación de B y pertenece a B por (b).

Veamos por último (c)$\Rightarrow$(a). Si B no es cerrado, existe un punto $b \in B^c$ que no es interior a B^c. Esto implica que para todo k existe un punto $y_k \in B \cap B(b, 1/k)$. Luego $y_k \to b$ de donde, por (c), $b \in B$ contra nuestro supuesto. Esto concluye la demostración de la última parte, y del teorema. □

Ejemplo 3. El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ es un conjunto cerrado. En efecto, si $(x_k) \subset X$ y $x_k \to a$, tenemos $1 = \|x_k\| \to \|a\|$, luego $\|a\| = 1$ y $a \in S$. Aplicando (c) en el teorema 9 obtenemos que S es cerrado.

Teorema 10. (a) *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(b) *La intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(c) *La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

(d) *La unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración. (a) Si un punto x pertenece a alguno de los conjuntos abiertos de una cierta clase de conjuntos abiertos, existe una bola $B(x, \varepsilon)$ contenida en ese conjunto, y por lo tanto, contenida en la unión de los conjuntos abiertos de la clase.
(b) Sean $A_1, \dots, A_n$ abiertos. Si la intersección es vacía hemos concluído, dado que el vacío es un conjunto abierto. Si x pertenece a la intersección de estos conjuntos, para cada $i = 1, \dots, n$ existe ε_i tal que $B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$, y, por lo tanto, con $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$, tenemos que la bola $B(x, \varepsilon)$ esta contenida en la intersección de los conjuntos $A_1, \dots, A_n$.

Las propiedades (c) y (d) se obtienen tomando complemento, y utilizando la igualdad

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$$

□

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ decimos que una familia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de conjuntos es un *cubrimiento* de X cuando $X \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Un *subcubrimiento* es una subfamilia de un cubrimiento, que también es un cubrimiento.

Ejemplo 4. Consideremos una sucesión de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, dada por

$$A_n = (-1, 1/n) \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Tenemos $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 0]$, que no es un conjunto abierto. Esto muestra que la condición de *finitud* es esencial en la parte (b) del teorema anterior.

Teorema 11 (Teorema de Lindelöf). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de infinitos conjuntos abiertos, tales que $X \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Entonces existe una subfamilia $\{A_{\alpha_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ numerable, tal que $X \subset \cup_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j}$. En otras palabras, todo cubrimiento infinito posee un subcubrimiento numerable.*

Demostración. Sea $\{B(x_j, r_j)\}$ la familia (numerable) de todas las bolas abiertas de centro en un punto de coordenadas racionales, con radio racional, y tales que $B(x_j, r_j) \subset A_\alpha$ para algún $\alpha \in I$. Elegimos para cada j un α_j tal que $B(x_j, r_j) \subset A_{\alpha_j}$. Si $x \in X$, existe $\alpha \in I$ tal que $x \in A_\alpha$, y por ser A_α abierto, existe $r > 0$, que podemos tomar racional, tal que $B(x, 2r) \subset A_\alpha$. Por la densidad de los racionales, existe x_j, centro de alguna bola de la primer familia, tal que $x_j \in B(x, r)$, por lo que $x \in B(x_j, r) \subset A_{\alpha_j}$. Hemos mostrado así, que

$$X \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(x_j, r_j) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j},$$

concluyendo la demostración. □

6. Límites y continuidad de funciones

En esta sección X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y estudiamos funciones $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Un caso particular importante se obtiene cuando $m = 1$, y llamamos *funcion real de varias variables* a $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Dada $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, la igualdad vectorial $y = f(x)$ en $\mathbb{R}^m$ equivale a m igualdades escalares en $\mathbb{R}$, y escribimos

$$(y_1, \dots, y_m) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Cada una de las funciones $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ es una función real de varias variables, que llamamos *función coordenada*.

Ejemplo 5 *(Transformaciones Lineales).* Un ejemplo central de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son las *transformaciones lineales*, es decir, las funciones $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que verifican $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ para α, β reales, x, y vectores en $\mathbb{R}^n$, todos arbitrarios. Recordemos que dada una transformación lineal T existe una única matriz $A = ((a_{ij}))$ de tamaño $m \times n$, que llamamos *matriz asociada*, tal que se verifica

$$T(x) = Ax^t,$$

asumiendo que $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un vector fila y x^t su traspuesto. Si las funciones coordenadas de T son $T_1, \dots, T_m$, tenemos $T_i(x) = \langle A^i, x\rangle$, para cada $i = 1, \dots, m$, donde $A^i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ designa la i-ésima fila de A.

Ejemplo 6 *(Curvas en $\mathbb{R}^n$).* Obtenemos otro caso particular importante cuando el dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Llamamos *curva* en $\mathbb{R}^n$ a una función $\lambda\colon I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo de la recta real. Como las curvas se utilizan para modelar la evolución temporal de un punto en el espacio (cuando $n = 3$, por ejemplo) es usual decir que la variable independiente es el *tiempo*, utilizando la letra t para designarla. Es importante notar que la curva es la función, y no su recorrido, que es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$. Este conjunto de puntos se denomina la *traza* de la curva. De esta forma, las curvas definidas en $\mathbb{R}$, mediante

$$\lambda(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t), \qquad \mu(t) = \big(r\cos(2t), r\operatorname{sen}(2t)\big),$$

son curvas distintas con la misma traza.

Definición 5 (Límite de una función).
Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, a un punto de acumulación de X. Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es b, y escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \text{ó} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que cumpla $0 < \|x - a\| < \delta$ se verifica $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. En otros términos, $f(x) \to b$ $(x \to a)$

cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon,$$

o sea, cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon f\big(X \cap B^*(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon).$$

Teorema 12 (Teorema de pasaje).
Sean $f \colon X \to \mathbb{R}^m$, a un punto de acumulación de X. Son equivalentes

(a) $f(x) \to b$ *cuando* $x \to a$.

(b) *Para toda sucesión* $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ *que cumple* $x_k \xrightarrow[k]{} a$ *se verifica* $f(x_k) \xrightarrow[k]{} b$.

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Consideremos $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ tal que $x_k \to a$. Veamos que $f(x_k) \to b$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f\big(X \cap B^*(a, \delta)\big) \subset B(b, \varepsilon)$. Existe además K tal que si $k \geq K$ se verifica $x_k \in X \cap B^*(a, \delta)$. Luego $f(x_k) \in B(b, \varepsilon)$ es decir $f(x_k) \to b$.

Veamos ahora (b)⇒(a). Supongamos por absurdo que $f(x) \nrightarrow b$ cuando $x \to a$. Existe entonces ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existe $x_k \in B^*(a, 1/k) \cap X$ tal que

$$\|f(x_k) - b\| \geq \varepsilon_0. \tag{7}$$

Pero la sucesión $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ verifica $x_k \to a$. Luego, según (b) se verifica $f(x_k) \to b$ contradiciendo (7), y completando la demostración del teorema. □

Observación. Dada $f = (f_1, \dots, f_m) \colon X \to \mathbb{R}^m$, con $X \subset \mathbb{R}^n$ y a punto de acumulación de X, el teorema 12 de pasaje nos permite demostrar fácilmente que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_m) \ \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \ (i = 1, \dots, m),$$

es decir, una función tiene límite si y sólo si tienen límite sus funciones coordenadas.

Además, mediante los teoremas 5 (de operaciones con límites de sucesiones) y 12 (de pasaje) es inmediato obtener los siguientes resultados.

Teorema 13 (Operaciones con límites de funciones).
Sean $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$, a un punto de acumulación de X. Sea $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ una función escalar. Supongamos que

$$f(x) \to b, \quad g(x) \to c, \quad \alpha(x) \to \alpha, \quad \textit{cuando } x \to a.$$

Entonces

(1) $f(x) + g(x) \to b + c \quad (x \to a)$,

(2) $\alpha(x)f(x) \to \alpha b \quad (x \to a)$,

(3) $\langle f(x), g(x)\rangle \to \langle b, c\rangle \quad (x \to a)$,

(4) $\|f(x)\| \to \|b\| \quad (x \to a)$.

Definición 6 (Continuidad).
Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, $a \in X$. Decimos que $f(x)$ es continua en a si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ que cumpla $\|x - a\| < \delta$ se verifica $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. En otros términos, $f(x)$ es continua en a cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall x \in X \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

o sea, cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon f\big(X \cap B(a, \delta)\big) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

o, en términos de límites, si a es un punto de acumulación de X, cuando

$$f(x) \to f(a) \quad \textit{si} \quad x \to a.$$

Es sencillo verificar que una función es continua en un punto si y sólo si son continuas en ese punto sus funciones coordenadas. Por último, en términos de sucesiones, tenemos que son equivalentes (a) y (b):

(a) $f(x)$ es continua en a.

(b) Para toda sucesión $(x_k) \subset X$, $x_k \underset{k}{\longrightarrow} a$ se verifica $f(x_k) \underset{k}{\longrightarrow} f(a)$.

La demostración es análoga a la del teorema de pasaje 12.

Se verifica además, que si $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$ y $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ son continuas en $a \in X$, también son continuas en a las funciones

$$f + g, \quad \alpha f, \quad \langle f, g\rangle, \quad \|f\|.$$

Si $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ es continua para todo $a \in X$, decimos que f es *continua en X*, o también, más brevemente, que f es *continua*.

Ejemplo 7. Veamos que una transformación lineal $T = (T_1, \dots, T_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua, verificando que sus funciones coordenadas lo son. En efecto, como la función coordenada tiene la forma $T_i(x) = \langle A^i, x\rangle$, para un cierto vector A^i (que es la i-ésima fila de la matriz de T), la continuidad resulta de la proposición anterior, por ser continua la función constante $f(x) = A^i$, la función identidad $g(x) = x$, y su producto interno $\langle f, g\rangle = T_i$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Teorema 14 (Continuidad de la función compuesta).
Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, continua en $a \in X$, $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$, donde $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$, g continua en $b = f(a)$. Entonces la función compuesta $h = g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^p$ definida mediante $h(x) = g\big(f(x)\big)$ es continua en a.

Demostración. Sea $(x_k) \subset X$ tal que $x_k \to a$. Por ser f continua en a se cumple $y_k = f(x_k) \to f(a) = b$. Por ser g continua en b, se cumple $g(y_k) \to g(b)$. Es decir $h(x_k) = g\big(f(x_k)\big) \to g\big(f(a)\big) = h(a)$, y h resulta continua en a. □

Definición 7 (Continuidad uniforme).
Una función $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua *en X cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo par $x \in X$, $y \in X$ que cumpla $\|x - y\| < \delta$ se verifica $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. En otros términos, $f(x)$ es uniformemente continua en X cuando*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall x, y \in X, \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observemos que si f es uniformemente continua en X, es continua en todo $a \in X$ (como resulta de tomar $a = y$ en la definición de continuidad uniforme). Para investigar cuando es cierto el recíproco de esta proposición es útil la siguiente caracterización.

Teorema 15 (Continuidad uniforme y sucesiones).
Sea $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Son equivalentes

(a) *$f(x)$ es uniformemente continua en X.*

(b) *Para todo par de sucesiónes $(x_k) \subset X$ e $(y_k) \subset X$ tales que se verifica $\|y_k - x_k\| \xrightarrow[k]{} 0$, tenemos $\|f(y_k) - f(x_k)\| \xrightarrow[k]{} 0$.*

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Consideremos entonces un par de sucesiónes $(x_k) \subset X$, $(y_k) \subset X$ tales que $\|y_k - x_k\| \xrightarrow[k]{} 0$. Veamos que

$$\|f(y_k) - f(x_k)\| \xrightarrow[k]{} 0. \tag{8}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|y - x\| < \delta$ implica $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$. Existe además K tal que $k \geq K$ implica $\|y_k - x_k\| < \delta$. Luego, si $k \geq K$ vale $\|f(y_k) - f(x_k)\| < \varepsilon$, demostrando (8).

Veamos (b)⇒(a) por absurdo. Es decir, supongamos que existe ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existen x_k, y_k puntos de X tales que $\|y_k - x_k\| < 1/k$ pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0$. Entonces $\|y_k - x_k\| \to 0$, pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| \nrightarrow 0$, contradiciendo (b), y completando la demostración del teorema. □

Ejemplo 8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = x^2$. Considerando $x_k = k$ e $y_k = k + 1/k$. Vemos que $\|y_k - x_k\| = 1/k \to 0$ pero $\|f(y_k) - f(x_k)\| = 2 + 1/k^2 \nrightarrow 0$. Deducimos entonces que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

7. Compacidad

Decimos que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *compacto* cuando es cerrado y acotado.

Teorema 16 (Caracterización de compactos por sucesiones).
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Son equivalentes

(a) *C es compacto.*

(b) *Toda sucesión de puntos de C contiene una subsucesión convergente a un punto de C.*

Demostración. Veamos (a)⇒(b). Si $(x_k) \subset C$, por ser C acotado existe una subsucesión convergente, pongamos $x_{k_j} \xrightarrow[j]{} c$. Como C es cerrado, $c \in C$.

Veamos (b)⇒(a) por absurdo. Si C no es acotado, para cada k natural existe $x_k \in C$, tal que $\|x_k\| \geq k$. Entonces, $(x_k) \subset C$, pero (x_k) no tiene subsucesiones convergentes, porque de serlo, serían acotadas, y $\left\|x_{k_j}\right\| \geq k_j \xrightarrow[j]{} \infty$, para cualquier subsucesión. Luego C es acotado. Si C no es cerrado, su complemento no es abierto, y tiene un punto $b \in C^c$ que no es interior, es decir, para todo k natural existe $x_k \in B(b, 1/k) \cap C$. Luego $x_k \to b$, y por lo tanto, toda subsucesión converge a b. Según (b) obtenemos que $b \in C$, contra lo que supusimos. Queda entonces demostrado que C es compacto. $\square$

Teorema 17 (Cantor). *Sea $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos. Entonces $\cap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \emptyset$, es decir, su intersección es no vacía.*

Demostración. Como los conjuntos C_k no son vacíos, para cada k existe $x_k \in C_k$. Luego, como $(x_k) \subset C_1$ existe una subsucesión convergente, pongamos $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a$. Para cada k tenemos $x_{k_j} \in C_k$ si $k_j \geq k$, lo que implica que $a \in C_k$, por ser C_k compacto. Entonces $a \in \cap_{k=1}^{\infty} C_k$, que no es vacía, concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 18 (De cubrimientos finitos de Borel-Lebesgue).
Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces, dada una familia arbitraria de conjuntos abiertos $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, tal que $X \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$, existe una subfamilia finita de abiertos $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_K}$ tal que $X \subset \cup_{k=1}^{K} A_{\alpha_k}$

Demostración. Por el teorema 11 de Lindelöf, existe una subfamilia numerable de abiertos, digamos $(A_{\alpha_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$C_k = X \setminus \big(A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_k}\big).$$

La sucesión (C_k) está en las hipótesis del teorema 17 de Cantor. Si todos los C_k son no vacíos, existe $a \in C_k$ para todo k, de donde $a \notin A_{\alpha_k}$ para todo k, y la familia numerable no es un cubrimiento. Luego existe K tal que C_K es vacío, de donde $X \subset A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_K}$, concluyendo la demostración. $\square$

Observación. Es importante notar que el recíproco del teorema anterior también es cierto, dando entonces una caracterización de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$: un conjunto es compacto en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todo cubrimiento formado por conjuntos abiertos tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 19 (Compacidad y funciones continuas).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces $f(X)$ es un conjunto compacto.

Demostración. Utilizamos la caracterización de conjuntos compactos por sucesiones del teorema 16. Dada $(y_k) \subset f(X)$ existe $(x_k) \subset X$ tal que $y_k = f(x_k)$ para cada k. Como X es compacto, (x_k) tiene una subsucesión convergente a un punto de X, pongamos $x_{k_j} \underset{j}{\longrightarrow} a \in X$. Por continuidad $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \underset{j}{\longrightarrow} f(a)$, probando la compacidad de $f(X)$. □

Veamos que la noción de compacidad es especialmente útil, dado que, por separado, las nociones de conjunto cerrado o conjunto acotado no son suficientes para obtener un teorema como el anterior.

Para esto consideremos $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. La función f es continua en $X = (0,1]$, que es un conjunto acotado. Sin embargo $f(X) = [1,\infty)$ no es acotado.

Por otra parte, la función $g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1/x$ también es continua en su dominio $Y = [1,\infty)$, que es un conjunto cerrado. Sin embargo $g(Y) = (0,1]$, que no es un conjunto cerrado.

Corolario 1 (Teorema de Weierstrass).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f presenta máximo y mínimo absolutos en X, es decir, existen x_m, x_M en X tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Como $f(X)$ es acotado, el extremo superior de $f(X)$, que designamos $E = \sup\{f(x)\colon x \in X\}$, es finito. Como existe una sucesión $(y_k) \subset f(X)$ tal que $y_k \to E$ y $f(X)$ es cerrado, resulta que $E \in f(X)$, es decir, existe x_M tal que $f(x_M) = E$, y se trata del máximo absoluto. La existencia de x_m tal que $f(x_m) = \inf\{f(x)\colon x \in X\}$ es análoga, concluyendo la demostración. □

Ejemplo 9 *(Norma de una transformación lineal).*
Dada una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definimos su *norma*, que designamos $|||T|||$, mediante

$$|||T||| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Como, por una parte, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| = 1\}$ es compacto (vimos que era cerrado en el ejemplo 3 y es, obviamente, acotado), mientras que por otra parte, la función $f(x) = \|T(x)\|$ es continua (por ser T continua), podemos aplicar el Teorema de Weierstrass para concluir que el supremo es en realidad un máximo y por lo tanto, es finito.

Teorema 20 (Compacidad y continuidad uniforme).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces f es uniformemente continua en X.

Demostración. Supongamos, por absurdo, que f no es uniformemente continua. Es decir, existe ε_0 tal que para todo $\delta = 1/k$ (k natural) existen pares de puntos x_k, y_k en X tales que $\|y_k - x_k\| < 1/k$ pero

$$\|f(y_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0. \tag{9}$$

Como X es compacto, la sucesión (x_k) tiene una subsucesión (x_{k_j}) convergente a un punto a de X. Además,

$$\left\|y_{k_j} - a\right\| \leq \left\|y_{k_j} - x_{k_j}\right\| + \left\|x_{k_j} - a\right\| \xrightarrow[j]{} 0,$$

es decir, $y_{k_j} \xrightarrow[j]{} a$. Entonces, como f es continua en a, tenemos

$$\lim_j \left\|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})\right\| = \|f(a) - f(a)\| = 0,$$

contradiciendo (9), y concluyendo la demostración. $\square$

8. Conexión

Definición 8. *Un subconjunto A de $X \subset \mathbb{R}^n$ es* abierto relativo *en X si para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \cap X \subset A$.*

Observación. Dado A abierto, si $A \subset X$, entonces A también es abierto relativo en X, porque para todo $a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset A \subset X$, de donde $B(a, \varepsilon) \cap X = B(a, \varepsilon) \subset A$.

Si X es un conjunto abierto, los abiertos relativos en X son sencillamente conjuntos abiertos. Para verlo basta tomar una bola $B(a, \varepsilon) \subset X$, de forma que $B(a, \varepsilon) \cap X = B(a, \varepsilon)$. En particular, los abiertos relativos en $\mathbb{R}^n$ son los abiertos usuales.

Definición 9. *Decimos que un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto* conexo *cuando no existen A, B abiertos relativos en X, disjuntos, no vacíos, tales que $A \cup B = X$. En otros términos, un X es conexo cuando no puede "descomponerse" en una unión disjunta de dos abiertos relativos no vacíos.*

Veamos que si $n = 1$ el conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Si A y B son disjuntos y no vacíos, y $A \cup B = \mathbb{R}$, existen $a \in A$, $b \in B$. Supongamos $a < b$ y consideremos $c = \inf\{x \colon [x, b] \subset B\}$. Es claro que c existe, porque $[b, b] \subset B$ y $[a, b] \not\subset B$. Además, si $c \in A$ entonces A no es abierto, porque c no es interior (de serlo no sería el ínfimo), y, análogamente, si $c \in B$ entonces B no es abierto. Esto prueba que $\mathbb{R}$ no puede descomponerse en una unión disjunta de abiertos, es decir, que $\mathbb{R}$ es conexo.

Veamos también que si $X \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces no es conexo. En efecto, existe $y \notin X$, tal que $a < y < b$, con $a \in X$ y $b \in X$. Luego los conjuntos $A = (-\infty, y) \cap X$ y $B = (y, \infty) \cap X$ son no vacíos, disjuntos, abiertos relativos, y verifican $A \cup B = X$.

Teorema 21 (Conexión y funciones continuas).
Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo, $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ continua. Entonces $f(X)$ es un conjunto conexo.

Demostración. Supongamos por absurdo que $f(X)$ no es conexo, es decir existen dos conjuntos C, D abiertos relativos en $f(X)$, disjuntos, no vacíos, y tales que $C \cup D = f(X)$. Sean $A = f^{-1}(C)$ y $B = f^{-1}(D)$. Es claro que A y B son no vacíos, por ser no vacíos C y D. Si existe $x \in A \cap B$, entonces $f(x) \in C \cap D$, pero C, D son disjuntos, luego $A \cap B = \emptyset$. Además, se verifica $A \cup B = X$, de no ser así existe $x \in X$, tal que $x \notin A \cup B$, y de allí $f(x) \notin C \cup D$. Resta investigar si A, B son abiertos relativos. Sea entonces $a \in A$, por lo que $f(a) \in C$. Por ser C abierto relativo en $f(X)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B\big(f(a), \varepsilon\big) \cap f(X) \subset C$. Como f es contina en a, existe $\delta > 0$ tal que $f\big(B(a, \delta)\big) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Entonces

$$f\big(B(a, \delta) \cap X\big) \subset B(f(a), \varepsilon) \cap f(X) \subset C,$$

lo que implica que $B(a, \delta) \cap X \subset A$, probando que A es abierto relativo en X. La situación es análoga para B, y resulta que X no es conexo, contradiciendo la hipótesis. Esto concluye la demostración. $\square$

El teorema anterior nos permite caracterizar a los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$.

Teorema 22. *Un conjunto es conexo en $\mathbb{R}$ si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Como vimos que todo conjunto conexo en $\mathbb{R}$ es un intervalo, resta ver que los intervalos son conexos. Si I es un intervalo, existe $f \colon \mathbb{R} \to I$ continua, demostrando que I es conexo por serlo $\mathbb{R}$. $\square$

Corolario 2 (Propiedad de Bolzano-Darboux). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo y $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(X)$ es un intervalo.*

Demostración. Es inmediata, porque $f(X) \subset \mathbb{R}$ es conexo. □

La combinación del teorema de Weierstrass con la propiedad de Darboux dan el siguiente resultado

Teorema 23. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sean $e = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$, $E = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$. Entonces $f\big([a,b]\big) = [e,E]$.*

Para estudiar las propiedades de los conjuntos conexos en $\mathbb{R}^n$ introducimos la siguiente noción. Una *poligonal* que une dos puntos x, y de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i],$$

donde $x = a_0, a_1, \dots, a_k = y$ son puntos de $\mathbb{R}^n$ y $[a_{i-1}, a_i]$ es un intervalo para cada $i = 1, \dots, k$. En palabras, una poligonal es una concatenación de intervalos de $\mathbb{R}^n$.

En el Corolario 3 veremos que que los conjuntos convexos son conexos. Es fácil ver también que existen conjuntos conexos que no son convexos. Basta por ejemplo observar que

(i) Dada una poligonal P arbitraria, siempre es posible construir una función continua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $f([0,1]) = P$, resultando que las poligonales son conjuntos conexos.

(ii) Existen poligonales no convexas.

La siguiente es una noción intermedia entre convexidad y conexión.

Definición 10. *Decimos que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es* poligonalmente conexo *cuando todo par de puntos x, y de X se puede unir por una poligonal de puntos de X. Es decir, existen puntos $x = a_0, a_1, \dots, a_k = y$ tales que*

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subset X.$$

Tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 24. *Si X es poligonalmente conexo, entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos -por absurdo- que X no es conexo. Existen entonces $a \in A$, $b \in B$ tales que A, B son disjuntos, abiertos relativos, y $A \cup B = X$. Como X es poligonalmente conexo, existe también una poligonal P que une a con b. Los conjuntos $P_A = P \cap A$ y $P_B = P \cap B$ son no vacíos, y disjuntos por ser disjuntos A y B. Además $P_A \cup P_B = P$ (porque $P \subset X = A \cup B$). Veamos que P_A y P_B son abiertos relativos. En efecto, si $x \in P_A \subset A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap X \subset A$, por lo que $B(x, \varepsilon) \cap P \subset P_A$ (idem P_B). Hemos demostrado que P no es conexo, lo que es una contradicción. Esto concluye la demostración. $\square$

Como los conjuntos convexos son poligonalmente conexos (porque los intervalos son poligonales) obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3. *Un conjunto convexo es conexo.*

El recíproco del Teorema 24 es falso (la proposición de un contrajemplo supera el alcance de estas notas). Sin embargo vale el siguiente resultado.

Teorema 25. *Si X es abierto y conexo, es poligonalmente conexo.*

Demostración. La demostración también es por absurdo. Supongamos entonces que X no es poligonalmente conexo, es decir, existen a, b puntos de X que no pueden ser unidos por una poligonal. Consideremos el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe una poligonal que une } a \text{ con } x\}$$

Es claro que $b \notin A$, y que A es abierto: dado $y \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset X$, y por lo tanto, existe una poligonal que une a con y, que se obtiene uniendo la poligonal que une a con x con el segmento $[x, y]$.

Es claro además que $X \setminus A$ es abierto, como se ve mediante un argumento similar: Dado $y \in X \setminus A$, existe una bola $B(y, \varepsilon) \subset X$, y tenemos $B(y, \varepsilon) \subset X \setminus A$ porque, de lo contrario, podríamos unir a con y mediante una poligonal. Esto demostraría que A y $X \setminus A$ son abiertos relativos en X, lo que es contradictorio, dado que X es conexo. Esto concluye la demostración. $\square$