Centro de Matemática. 30 de julio de 2004

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1. Una rana se mueve aleatoriamente en un plano, dando saltos independientes de largo a. Si empieza desde el origen, designamos por (X_n, Y_n) la posición de la rana luego de n saltos, donde

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} a \cos \phi_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} a \operatorname{sen} \phi_k.$$

Los ángulos ϕ_k son variables aleatorias independientes, con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(a) Calcular $\mathbf{E}\, X_n$, $\mathbf{E}\, Y_n$, $\mathbf{var}\, X_n$, $\mathbf{var}\, Y_n$.

(b) Demostrar que X_1 e Y_1 son no correlacionadas (su correlación es nula) y sin embargo no son independientes.

(c) Calcular, aproximando mediante el teorema central del límite, la probabilidad

$$\mathbf{P}(X_n > a\sqrt{n}).$$

Ejercicio 2. Se supone que la probabilidad p_n de que una familia tenga n hijos es de la forma:

$$p_n = (1-p)p^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Se supone además que si una familia tiene n hijos, todas las distribuciones posibles de sexos son igualmente probables.

(a) Calcular la probabilidad de que una familia tenga k hijos varones.

(b) Calcular la probabilidad de que una familia tenga por lo menos k hijos varones.

Sugerencia: Utilizar la fórmula

$$(1-x)^{-k-1} = \sum_{n=k}^{\infty} C_k^n x^{n-k}.$$

Ejercicio 3. Se considera una sucesión $Y_1, Y_2, \dots$ de variables aleatorias independientes, que verifican

$$\mathbf{E}\, Y_n = 0, \qquad \mathbf{var}\, Y_n = 1.$$

Se considera otra sucesión de variables aleatorias definidas mediante:

$$X_1 = Y_1, \qquad X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + Y_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(a) Calcular $\mathbf{E}\, X_n$ y $\mathbf{var}\, X_n$.

(b) Demostrar que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

(c) Demostrar que

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$